5. Zusammenfassung

Wie frühere Untersuchungen gezeigt haben, ist bei der Konservierung von Körnerfrüchten mit Propionsäure eine gleichmäßige Verteilung der Säure auf der Kornoberfläche eines jeden Korns anzustreben. Zur Sichtbarmachung und Beurteilung der Verteilungsgüte wurden dem Konservierungsmittel Farbstoffe beigemischt und eine Methode entwickelt, mit der die Ergebnisse fotografisch festgehalten werden können. Versuche haben gezeigt, daß reine Förderschnecken anstelle von Mischschnecken im allgemeinen keine ausreichende Mischwirkung erbringen. Sie sind nur dann geeignet, wenn besondere konstruktive Maßnahmen ergriffen werden.

Schrifttum

[1] Propionsäure. Vorträge und Datenmaterial einer Fachtagung. BASF-Mitteilungen für den Landbau, Dezember 1970.

[2] *Hieb, K.P.:* Die Feuchtmaiskonservierung mit Propionsäure – eine produktionstechnische und betriebswirtschaftliche Untersuchung (105 Schrifttumangaben). Bayer. Landw. Jahrbuch, Bd. 49 (1972) H. 5, S. 527/640.

[3] *Fink, F.:* Die Konservierung von Körnermais und Getreide mit Propionsäure. Landtechnik Bd. 26 (1971) H. 13, S. 334/36.

[4] *Hall, G.E., L.D. Hill u. E.E. Hatfield:* Propionic-acetic acid for high-moisture corn preservation. ASAE-Paper No. 73-312 (1973).

[5] *Calderwood, D.L., H.W. Schroeder:* Chemical preservatives for maintaining moist rice in storage. ASAE-Paper No. 73-309 (1973).

[6] *Bronsch, K.:* Die Propionsäure – ein Konservierungsmittel für Mischfutter. Die Mühle Bd. 107 (1970) H. 31, S. 460/61.

[7] *Hartmann, F.W.:* Die Konservierung von feuchtem Futtergetreide. Die Mühle Bd. 107 (1970) H. 36, S. 540.

[8] *Teichmann, E.:* Benetzung, Mischung und Granulierung von Feststoffen mit Flüssigkeiten. Aufbereitungstechnik Bd. 8 (1967) H. 9, S. 470/75.

[9] *Teichmann, E.:* Verfahren zur Herstellung von Milchaustauschfutter. Die Mühle Bd. 102 (1965) H. 26, S. 491/93.

[10] *Bau, H., U. Dörries u. J. Zaske:* Anwendung der Fluorometrie zur Verteilungsmessung in der Pflanzenschutztechnik. Landtechn. Forsch. Bd. 19 (1971) H. 3/4, S. 93/101.

[11] *Böttcher, S.:* Eine allgemeine Analyse der Aufwärtsförderung eines Einzelkörpers in Schneckenförderern beliebiger Neigung. VDI-Z Bd. 105 (1963) Nr. 14, S. 581/93; Nr. 16, S. 663/71; Nr. 18, S. 743/54.

[12] *Vierling, A. u. G.L. Sinha:* Untersuchungen zum Fördervorgang beim senkrechten Schneckenförderer. Fördern und Heben Bd. 10 (1960) H. 8, S. 587/92.

Überblick über Optimierungsstrategien

Von Wolfgang Paul, Braunschweig-Völkenrode*)

DK 518.5

Der Beitrag hat den Stand des Wissens auf dem Gebiet der Optimierungsrechnungen zum Inhalt. Die klassischen Optimierungsstrategien 'lineare Optimierung', 'nichtlineare Optimierung' und 'dynamische Optimierung' werden nach einer Klärung der grundlegenden Begriffe vorgestellt. Zu jeder Strategie wird die mathematische Problemklasse, auf die sie anwendbar ist, herausgearbeitet. Ein Beispiel zu jeder Problemklasse verdeutlicht die Einsatzmöglichkeiten. Auf die großen Vorteile der Optimierungsverfahren im Sinne einer grundlegenden Mehrzweckmethode ist ebenso wie auf die Schwierigkeiten und Grenzen der einzelnen Verfahren hingewiesen.

**) Dr.-Ing. Wolfgang Paul ist wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für landtechnische Grundlagenforschung (Direktor: Prof. Dr.-Ing. W. Batel) der Forschungsanstalt für Landwirtschaft, Braunschweig.*

Einleitung

Optimal ist zum modischen Beiwort vieler technischer Veröffentlichungen geworden. Der Begriff "optimal" wird dabei mit recht unterschiedlichem Inhalt verwendet. Seine häufige Verwendung ohne klare Definition läßt sogar vermuten, daß das Attribut auch oftmals mehr aus dem Gefühl heraus denn als gesichertes Ergebnis verwendet wird. Es gibt jedoch viele Strategien, die das Finden eines Optimums erleichtern. In diesem Aufsatz soll deshalb ein Überblick über die verschiedenen Optimierungsstrategien gegeben werden. Betrachtet werden als Hauptgruppen die lineare Optimierung, die nichtlineare Optimierung und die dynamische Optimierung. Die Strategien werden anschaulich dargestellt, ohne daß dabei auf den mathematischen Kern eingegangen wird. Praktische Beispiele für das Auffinden des Optimums mit Hilfe von Rechengeräten und Modellen des betrachteten Vorganges oder auch ohne Rechner unmittelbar am realen Objekt werden zu jeder Hauptgruppe von Strategien gegeben. Der Beitrag soll den Blick für das sinnvolle Einsetzen von Optimierungsstrategien an realen Objekten schärfen.

1. Voraussetzungen zur Optimierung, Definitionen

1.1 Einleitung

Unter Optimierung eines Prozesses versteht man ein Vorgehen derart, daß aus mehreren Entscheidungsmöglichkeiten systematisch diejenige ausgewählt wird, bei der der betrachtete Prozeß so abläuft, daß ein angestrebtes Ergebnis einen Extremwert annimmt. Das angestrebte Ergebnis ist als ein Zahlenwert eines Gütekriteriums definiert. Das Kriterium muß nach Beenden der Optimierung ein Minimum oder ein Maximum geworden sein. Durch die Gesetze des realen Prozesses wird bei der Optimierung des Kriteriums ein Satz von notwendig einzuhaltenden Bedingungen bestimmt, die mathematisch mit Nebenbedingungen bezeichnet werden. Die Optimierung selbst läuft nach einer bestimmten Strategie ab. Durch die Strategie wird eine Folge von Entscheidungen festgelegt, nach denen die Einflußgrößen verändert werden. Die Strategien richten sich nach Art des Problems, d.h. nach der Struktur des Prozesses oder nach der Formulierung von Kriterium und Nebenbedingungen. Im allgemeinen wird die Erstellung eines Modells des betrachteten Prozesses und die Benutzung einer Rechenmaschine Voraussetzung sein für eine erfolgreiche Anwendung einer Optimierungsstrategie. Im speziellen führt aber auch die Anwendung einer Optimierungsstrategie am realen Objekt zum Erfolg.

1.2 Kriterium (Gütefunktion, Zielfunktion)

Das Kriterium ist ein Maß, das mit einem Zahlenwert die Güte des betrachteten Prozesses beschreibt. Es ist selbstverständlich, daß ein Prozeß nur optimal in Bezug auf ein bestimmtes Kriterium sein kann. Die Bezeichnung optimal ohne klar definiertes Kriterium ist, obwohl oft verwendet, sinnlos.

Die Frage, nach welchem Kriterium ein System optimal ausgelegt werden soll, muß vor jeder Optimierungsprozedur sehr sorgfältig überlegt werden. Ein Prozeß kann z.B. energieoptimal, zeitoptimal oder kostenoptimal sein. Er ist dann in dem definierten Sinne optimal, wenn das Kriterium, in dem das zu erreichende Ziel definiert und festgelegt wurde, einen Extremwert annimmt, d.h. zu einem Minimum oder Maximum wird. Die Forderung nach einem Extremwert ist für die Optimalität ausreichend, da der Maximumsaufgabe

$$\text{Kriterium} \Rightarrow \max$$

die Minimumsaufgabe

$$-\text{Kriterium} \Rightarrow \min$$

entspricht und so beide Fragestellungen äquivalent sind.

Bei der Auswahl des Kriteriums ist zu berücksichtigen, daß es nur selten gilt, e i n e Forderung zu maximieren. Man muß deshalb die verschiedenen Teilforderungen bewerten und in e i n e m Kriterium zusammenfassen. Man kann keine Optimierungsstrategie anwenden, wenn man das Kriterium wie folgt definiert: Der betrachtete Prozeß soll bis zur Erreichung des Zieles möglichst energieoptimal und zugleich möglichst zeitoptimal sein und zugleich soll das Ziel mit möglichst geringer Abweichung getroffen werden:

$$\begin{aligned}
&\text{Aufgewendete Energie } E && \Rightarrow \min \\
&\text{Zeitaufwand } T && \Rightarrow \min \\
&\text{Zielabweichung } D && \Rightarrow \min.
\end{aligned}$$

Es ist stets notwendig, die Kriterien nicht nebeneinander, sondern miteinander verknüpft in einem Kriterium zu definieren. Der Wert des Kriteriums muß mit einer einzigen Zahl angebbar sein. Dazu muß man die Wertigkeit der einzelnen Ziele zueinander in Beziehung setzen. Die Bewertung kann z.B. durch eine Wertanalyse je nach den entstandenen Kosten oder dem erreichten Nutzen erfolgen. Sind etwa in obigem Beispiel die Zeitkosten doppelt so groß wie die Energiekosten und betragen die Nutzungsverluste durch Abweichungen vom Ziel pro Einheit das zehnfache, so gilt als Kriterium:

$$E + 2T + 10D \Rightarrow \min.$$

Man kann nur optimieren, wenn man sich über die Wertigkeit der einzelnen Teilziele klar geworden ist. Das Kriterium wird im allgemeinen ein mehrdimensionales, nur schwer vorstellbares Funktional sein.

1.3 Nebenbedingungen

Bei Optimierungsaufgaben ist es selten, daß unabhängig von weiteren Bedingungen nur der Extremwert des Kriteriums interessiert. Meist müssen physikalische Begrenzungen oder Systemzusammenhänge der im Kriterium vorkommenden Größen mit berücksichtigt werden. Denn die im Kriterium verknüpften Größen sollen auch in der Praxis realisierbar sein.

So kann z.B. die aufgewendete Energie eine Funktion des Zeitaufwandes und der Endabweichungen sein:

$$E = f(T, D).$$

Solche funktionalen Gegebenheiten des realen Systems (oder in den meisten Fällen des entsprechenden Modellsystems), dargestellt durch das Gleichungssystem $M = 0$, gilt es zu berücksichtigen. Und ebenso wie die "inneren" Gesetzmäßigkeiten, die den betrachteten Vorgang beherrschen, müssen auch äußere Grenzen beachtet werden. Die aufgewendete Energie kann z.B. nicht unendlich groß sein, die Abweichungen sollen z.B. ein Mindestmaß nicht unterschreiten dürfen. Die äußeren Grenzen faßt man zu dem Ungleichungssystem

$$G \leqslant 0$$

zusammen.

Ohne Nebenbedingungen wären obige Kriterien, deren Terme von verschiedenen, optimal auszulegenden Einflußgrößen I abhängen, leicht zu optimieren. Aus der Forderung

$$\text{Krit}(I) \Rightarrow \max$$

ergibt sich als Ansatz für die Lösung sofort die meist leicht auflösbare notwendige Bedingung

$$\frac{\partial\, \text{Krit}(I)}{\partial I} = 0.$$

Für das reale System mit seinen äußeren und inneren Nebenbedingungen ist aber eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned}
\text{Krit}(I) &\Rightarrow \max \\
M(I) &= 0 \\
G(I) &\leqslant 0 \\
I_{opt} &= ?
\end{aligned}$$

notwendig.

1.4 Strategien

Je nach Art des Kriteriums und der Nebenbedingungen muß man unterschiedliche Optimierungsstrategien anwenden. Die mathematische Formulierung des zu optimierenden Prozesses und des Kriteriums bestimmt weitgehend die Auswahl der geeigneten Strategie. Ein kompliziertes reales System mit vielen Einflußgrößen und den entsprechenden Kriterien wird, wenn überhaupt, nur mit Hilfe von Rechengeräten und den entsprechenden Modellen und Programmen zu optimieren sein. Begrenzte praktische Optimierungsaufgaben sind jedoch nach einigen Strategien auch direkt am Objekt lösbar.

Viele Strategien verlangen einen Startpunkt dergestalt, daß man von einem Anfangspunkt oder Anfangszustand ausgehend sich zu immer besseren Lösungen vortastet. Diesen Startpunkt gewinnt man durch näherungsweise Berechnung oder durch die Erfahrung im Umgang mit dem System. Die Bedeutung solcher klassischen Kenntnisse über den Prozeß, den man optimal auslegen will, darf nicht unterschätzt werden. Gerade bei etwas umfangreicheren Aufgaben läßt sich eine Optimierungsstrategie nie blind anwenden, sondern verlangt stets den mitdenkenden Fachmann.

Die meisten Strategien sind eingebettet in ein Schema nach **Bild 1.** Die doppelt umrahmten Blöcke sind dabei die wesentlichen Bestandteile der jeweiligen Optimierungsstrategien, die im folgenden genauer vorgestellt werden.

Der Block "Optimierungsstrategie" wird und wurde im Realfall meist durch ein vom Menschen bestimmtes, nur teilweise konsequentes Vorgehen ausgefüllt. Der Mensch hat dabei gewisse Kenntnisse über den zu optimierenden Prozeß und entscheidet aus seiner

Erfahrung und seiner Fähigkeit zu logischem Denken direkt am Objekt über den nächsten Teilschritt im Rahmen seiner Strategie, die zum Optimum führen soll. Die Erfahrung zeigt allerdings, daß man schon bei etwas verwickelteren Aufgaben die menschlichen Fähigkeiten nicht überschätzen sollte. Normalerweise sind schon vierdimensionale Probleme (Probleme mit 4 Einflußgrößen) nicht mehr richtig vorstellbar. Die vom Menschen in einem solchen Fall aufgrund seiner vermeintlichen Einsicht in das Problem ausgeführte Optimierungsstrategie ähnelt dann der zufälligen Suche. Helfen kann hier nur das strikte Einhalten einer Optimierungsstrategie.

Das Einhalten von Optimierungsstrategien kann sich am realen Objekt als ungeheuer zeitaufwendig erweisen. Es wird dann notwendig sein, den zu optimierenden Prozeß und die gewählte Strategie mit Hilfe eines Rechners nachzubilden.

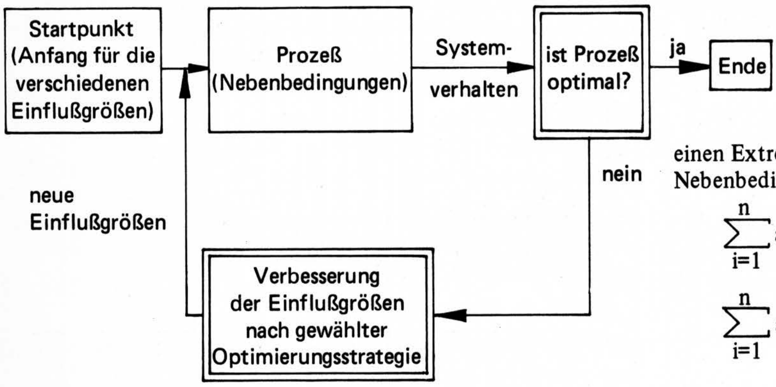

Bild 1. Schema für den Ablauf einer Optimierungsrechnung.

1.5 Lösungen

Als Lösung nach Beenden einer Optimierungsprozedur ergibt sich ein Satz von Einflußgrößen, die das Kriterium einen Extremwert annehmen lassen. Leider existiert aber bei den meisten Problemen nicht nur ein einziger Extremwert. Wenn der Extremwert ein Maximum ist, so haben praktische Probleme oftmals nicht nur das absolute Maximum, sondern auch eine Reihe von Nebenmaxima. Die Situation ist vergleichbar mit einem Gebirge, in dem viele Gipfel vorhanden sind. Einer der Gipfel ist der höchste Gipfel.

Die Entscheidung, ob ein Nebenmaximum oder das Hauptmaximum erreicht wurde, läßt sich nur schwer treffen. Und auch mit den meisten Strategien läßt sich nur entscheiden, ob in der näheren Umgebung eine Verbesserung möglich ist, nicht aber, ob ein erreichtes Maximum ein Nebenmaximum oder das Hauptmaximum ist.

Bei vielen Strategien ist das Erreichen eines Maximums abhängig vom gewählten Startpunkt. Die Auswahl des Startpunktes ist also oftmals ebenso wesentlich wie das Kontrollieren der Ergebnisse. Das Kontrollieren geschieht durch praktische Prüfung, alternative Verfahren oder Vorgabe neuer Startpunkte. Wegen der eventuellen Schwierigkeiten beim Auftreten von Nebenmaxima, der Abhängigkeit der Ergebnisse vom Startpunkt, der Empfindlichkeit gegenüber Änderungen im Kriterium und der Empfindlichkeit gegenüber Modellfehlern sind praktische Optimierungen auch heute noch nicht ganz problemlos. Gleichwohl sind die mit Optimierungsstrategien verzeichneten Erfolge groß. Die Optimierungsstrategien sind vielseitig einsetzbar. Das soll im folgenden anhand praktischer Beispiele aus einigen Arbeitsgebieten des Instituts für landtechnische Grundlagenforschung gezeigt werden.

2. Lineare Optimierung

2.1 Einleitung

Die Verfahren der linearen Optimierung (auch lineare Programmierung genannt) berechnen den Extremwert eines linearen Ausdrucks (Kriterium) unter Berücksichtigung linearer Nebenbedingungen. Programme für die lineare Optimierung existieren im Software-Paket der meisten Rechner und sind auch schon oft veröffentlicht worden [1]. Im Gegensatz zu vielen anderen Optimierungsstrategien ist hier im Normalfall das Auffinden des absoluten Optimums garantiert. Anders ausgedrückt: das durch die lineare Optimierungsstrategie erreichte Optimum ist stets das einzige Optimum, es existieren keine Nebenoptima.

Die Grundlage fast aller linearen Optimierungsstrategien ist das Simplexverfahren. Die hierauf aufbauenden Verfahren führen in endlich vielen Schritten zum Optimum. Gelegentliche, selten auftretende numerische Schwierigkeiten ändern nichts an der Gültigkeit dieser Aussage. Für den Anwender ist ferner angenehm, daß sich fast alle Programme zur linearen Optimierung den Startpunkt als Ausgangslösung selbst suchen.

2.2 Mathematische Formulierung der Problemklasse

Gesucht sind die Größen $x_1, x_2, ..., x_n$ so, daß ein linearer Ausdruck K (Kriterium) mit den konstanten Koeffizienten c_i

$$K = \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i \qquad (1)$$

einen Extremwert annimmt. Dabei müssen die x_i einen Satz von Nebenbedingungen (Gleichungen und Ungleichungen)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \, x_i = b_j \qquad (j = 1, ..., k) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \, x_i \leqslant b_j \qquad (j = k+1, ..., m) \qquad (3)$$

$$x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (4)$$

erfüllen. Für das allgemeine Vorgehen ist es nützlich, die Ungleichungen (3) durch Zusatzvariable x_i ($i = n+1, ..., n+m-k$) wie folgt zu erweitern:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \, x_i + x_{n+j} = b_j \qquad (j = k+1, ..., m).$$

Das Gesamtproblem hat also in Matrixschreibweise folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} K &= \underline{c} \cdot \underline{x} \Rightarrow \max \\ A\underline{x} &= \underline{b} \\ \underline{x} &\geqslant \underline{0} \end{aligned} \qquad (5).$$

Die Gleichungen (5) heißen Normalform der linearen Optimierungsaufgabe. Auf diese Normalform können alle linearen Optimierungsaufgaben, auch solche mit Begrenzungen in den Variablen x_i und beliebigen Ungleichungen, zurückgeführt werden [2].

2.3 Die Strategie bei der linearen Optimierung

Die Strategie der linearen Optimierung läßt sich am besten anhand der geometrischen Interpretation eines stark vereinfachten Beispiels erläutern.

2.3.1 Fütterungsproblem

Zur Aufzucht von Tieren wird eine Mischung aus den Futtermitteln 1 und 2 verwendet. Futtermittel 1 kostet pro Einheit DM 2,--, Futtermittel 2 kostet pro Einheit DM 4,--. Der Massenzuwachs der Tiere bringt pro Einheit einen Ertrag von DM 10,--. Futtermittel 1 wird im Verhältnis 1 : 4 in Biomasse umgesetzt, Futtermittel 2 im Verhältnis 1 : 2. Der Anteil an Futtermittel 1 darf aus physiologischen Gründen 75 % nicht überschreiten. Höchstens 5 Einheiten Futter können pro Tag aufgenommen werden, von Futtermittel 2 jedoch nur höchstens 3 Einheiten. Gesucht ist die Futtermischung, mit der der höchste Ertrag (= Erlös — Kosten) zu erzielen ist.

Die Gleichungen für dieses Problem lauten:

$$K = 10 \cdot \frac{1}{4} x_1 + 10 \cdot \frac{1}{2} x_2 - 2x_1 - 4x_2 \Rightarrow \max \qquad (6)$$

$$x_1 \leqslant 0{,}75\,(x_1 + x_2) \qquad (7)$$

$$x_1 + x_2 \leqslant 5 \qquad (8)$$

$$x_2 \leqslant 3 \qquad (9).$$

Eine geometrische Interpretation der Gleichungen (6) ÷ (9) gibt **Bild 2**. Man erkennt, wie der zulässige Bereich (schraffiertes Vieleck) durch die Nebenbedingungen Gleichungen (7), (8) und (9) begrenzt wird. Im zulässigen Bereich muß nun der Punkt P gefunden werden, für den das Kriterium K (gestrichelte Kurvenschar) ein Maximum hat. Er ergibt sich im betrachteten Fall für $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. Es ist geometrisch einleuchtend, daß der optimale Punkt stets in einem Eckpunkt des durch die Nebenbedingungen begrenzten zulässigen Vielecks (auch Simplex genannt) liegen muß. Aufgabe der linearen Optimierungsstrategie ist es, diesen Eckpunkt im allgemeinen n-dimensionalen Raum zu finden. Man fängt bei der Suche an einem beliebigen Eckpunkt an und geht jeweils zu einem neuen Eckpunkt über. Dieses Vorgehen wird solange wiederholt, wie eine Verbesserung des Kriteriums festgestellt werden kann. Trotz dieser relativ einfachen Strategie des Absuchens von Eckpunkten im zulässigen Bereich wird bei einigermaßen realistischen Problemen höherer Dimension ein Suchen von Hand schnell aussichtslos, weil nicht mehr überschaubar.

Von der geometrischen Interpretation her ist es einleuchtend, daß die Nebenbedingungen manchmal nicht miteinander verträglich sind. Wenn die Nebenbedingungen sich widersprechen, so ist natürlich keine Lösung möglich. Ebenso ist eine Lösung nicht sinnvoll, wenn der durch die Nebenbedingungen definierte Wertebereich nicht beschränkt ist, d.h. eine oder mehrere Größen unendlich groß werden können.

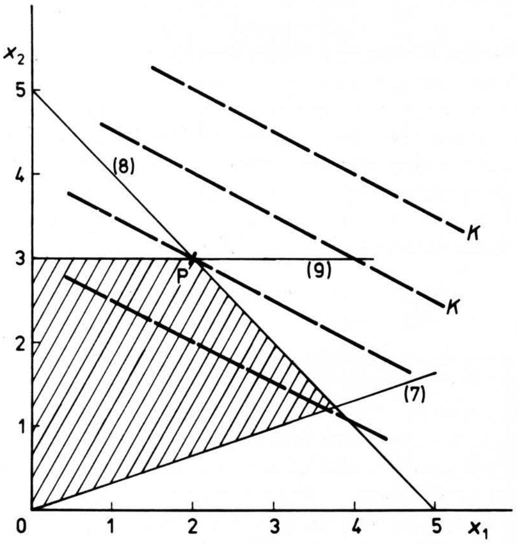

Bild 2. Geometrische Interpretation des linearen Optimierungsproblems < Fütterung >.

2.4 Wertung der linearen Optimierungsstrategien

Die Methoden der linearen Optimierung sind ein ausgereiftes und problemlos einsetzbares Hilfsmittel bei statischen linearen Problemen. Besonders bei Wirtschaftlichkeitsuntersuchungen (z.B. [3]) wird dieses Hilfsmittel oft verwendet. Die Schwierigkeiten bei der Analyse von Problemen mit Methoden der linearen Optimierung liegen nicht in der Rechnung. Sie liegen in den Einschränkungen bei der Modellbildung (nur selten wird ein realer Prozeß in den Nebenbedingungen durch lineare Gleichungen vollständig beschreibbar sein) und in der Parameterbestimmung. Bei einer großen Zahl von Parametern a_{ij} in den Nebenbedingungen sind diese oftmals nicht oder nur teilweise bekannt. Bei Schätzungen der unbekannten Parameter kann es leicht vorkommen, daß ein Parameter, gegen den die Lösung sehr empfindlich ist, falsch eingegeben wird. Die Lösung wird entsprechend ungenau.

Mit in die Kategorie der linearen Optimierung gehören die Verfahren der ganzzahligen Optimierung und der quadratischen Optimierung (quadratisches Kriterium bei linearen Nebenbedingungen).

3. Nichtlineare Optimierung

3.1 Einleitung

Die nichtlineare Optimierung behandelt die Optimierung eines nichtlinearen Ausdrucks (Kriterium) unter Berücksichtigung nichtlinearer Nebenbedingungen. Ebenso wie bei der linearen Optimierung kann man mit den Verfahren der nichtlinearen Optimierung nur statische Prozesse behandeln. Es gibt mehrere Verfahren zur nichtlinearen Optimierung [4], allgemein anwendbare Programme sind aber nicht immer im Software-Paket der Rechner vorhanden. Die Mehrzahl der nichtlinearen Optimierungsstrategien verlangt einen expliziten Startpunkt und läuft von dort auf ein in der Nähe liegendes Optimum. Es ist dabei nicht sichergestellt, daß dieses Optimum auch der Hauptextremwert ist, **Bild 3**, vielmehr wird es sich in den meisten Fällen um ein Nebenoptimum handeln.

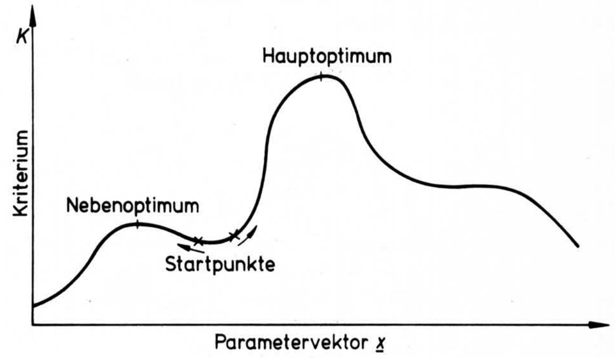

Bild 3. Bedeutung des Startpunktes für das Ergebnis der Rechnung.

3.2 Mathematische Formulierung der Problemklasse

Gesucht sind die Größen $x_1, ..., x_n$ so, daß eine Funktion (Kriterium) einen Extremwert annimmt:

$$K = f(x_1, ..., x_n) \Rightarrow \text{Extremum} \qquad (10).$$

Dabei müssen die Zustandsgrößen x_i einen Satz von Nebenbedingungen (Gleichungen und Ungleichungen)

$$\begin{aligned} g_1\,(x_1, ..., x_n) &\leqslant 0 \\ &\vdots \\ g_m\,(x_1, ..., x_n) &\leqslant 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

erfüllen. Für das allgemeine Vorgehen ist es nützlich, die Nebenbedingungen (11) in das Kriterium (10) einzubeziehen. Man erreicht das z.B. durch einen Ansatz für das Kriterium in der Form

$$K = f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{m} k_i h_i\,(\underline{x}),$$

wenn man die k_i sehr groß wählt (Strafparameter) und die h_i gleich

$$h_i = \begin{cases} 1 & \text{für } g_i(\underline{x}) > 0 \\ 0 & \text{für } g_i(\underline{x}) \leqslant 0 \end{cases}$$

setzt. Reine Begrenzungen in den Einflußgrößen der Art

$$x_{i\,min} \leqslant x_i \leqslant x_{i\,max}$$

lassen sich bei vielen Verfahren auch direkt berücksichtigen.

3.3 Die Strategien der nichtlinearen Optimierung

Die bekannten Strategien für nichtlineare Optimierungsaufgaben unterscheiden sich stark im Rechenaufwand, in der Notwendigkeit der Vorgabe eines Startpunktes und in der Sicherheit des Erreichens des Hauptoptimums.

3.3.1 Die Strategie der direkten Suche

Das Vorgehen nach dieser Strategie ist wie folgt: Man berechnet von dem Startpunkt (oder bisher erreichten Punkt) ausgehend die Werte des Kriteriums in der Umgebung des Startpunktes, **Bild 4.** Die Werte der Umgebung werden mit dem bisher erreichten Wert des Kriteriums verglichen. Ist keiner der Werte in der Umgebung größer als der bisherige Wert, dann hat man einen Extremwert erreicht. Errechnet man jedoch größere Werte, so nimmt man denjenigen unter den zulässigen Punkten (Nebenbedingungen) als neuen Anfangspunkt, der den größten Wert für das Kriterium ergibt. Die sich so ergebende Suchrichtung wird beibehalten, solange sich in der eingeschlagenen Richtung eine Verbesserung erreichen läßt. Ist dies nicht mehr der Fall, muß man erneut die Umgebung des bis dahin erreichten Punktes absuchen, um eine neue Suchrichtung festzulegen. Es ist einleuchtend, daß diese Strategie auch am realen Objekt zum Erfolg führen kann, wenn die Zahl der Parameter nicht zu groß ist.

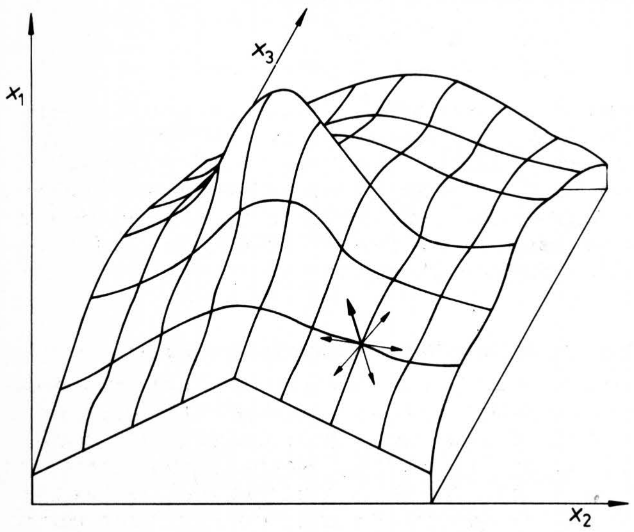

Bild 4. Die Strategie der direkten Suche.

3.3.2 Die Strategie des steilsten Anstieges

Ein Vorgehen nach dieser Strategie verlangt nicht nur die Kenntnis des Kriteriums, sondern auch die Kenntnis der Ableitungen des Kriteriums nach allen zu optimierenden Parametern. Die Strategie ist zugleich die schnellste als auch in bezug auf formale Vorarbeiten die aufwendigste. Man errechnet hier mit Hilfe der Ableitungen stets die Richtung des steilsten Anstieges oder Abfalls, in der die Rechnung fortgeführt wird. Die Strategie ist die eines Wanderers im Nebel, der die Orientierung verloren hat und das Gipfelgasthaus erreichen will. Der Wanderer geht stets in die Richtung, in der es am steilsten nach oben geht, sofern ihn die Naturgegebenheiten (Nebenbedingungen) nicht daran hindern.

3.3.3 Die Strategie der zufälligen Suche

Diese Strategie ist die unkritischste und folglich auch die zeitaufwendigste Strategie. Sie hat aber die Vorteile, daß man keinen Startpunkt benötigt und daß man mit dieser Strategie nach genügend langer Zeit stets in die Nähe des absoluten Optimums kommt. Die Strategie besteht darin, den optimal auszulegenden Parametern zufällige Werte innerhalb des durch die Nebenbedingungen begrenzten Bereiches zuzuweisen und mit diesen Werten das Kriterium zu berechnen. Man wiederholt diesen Vorgang sehr oft und merkt sich jeweils das bisherige Maximum und die zugehörige Parameterkonstellation. Je öfter man diese zufällige Suche (die auch den Namen "Monte-Carlo-Verfahren" trägt) wiederholt, desto größer wird die Wahrscheinlichkeit, eine Parameterkonstellation in der Nähe des wirklichen Optimums gefunden zu haben.

Für komplexere Probleme wird dieses Verfahren sehr zeitaufwendig. Nehmen wir an, jede Variable ist, um genügend dicht liegende Werte zu bekommen, k-mal zu testen. Dann müßte ein Kriterium, das von zwei Variablen abhängig ist, schon durch k^2 Versuche getestet werden. Für ein Kriterium mit n Variablen wird die Zahl der Versuche k^n und wächst daher mit n sehr schnell. Schon für $n = 5$ und $k = 100$, also für noch relativ kleine Zahlen, ergeben sich $100^5 = 10^{10}$ Versuche. Das führt auch bei modernen Rechengeräten zu unzumutbaren Rechenzeiten.

Das Zahlenbeispiel zeigt, daß die Strategie der zufälligen Suche am realen Objekt praktisch keine Aussicht auf Erfolg hat. Ferner ist anzumerken, daß diese Strategie immer nur in die Nähe des Hauptoptimums trifft. Die Entfernung zum Optimum hängt von der Zahl der Versuche ab.

3.3.4 Kombinierte Strategien

Es ist interessant, daß in der Natur mit den Prinzipien "Mutation" und "Selektion" die beste der bisher bekannten nichtlinearen Optimierungsstrategien zu beobachten ist. Die Mutation ist eine zufällige Suche, die Selektion ist eine Auslese nach der Strategie des steilsten Anstieges. Die Verbindung beider Strategien vereinigt auch deren Vorteile. Durch die zufällige Suche ist eine hohe Wahrscheinlichkeit gegeben, beim Optimierungsprozeß auch wirklich die Nähe des Hauptoptimums zu erreichen. Die anschließende gezielte Suche führt von der Nähe des Hauptoptimums zum Optimum selbst.

3.4 Beispiel für eine nichtlineare Optimierung

Betrachtet wird die Auslegung des Hauptholmes eines Pflugrindels. Der Holm wird aus einem dünnwandigen rechteckigen Hohlprofil hergestellt, **Bild 5.** Gesucht sind die optimalen geometrischen Abmessungen des Querschnittes, mit denen sowohl die geforderte Festigkeit eingehalten wird als auch der geringste Materialverbrauch stattfindet. Aus den Abmessungen des Holmes ergibt sich für den Materialverbrauch als Kriterium

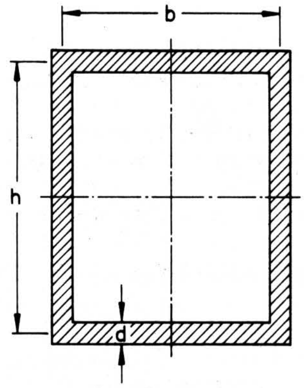

Bild 5. Veränderliche Größen bei der Ausbildung eines Pfluggrindels als Rechteckrohr.

$$K = 2(h + b)d \Rightarrow \min \qquad (12).$$

An Nebenbedingungen sind einzuhalten:

a. Die Bedingungen der Schlankheit, um ausreichende Sicherheit gegen Instabilitätserscheinungen (Beulen) zu gewährleisten. Es wurde ein λ_{zul} von 45 gewählt.

$$\begin{aligned} b/d &\leqslant 45 \\ h/d &\leqslant 45 \end{aligned} \qquad (13)$$

b. Die Bedingungen der Festigkeit:

$$\sigma_v \leqslant \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{Fließ}\ (St\ 37)}{Faktor} = \frac{24000}{1{,}5} = 16000\ N/cm^2 \qquad (14).$$

Die Vergleichsspannung σ_v errechnet sich nach der Hypothese der maximalen Gestaltsänderungsarbeit als Funktion der Schnittkräfte und der geometrischen Abmessungen:

$$\sigma_v = \sigma_v(N_x, M_y, M_z, M_x, Q_y, Q_z, b, h, d) \qquad (15).$$

Die Methoden der Ermittlung der Schnittkräfte sind in [5] dargestellt. Hier wurden als Werte für einen 6-scharigen Aufsattelpflug ermittelt:

$$\begin{array}{llll} M_x = & 690730 \text{ Nm} & N_x = & 241400 \text{ N} \\ M_y = & -1\,387600 \text{ Nm} & Q_y = & 4450 \text{ N} \\ M_z = & 938700 \text{ Nm} & Q_z = & -11960 \text{ N} \end{array}$$

Die Optimierungsrechnung für das dargestellte Problem, Gleichung (12) ÷ (15), ergibt als Lösung die Werte

$$\begin{aligned} b &= 17{,}5 \text{ cm} \\ h &= 17{,}4 \text{ cm} \\ d &= 0{,}412 \text{ cm} \end{aligned} \qquad (16).$$

Es ist anzumerken, daß in diesem Beispiel das Optimum sehr flach ist. Auch viele andere, durchaus von den Zahlenwerten (16) abweichende Abmessungen ergeben eine Fläche, die nur wenig größer als der Wert für das optimale Kriterium ist. Auch die beste Wertkombination für handelsübliche Bleche mit genormter Blechdicke wurde errechnet.

3.5 Wertung der nichtlinearen Optimierungsstrategien

Die Methoden der nichtlinearen Optimierung sind leider längst nicht so problemlos einzusetzen, wie die der linearen Optimierung. Ihre Anwendungsmöglichkeiten gerade in der Technik mit ihren nichtlinearen statischen Modellen sind aber sehr groß. Wegen der oftmals notwendigen Angabe eines geeigneten Startpunktes und der Möglichkeit des Auftretens von Haupt- und Nebenmaxima verlangen diese Strategien meist eine gewisse ingenieurmäßige Erfahrung im Umgang mit den realen Systemen. Es ist besonders darauf hinzuweisen, daß einige der Strategien auch direkt am realen Objekt (und nicht nur an dessen Modell) angewendet werden können.

4. Dynamische Optimierung

4.1 Einleitung

Die Verfahren der dynamischen Optimierung behandeln das Erreichen des Extremwertes eines Kriteriums aus zeitlich veränderlichen Größen. Die Gesetzmäßigkeiten, denen die zeitlich veränderlichen Zustandsgrößen unterworfen sind und nach denen mit zeitlich veränderlichen Steuergrößen auf die Zustandsgrößen eingewirkt werden kann, sind in den Nebenbedingungen meist in Form von Differentialgleichungen niedergelegt. Als Ergebnis der Optimierungsrechnung erhält man hier, nicht wie zuvor dargestellt feste statische Größen, sondern zeitlich veränderliche Profile für die Einflußgrößen.

Die klassische Strategie der dynamischen Optimierung ist die Variationsrechnung. Wegen einiger Schwierigkeiten bei der Abfassung der Nebenbedingungen wurde sie von *Pontrjagin* zum Maximumprinzip ausgebaut [6]. Daneben entstand die Strategie der dynamischen Programmierung nach *Bellman* [7], die am leichtesten auf praktische Anwendungen übertragbar ist. Zur Begrenzung des mathematischen Aufwandes soll hier nur die für praktische Anwendungen und Computerberechnungen am besten geeignet erscheinende Methode der dynamischen Programmierung beleuchtet werden.

Programme zur Lösung dynamischer Optimierungsprobleme sind im allgemeinen in den Programmbibliotheken nicht vorhanden. Auch wenn die hier vorgestellte Strategie auf dem Computer realisiert ist, bleibt der Umgang mit ihr nur innerhalb einer vorgegebenen, meist sehr kleinen Kapazität unproblematisch. Für kleine Probleme sind nämlich keine Anfangslösungen notwendig und die optimale Lösung wird sicher erreicht. Bei mehrdimensionalen Problemen mit vielen Zustands- und Steuervariablen ergeben sich hohe Anforderungen an die Speicherkapazität der Rechengeräte. Eine Umgehung dieser Speicherplatzschwierigkeiten ist nur möglich, wenn eventuell auch ein Nebenmaximum als Lösung akzeptiert werden kann.

4.2 Mathematische Formulierung des Problems

Gesucht ist das zeitliche Profil der Steuergrößen $\underline{u}$ so, daß ein Kriterium (Funktional)

$$K = \int_0^{t_{end}} f_0(\underline{x}, \underline{u}, t)\, dt \Rightarrow \max \qquad (17)$$

einen Extremwert annimmt. Steuergrößen $\underline{u}$ und Zustandsgrößen $\underline{x}$ sind in den Nebenbedingungen (optimal zu steuernder Prozeß)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(\underline{x}, \underline{u}, t) \end{aligned} \qquad (18)$$

miteinander verknüpft. Die Steuergrößen u_k ($k = 1, \ldots, r$) und die Zustandsgrößen x_i ($i = 1, \ldots, n$) sollen dabei innerhalb gewisser physikalischer Grenzwerte liegen:

$$\begin{aligned} u_{k\,min} &\leq u_k \leq u_{k\,max} \\ x_{i\,min} &\leq x_i \leq x_{i\,max} \end{aligned} \qquad (19).$$

Gesucht sind nun die zeitlichen Verläufe der Steuergrößen $u_k(t)$, bei denen das Kriterium (17) einen Extremwert annimmt. Typische Forderungen für das Funktional (17) sind z.B., daß die Zustandsgrößen x_i ein bestimmtes vorgegebenes zeitliches Profil möglichst gut erreichen, bestimmte Endwerte einhalten, in möglichst kurzer Zeit ein Ziel erreichen oder eine Anlage über die Betriebszeit energieoptimal fahren sollen.

4.3 Die Strategie der dynamischen Programmierung

Die Strategie der dynamischen Programmierung baut auf dem Optimalitätsprinzip auf. Es besagt stark vergröbert, daß bei einem vielstufigen Entscheidungsprozeß, bei dem auf jeder Stufe (z.B. Zeitstufe) eine Entscheidung zu fällen ist, dann und nur dann eine optimale Entscheidungsfolge erreicht wird, wenn unabhängig davon, was bisher geschah, auch auf den letzten Stufen die optimale Entscheidung gefällt wird. Auf diese einleuchtende Aussage baut sich eine Berechnungsvorschrift auf, die grob skizziert etwa wie folgt zu beschreiben ist:

Der zu erreichende Endpunkt x des Prozesses, zur Zeit n, sei bekannt. Von jedem möglichen Zustand zum Zeitpunkt n-1 ausgehend bestimmt und merkt man sich nun die optimale Entscheidung u_n. Rückwärtsgehend wird so auf jeder Zeitstufe von jedem möglichen Zustand ausgehend das Ergebnis der Anwendung jeder erlaubten Entscheidung gespeichert bis hin zum Startpunkt x_0 und der ersten Entscheidung u_1.

Danach rechnet man wieder vorwärts und sucht aus dem bekannten Netz von möglichen Zuständen und optimalen Entscheidungen diejenige Entscheidungsfolge heraus, mit der das angestrebte Ziel erreicht wird.

An einem einfachen Beispiel wird der Problemkreis näher beleuchtet.

4.3.1 Beispiel für eine Verkaufspolitik

Ein Händler hat eine Verkaufskapazität einer leicht verderblichen Ware von 1000 Stück täglich. Er hat keine Lagerfläche und muß deshalb die Ware nach Möglichkeit bis 18^{00} Uhr verkauft haben. Er weiß aus Erfahrung, daß die Nachfrage zeitlich über den Tagesablauf stark unterschiedlich ist. Er kann damit rechnen, daß er bei einem Normalpreis vormittags stündlich 50 Stück verkaufen kann, am Nachmittag stündlich 100 Stück und gegen Feierabend stündlich 200 Stück. Über den Preis kann er jedoch den Absatz seiner Ware steuern. Er hat die Möglichkeit, dreimal täglich den Preis zu wechseln und sucht nun die optimale Preispolitik, bei der sein Verdienst ein Maximum wird. Die Preis-Absatz-Funktion (Nebenbedingung) ist in **Tafel 1** angegeben. Mit diesen Nebenbedingungen lassen sich die Entscheidungsmöglichkeiten, wie in **Bild 6** dargestellt, auffächern.

Es stellt sich heraus, daß es im betrachteten Fall zwei optimale Preispolitiken (Preisprofile) gibt, **Bild 7**. Bei der ersten ist ein konstanter mittlerer Preis über den gesamten Tagesablauf beizubehalten, während bei der zweiten optimalen Preispolitik der Preis im Tagesablauf vom niedrigsten zum höchsten stufenweise geändert wird. Beide optimalen Preispolitiken enden mit einem Verkaufserlös von 1 500,-- DM täglich. Alle anderen Politiken liegen mehr oder minder deutlich unter dem erreichbaren Optimum.

		Verkaufte Stückzahl		
	Preis	vormittags	nachmittags	abends
I:	1,00 DM	200	800	400
II:	1,50 DM	100	600	300
III:	2,00 DM	0	200	200

Tafel 1. Preis-Absatz-Funktion

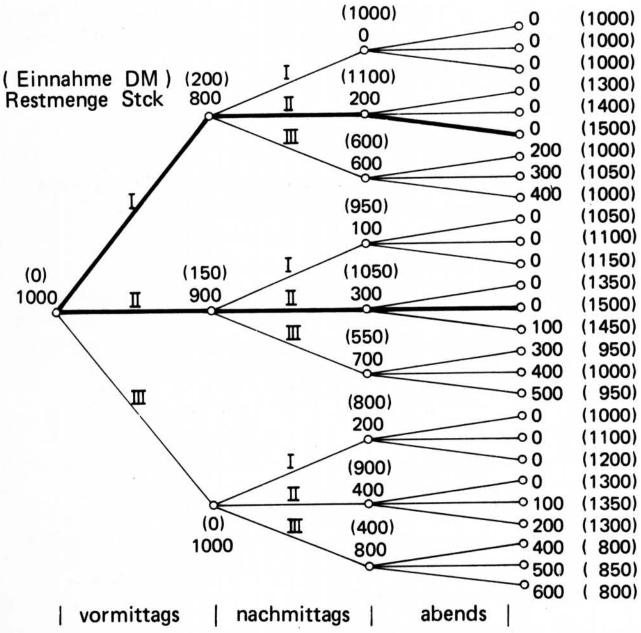

Bild 6. Entscheidungsbaum für eine Preispolitik.

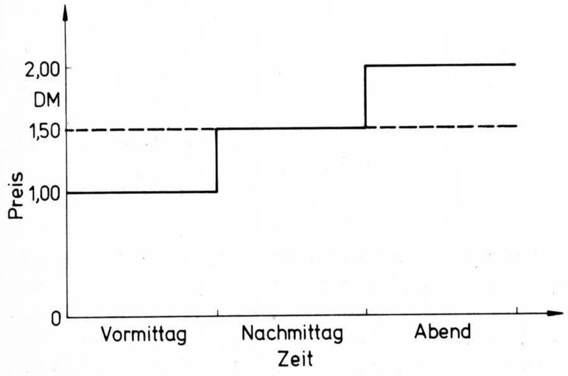

Bild 7. Die Profile der optimalen Preispolitik.

4.4 Beispiel: Steuerung der Frischwasserzufuhr einer Flaschenreinigungsanlage

Eine Lebensmittelfirma verpackt ihr Produkt in Glasflaschen. Die Flaschen müssen vor dem Abpackprozeß gereinigt werden. Die Reinigung geschieht vollautomatisch in einem Laugenbad mit nachfolgendem Klarspülen, **Bild 8**. In den Klarspülbädern befindet sich zunächst reines Wasser. Durch Verschleppung (Haftung von Flüssigkeit an den Flaschen) wird jedoch beim Tauchprozeß pro Flasche eine Menge von 15 ml aus dem vorhergehenden Bad ins nachfolgende Bad eingebracht. Die Verschleppung bewirkt ein allmähliches Ansteigen der Laugenkonzentration in den ursprünglich mit reinem Wasser gefüllten Spülbädern. Da die Laugenkonzentration im letzten Bad 0,5 % nicht überschreiten darf, wird im Gegenstromverfahren ins letzte Bad klares Wasser zugegeben. Gesucht ist das Profil der Frischwasserzufuhr u, das obige Forderung erfüllt und das gleichzeitig den geringsten Wasserverbrauch gewährleistet.

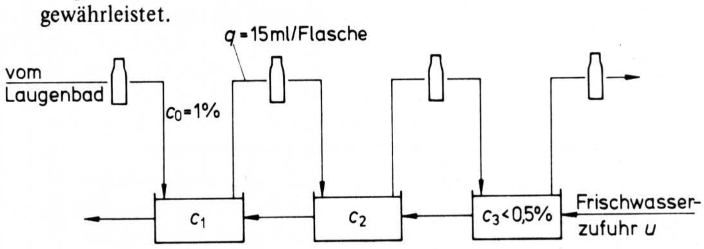

Bild 8. Schema der Klarspülbäder einer Flaschenreinigungsanlage.

Das Problem läßt sich wie folgt formulieren: Gesucht ist die minimale Frischwasserzufuhr u für eine Tagesleistung von 50000 Flaschen:

$$K = \int_0^{50000} u(Fl)\, d\, Fl \Rightarrow \min \tag{20}$$

unter den Nebenbedingungen der Spülbäder mit dem Volumen V und der Verschleppung q:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= \frac{q}{V}(c_0 - c_1) + \frac{u}{V}(c_2 - c_1) \\ \dot{c}_2 &= \frac{q}{V}(c_1 - c_2) + \frac{u}{V}(c_3 - c_2) \\ \dot{c}_3 &= \frac{q}{V}(c_2 - c_3) + \frac{u}{V}(0 - c_3) \end{aligned} \tag{21}$$

und der Forderung, daß die Laugenkonzentration im letzten Bad eine obere Grenze nicht überschreiten darf:

$$c_3 \leqslant 0{,}5\ \%.$$

Die Lösung des Problems (20) und (21) ist in **Bild 9** dargestellt. Als optimales Profil für die Frischwasserzufuhr ergibt sich eine Schaltfunktion.

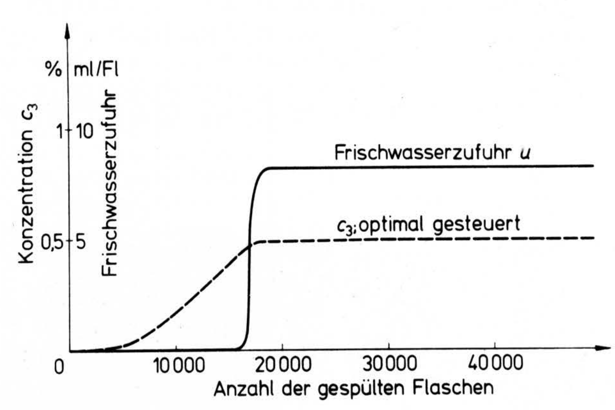

Bild 9. Profil des Frischwasserzulaufs und der Laugenkonzentration im letzten Spülbad bei optimaler Steuerung.

4.5 Wertung der dynamischen Optimierungsstrategien

Die dynamischen Optimierungsstrategien sind gerade für die Technik mit ihren dynamischen Vorgängen und Modellen besonders interessant und wichtig. Leider haben diese Strategien jedoch einen besonders großen Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf und es existieren auch noch kaum geeignete Programme zur Bearbeitung solcher Probleme. Es ist zu hoffen, daß auch für diese Problemklasse in Zukunft ähnlich leistungsfähige Programme wie für die Probleme der linearen Optimierung und teilweise auch der nichtlinearen Optimierung zur Verfügung stehen werden.

5. Weitere Anwendungen, vermischte Probleme

5.1 Einleitung

In den Kapiteln 2; 3 und 4 wurden als wichtigste Optimierungsstrategien die lineare Optimierung, die nichtlineare Optimierung und die dynamische Optimierung vorgestellt. Die lineare Optimierung behandelt das Finden des Extremwertes eines linearen Kriteriums unter Berücksichtigung linearer statischer Nebenbedingungen. Die linearen Optimierungsverfahren sind am problemlosesten von allen Optimierungsverfahren anzuwenden. Sie sind für manche Zweige der Wirtschaftwissenschaften zu einem klassischen Werkzeug geworden. Wegen der notwendigen Einfachheit der zugrundeliegenden Modelle, die den realen Prozeß beschreiben sollen, ist die Anwendung der linearen Optimierung jedoch begrenzt.

Die nichtlinearen Optimierungsverfahren finden besonders in der Technik Anwendung. Der Umgang mit diesen Verfahren ist jedoch aus mathematischen Gründen meist nicht problemlos. Die nichtlinearen Optimierungsverfahren verlangen den mitdenkenden Ingenieur. Diese Aussage trifft in verstärktem Maße auch für die in ihrer praktischen Anwendung noch eingeschränkten dynamischen Optimierungsverfahren zu. Gleichwohl sind diese Verfahren wegen der bei vielen praktischen Problemen zugrundeliegenden dynamischen Vorgänge von großer Wichtigkeit.

Neben diesen bisher angesprochenen klassischen Aufgabenstellungen gibt es jedoch auch eine große Anzahl von Problemen, die nicht eigentlich Optimierungsaufgaben sind, die aber elegant durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem zu lösen sind. Zu manchen dieser Probleme gibt es auch klassische arithmetische Lösungsmethoden. Diese Methoden sind jedoch meist für den Spezialfall ausgelegt und von beträchtlicher logischer Komplexität. Ihr Sinn war es, Rechenarbeit zu minimieren. Mit dem Aufkommen von Rechenmaschinen ist jedoch oftmals eine einfachere Logik, die entsprechend oft durchlaufen wird, von Vorteil. Eine solche einfachere Logik, die auf viele Probleme anwendbar ist, ist mit den Optimierungsverfahren gegeben.

Im folgenden sollen einige Probleme vorgestellt werden, bei denen man auf den ersten Blick nicht sofort das dahinterstehende Optimierungsproblem erkennt.

5.2 Die Lösung von Gleichungen

Gesucht ist die Lösung $x_1, ..., x_n$ eines Systems von n nichtlinearen Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, ..., x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, ..., x_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (22).$$

Die Lösung von nichtlinearen Gleichungen ist aus den verschiedensten Gründen meist schwierig. Ein möglicher Lösungsansatz ist auch über die nichtlineare Optimierung gegeben. Man bestimmt dazu einfach ein positives Maß für die Abweichung der einzelnen Gleichungen f_i vom geforderten Nullpunkt. Ein Kriterium zur Lösung des Gleichungssystems (22) ist so z.B.

$$K = \sum_{i=1}^{n} (f_i(x_1, ..., x_n))^2 \Rightarrow \min \qquad (23).$$

Die Zurückführung der Gleichungen (22) auf das Optimierungsproblem (23) hat den Vorteil, daß keine Konvergenzschwierigkeiten auftreten und daß ein Problem nie über – oder unterbestimmt sein kann.

5.3 Parameterbestimmungen

5.3.1 Dynamische Modelle

Weitere wichtige Anwendungsgebiete für Optimierungsverfahren sind die Gebiete der Parameteridentifizierung und Parameterbestimmung bei dynamischen Vorgängen. Es wird dazu das Beispiel eines Reglerentwurfs betrachtet. Gegeben ist der Regelkreis einer Temperaturregelung nach **Bild 10.** Das Verhalten der Regelstrecke ist bekannt (Nebenbedingungen):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= k_1(y_0 - y_1) \\ \dot{y}_2 &= 0{,}1(y_1 - y_2) \\ \dot{y}_3 &= 0{,}05(y_2 - y_3) \\ \dot{y}_4 &= y_{soll} - y_3 \end{aligned} \qquad (24).$$

Als Regler wird ein Pi-Regler eingesetzt:

$$y_0 = k_2 y_4 + k_3 \int_0^t y_4\, dt \qquad (25).$$

Es gilt nun, die freie Konstante k_1 und die Reglerkonstanten k_2 und k_3 so zu bestimmen, daß gegenüber einem Null-Niveau der Umgebung die Temperatur des Raumes y_3 so ausgeregelt wird, daß die quadratische Regelabweichung bei einem Sollwertsprung auf 20° C ein Minimum wird:

$$K = \int_0^\infty (y_{soll} - y_3)^2\, dt \Rightarrow \min.$$

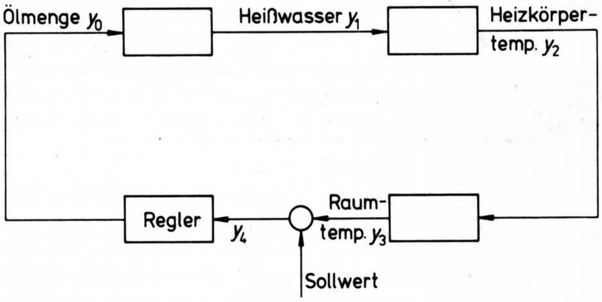

Bild 10. Regelkreis für eine Temperaturregelung.

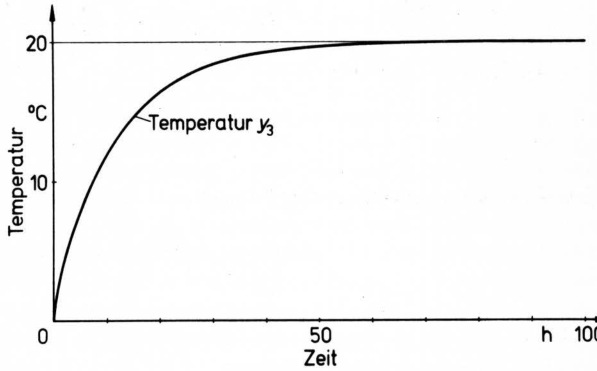

Bild 11. Übergangsverhalten einer Temperaturregelung für einen konventionell ausgelegten Regler.

Bild 11 zeigt die Übergangskurve bei klassisch ausgelegtem Regler (kein Überschwingen) (Parameterwerte $k_1 = 0{,}1$)[1/Zeiteinheit], $k_2 = 0{,}1$ [Brennstoffmenge/Temperatur], $k_3 = 0{,}1$ [Brennstoffmenge/Temperatur · Zeit]. Das Kriterium (Fläche unter der Sollkurve) errechnet sich zu K = 2690 [Temp.^{2} · Zeit]. **Bild 12** zeigt die Übergangsfunktion bei optimal ausgelegtem Regler. Mit den Werten

$$k_1 = 0{,}187$$
$$k_2 = 0{,}383$$
$$k_3 = 0{,}588$$

erhält man eine deutliche Verbesserung des Kriteriums auf 855. Der Wert des Kriteriums ist also auf weniger als ein 1/3 des Ausgangswertes gesunken.

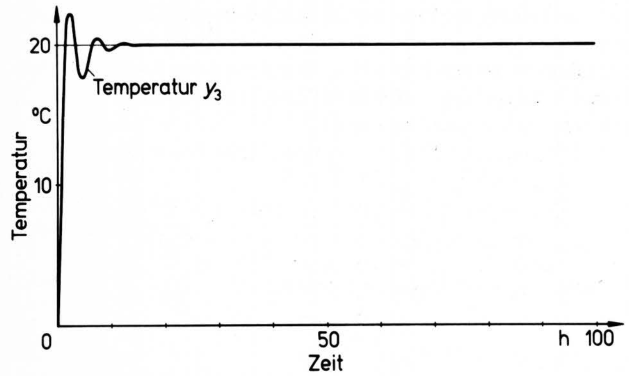

Bild 12. Übergangsverhalten einer Temperaturregelung für einen optimal ausgelegten Regler.

5.3.2 Statische Modelle

Die Aufgaben der Parameterbestimmung lassen sich hier wie folgt darstellen. Gegeben ist die Struktur einer beliebigen Funktion

$$y = f(k_1, ..., k_n, x).$$

Der Wert y der Funktion hängt von der unabhängigen Variablen x sowie von mehreren unbekannten Parametern $k_1, ..., k_n$ ab. Die unbekannten Parameter bewegen sich innerhalb gewisser Grenzen

$$k_{i\,min} \leqslant k_i \leqslant k_{i\,max}.$$

Gegeben ist ferner ein Satz von Meßpunkten. An m Meßstellen $x_j (j = 1, ..., m)$ wurde je l-mal der Wert der Funktion $y_{j,k}$ $(k = 1, ..., l)$ gemessen. Die unbekannten Parameter k_i sollen nun so bestimmt werden, daß die Abweichungen zwischen den Meßpunkten und der beschreibenden Funktion möglichst gering werden, d.h. also, daß die Funktion die Meßpunkte möglichst genau trifft:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} (f(k_1, ..., k_n, x_j) - y_{j,k})^2 \Rightarrow \min.$$

Als Beispiel zur nichtlinearen Parameterbestimmung wird der gasseitige Stofftransport bei einer Zweiphasenströmung in innenberieselten Rohren betrachtet. Luftwäscher mit einer solchen Anordnung werden gegenwärtig auf ihre Eignung zur Reinigung der Abluft von großen Viehbeständen untersucht [8]. Es ist daher notwendig, dem entwerfenden Ingenieur eine einfache Berechnungsformel zu liefern.

Aufgrund verfahrenstechnischer Überlegungen gilt als Ansatz für die auf den Anfangswert bezogene Konzentration c_i/c_e in Abhängigkeit von der Geometrie d/l des Rohres:

$$c_i/c_e = \exp\left\{-4 \cdot Sh \cdot l/(d \cdot Re \cdot Sc)\right\}.$$

Die Reynold'sche Zahl Re und die Schmidt'sche Zahl Sc können aus Meßwerten bestimmt werden, die Sherwood'sche Zahl Sh berechnet sich zu

$$Sh = k_1(Re^{k_2} - k_3)\left(1 + \left(\frac{d}{l}\right)^{k_4}\right)(1 + k_5 Re_L)\, Sc^{k_6}.$$

Als Meßwerte (Mittelwerte) erhält man z.B. die dimensionslosen Zahlen nach **Tafel 2**. Es gilt nun, die unbekannten Konstanten $k_1, ..., k_6$ so zu bestimmen, daß die Summe aller Abweichungen zwischen dem Modell und den Meßpunkten möglichst klein wird:

$$\sum \left(\frac{c_i}{c_e} \text{(Messung)} - \frac{c_i}{c_e} \text{(Modell)}\right)^2 \Rightarrow \min.$$

l/d	ci/ce
0	1
2	0,9406
6,375	0,8542
11,375	0,7674
16,375	0,7037
21,375	0,6304
26,375	0,5749
31,375	0,5191

Tafel 2. Meßwerte für die Sorbtion von Geruchsstoffen (gasseitiger Stofftransport)

Als Lösung dieser Regressionsaufgabe ergibt sich

$$k_1 = 0{,}0005$$
$$k_2 = 0{,}743$$
$$k_3 = 100{,}6$$
$$k_4 = 0{,}489$$
$$k_5 = 0{,}0231.$$

Über die Güte des so errechneten Modells kann man sich anhand einer Auftragung, **Bild 13**, einen Eindruck verschaffen.

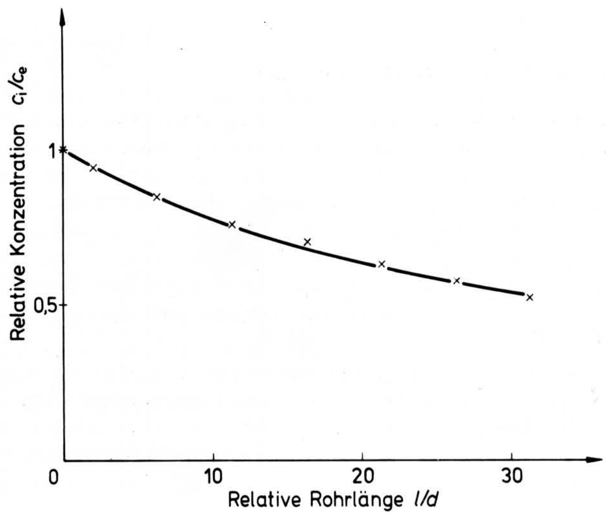

Bild 13. Darstellung der Meßpunkte und der berechneten Funktion für den gasseitigen Stofftransport.

5.5 Ausblick

Die vermischten Probleme gehören mit zu den interessantesten Aufgaben der Optimierung. Gerade hier gilt jedoch im verstärkten Maße, daß die verschiedenen Optimierungsstrategien nicht automatisch zum richtigen Ergebnis führen. Während bei klassischen Problemen die Optimierungsstrategien oftmals den Kern der Aufgabe ausmachen, sind sie hier mehr und mehr zu einem Hilfsmittel für den entwerfenden Ingenieur geworden. Die klassischen Ingenieurfähigkeiten werden beherrschend. Das gilt vor allem auch bei so komplexen Studien wie der Optimierung ganzer Anlagen.

6. Zusammenfassung

Der Beitrag gibt nach einer Klärung der grundlegenden Begriffe (Kapitel 1) einen Überblick über die klassischen Optimierungsstrategien lineare Optimierung (Kapitel 2), nichtlineare Optimierung (Kapitel 3) und dynamische Optimierung (Kapitel 4). Auf weiterführende Probleme ist in Kapitel 5 eingegangen.

Es wird versucht, die mathematischen Klassen der verschiedenen Probleme, auf die die einzelnen Strategien anwendbar sind, herauszuarbeiten. Ein Beispiel zu jeder Problemklasse verdeutlicht Strategie und Anwendungsmöglichkeit. Auf die Vorteile, Schwierigkeiten und Grenzen der einzelnen Verfahren ist hingewiesen.

Schrifttum

Bücher sind durch ● gekennzeichnet

[1]●*Künzi, H.P., H.G. Tzschach u. C.A. Zehnder:* Mathematische Optimierung. Stuttgart: B.G. Teubner Verlag 1967.

[2]●*Judin, D.G. u. E.G.:* Lineare Optimierung. Berlin: Akademie-Verlag 1968.

[3] *Jahns, G. u. K. Walter:* Ökonomische und technische Aspekte des Einsatzes fahrerloser Schlepper in landwirtschaftlichen Betrieben.
Landbauforschung Völkenrode Bd. 23 (1973) H. 1, S. 57/70.

[4]●*Fiacco, A.V. u. G.P. McCormick:* Nonlinear Programming. New York: John Wiley & Sons 1968.

[5] *Witte, E.:* Die Berechnung von Stabtragwerken mittels EDV dargestellt am Beispiel von Pflugrahmen.
Vortrag auf der VDI-Tagung < Landtechnik >, Braunschweig 15./16.11.1973.

[6]●*Pontrjagin, L.S.:* Mathematische Theorie optimaler Prozesse. München – Wien: R. Oldenbourg 1964.

[7]●*Bellman, E.:* Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press 1957.

[8] *Wächter, G.:* Technische Möglichkeiten zur Behandlung oder Abscheidung gasförmiger luftfremder Stoffe, insbesondere im Hinblick auf die Desodorisierung.
Grundl. Landtechnik Bd. 23 (1973) Nr. 4, S. 92/98.

Notizen aus Forschung, Lehre, Industrie und Wirtschaft

Persönliches

Dipl.-Ing. Helmut Skalweit im Ruhestand

Mit dem Ablauf des Jahres 1973 trat Dipl.-Ing. *Helmut Skalweit*, langjähriger Mitarbeiter im Institut für Schlepperforschung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft und seit 1965 Leiter der < Dokumentationsstelle Landtechnik >, in den Ruhestand.

Skalweit, am 25.12.1910 in London geboren, studierte Maschinenbau an der TH Berlin-Charlottenburg und trat nach 1 1/2 jähriger Assistentenzeit bei Prof. *Kloth* 1937 als Konstrukteur in die Fa. Hermann Raussendorf in Singwitz/Sachsen ein, wo er mit der Konstruktion von Strohpressen, Dungkranen und Rübenköpfschlitten ein vielseitiges Arbeitsgebiet fand. Nach Kriegsdienst und Gefangenschaft wurde Skalweit 1947 wissenschaftlicher Mitarbeiter beim KTL-Schlepperversuchsfeld und 1948 bei Prof. *Meyer* im Institut für Schlepperforschung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft.

Von seiner fruchtbaren Tätigkeit auf dem Arbeitsgebiet Schlepper und Gerät zeugen eine große Zahl von Aufsätzen, die sich mit der Ermittlung der Kräfte zwischen Schlepper und Gerät, mit dem Verhalten des Schleppers am Querhang und mit den Möglichkeiten zur Regelung von Anbaugeräten beschäftigen, und zahlreiche DLG-Maschinenprüfberichte über Einachsschlepper, Schlepperpflüge und Anbaugeräte. Praktische Auswirkungen dieser Arbeiten sind verschiedene Normen, insbesondere die Norm für den Dreipunktanbau von Geräten, die *Skalweit* als wissenschaftlicher Vertreter im Leitungsausschuß mitbestimmte.

Bei Begründung der < Dokumentation Landtechnik > im Rahmen der Landbaudokumentationen wurde *Skalweit* mit der Leitung dieser Dienststelle betraut und auch die < Dokumentation Landwirtschaftliches Bauwesen > eingegliedert. Unter seiner Leitung wurden dann die Dokumentationsdienste < Landtechnische Zeitschriftenschau >, < Landwirtschaftliches Bauwesen > und Titelbibliographien eingerichtet und Recherchen auf besondere Anfragen durchgeführt.

Dank seiner vielseitigen Kenntnisse, seiner großen Schaffenskraft und persönlichen Verbindungen zu Wissenschaftlern in Instituten und der Industrie konnte *Skalweit* die < Dokumentation Landtechnik > in kurzer Zeit zu einer viel in Anspruch genommenen Auskunftsstelle entwickeln.

Oberingenieur Bernhard Flerlage †

In Gottmadingen ist am 6. Mai 1974 plötzlich und unerwartet Oberingenieur *Bernhard Flerlage* gestorben. *Flerlage*, der am 3.1.1901 in Hamburg geboren wurde, studierte Maschinenbau an der TH Hannover und arbeitete bei den Continental-Gummiwerken und der Fa. Hanomag, bevor er im Jahre 1937 in die Fa. Fahr in Gottmadingen eintrat. Hier fand er als Chefkonstrukteur in der Konstruktion eines Bauernschleppers und dem Aufbau der Schlepperfertigung eine große und reizvolle Aufgabe, die er mit Erfolg löste. Er wurde zum Oberingenieur und 1951 zum Prokuristen der Fa. Fahr ernannt.
Entscheidend hat *Flerlage* auf die Entwicklung im Landmaschinen- und Schlepperbau eingewirkt durch seine intensive Mitarbeit in nationalen und internationalen Normenausschüssen. Er war insbesondere an der Erarbeitung der Norm DIN 9674, Ackerschlepper – Dreipunktanbau von Geräten, führend beteiligt und war langjähriger Vorsitzender der Expertengruppe < Straßenverkehrsrecht > im Europäischen Komitee der Verbände der Landmaschinenhersteller, CEMA.

Max-Eyth-Gedenkmünze für Prof. em. Walter Renard

Die Max-Eyth-Gesellschaft für Agrartechnik verlieh am 6.Mai 1974 "in Würdigung seiner grundlegenden Arbeiten über Konstruktion, Ausrüstung und Betrieb von Gewächshäusern und seiner unentwegten Einflußnahme auf ein schnelles Fortschreiten der Verfahrenstechnik im Gartenbau" die Max-Eyth-Gedenkmünze an Prof. Dipl.-Ing. *Walter Renard*, der bis zu seiner Emeritierung am 1. Oktober 1972 Direktor des Instituts für Technik in Gartenbau und Landwirtschaft der TU Hannover war.