

# Optimale Querschnittsformen von biegebeanspruchten Abkantprofilen

Von Ernst Witte, Braunschweig-Völkenrode<sup>1)</sup>

Bei dem Entwurf eines Biegeträgers treten im Hinblick auf den Werkstoffaufwand zwei Optimalprobleme auf: die optimale Werkstoffverteilung über den Trägerquerschnitt und die optimale Werkstoffverteilung in Trägerlängsrichtung. In der vorliegenden Arbeit wird nur das erstgenannte Problem behandelt. Die im Sinne des Leichtbaus zu fordernde optimale Anordnung der Querschnittsfläche ist besonders für Abkantprofile bedeutungsvoll, da ihre einfache Herstellung selbst bei Kleinserienfertigung die Anwendung spezieller Querschnittsformen und -abmessungen rechtfertigt. Für eine Anzahl einfacher Grundformen von Abkantprofilen werden mit Hilfe der Methode des optimalen Entwurfs für den allgemeinen Beanspruchungsfall zweiseitiger Biegung die jeweils optimalen Abmessungsverhältnisse des Querschnittes bestimmt. Dabei wird das Verhältnis Steghöhe zur Gesamtbreite des Fertigungsbandes als wesentlicher Querschnittsparameter in die Theorie des optimalen Entwurfs eingeführt. Das Ergebnis wird, von einem Fertigungsband gleicher Breite und Dicke, also von gleichbleibendem Werkstoffaufwand ausgehend, in Form dimensionsloser Koeffizienten dargeboten, die das jeweils optimale Abmessungsverhältnis angeben und Maßzahlen für die jeweilige Beanspruchung darstellen.

## Inhalt

- 1 Einleitung
- 2 Begriff und Methode des „optimalen Entwurfs“
- 3 Entwurf von biegebeanspruchten Abkantprofilen mit hinsichtlich der Werkstoffausnutzung optimalen Abmessungsverhältnissen
  - 3.1 Theoretische Voraussetzungen für die Anwendung der Methode des optimalen Entwurfs
  - 3.2 Winkelprofil
  - 3.3 Z-Profil
  - 3.4 U-, Vierkantrrohr- und Hutprofil
- 4 Schlußbetrachtung
- 5 Schrifttum

## 1 Einleitung

Es ist kennzeichnend für die Technik, daß sie seit ihren Anfängen nach höchster Ausnutzung der von der Natur zur Verfügung gestellten Mittel strebt. Die Bemühungen auf den verschiedensten Gebieten, wie Maschinen-, Fahrzeug-, Flugzeug-, Brückenbau usw., durch bessere Werkstoffausnutzung an Konstruktionsgewicht zu sparen, faßt man unter dem Begriff Leichtbau zusammen. Dabei steht in manchen Fällen der möglichst geringe Aufwand an Werkstoff, in anderen Fällen das möglichst geringe Eigengewicht der Bauteile im Vordergrund des Interesses. Insbesondere bei bewegten Teilen spielt jede Gewichtsverminderung aus naheliegenden Gründen eine sehr große Rolle.

Das wirksamste Mittel für eine optimale Werkstoffausnutzung ist die zweckmäßige Auswahl der Bauform (Leicht-Form-Bau, Leichtbau im engeren Sinne). Unter Umständen kann man auch durch die Wahl eines günstigen Werkstoffes an Gewicht sparen, etwa durch Verwendung von Holz, Leichtmetall, hochfestem Stahl usw. (Leicht-Stoff-Bau).

<sup>1)</sup> Vorgetragen auf der VDI-Tagung Landtechnik in Braunschweig am 13. Oktober 1967.

Dipl.-Ing. Ernst Witte ist wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für landtechnische Grundlagenforschung (Direktor: Prof. Dr.-Ing. W. Batel) der Forschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode.

Augenfällige Kennzeichen des Leichtbaues sind dünnwandige Konstruktionsteile und Querschnitte mit besonders günstiger Anordnung der Querschnittsflächen. Dabei spielen die aus Bandstahl kaltgewalzten oder abgekanteten Profile eine beträchtliche Rolle. Ihre einfache Herstellung gestattet selbst bei Kleinserienfertigung die Anwendung spezieller Profilformen, die den jeweils vorliegenden Verhältnissen optimal angepaßt werden können.

Das Ideal des Leichtbaues ist eine gleichmäßige Beanspruchung aller Werkstoffteilchen. Bei Biegebeanspruchung können nur die äußersten Querschnittsfasern voll ausgenutzt werden. Über den Querschnitt nimmt die Beanspruchung nach der neutralen Faser zu bis auf Null ab. Aber selbst diese hohe Beanspruchung der äußersten Faser tritt, abgesehen von dem Fall eines über die gesamte Trägerlänge konstanten Momentes, auf der Länge des Biegeträgers nur an der Stelle des größten Momentes auf, um an anderen Stellen wieder bis auf Null hin abzunehmen, Bild 1.

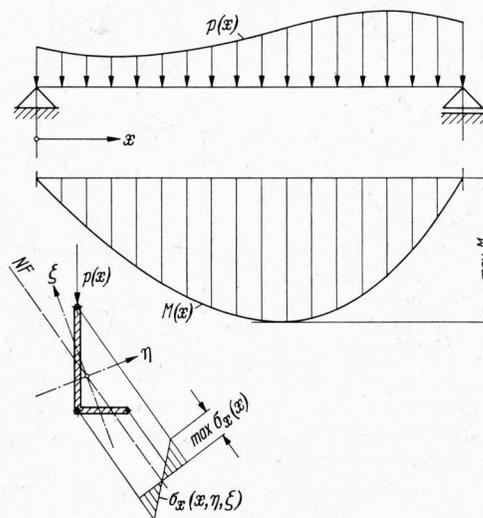


Bild 1. Ungleichmäßige Werkstoffbeanspruchung längs und quer zur Achse des Biegeträgers.

Bei dem Entwurf von Biegeträgern treten somit bezüglich der Werkstoffausnutzung zwei Optimalprobleme auf: die günstigste Anordnung der Querschnittsflächen und die günstigste Werkstoffverteilung in Trägerlängsrichtung. Im folgenden wird nur die optimale Anordnung der Querschnittsflächen behandelt.

## 2 Begriff und Methode des „optimalen Entwurfs“

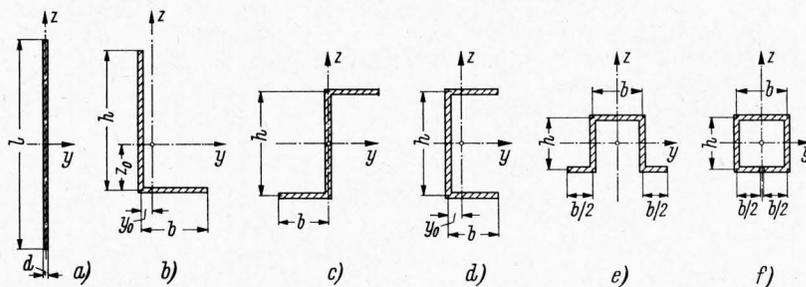
Das Entwerfen einer Konstruktion beruht auf der Auswahl bestimmter, die Konstruktion kennzeichnende Parameter, wie Form, geometrische Abmessungen, Werkstoff usw. Dabei sind die Parameter so zu wählen, daß die Konstruktion die von ihr geforderten Aufgaben in zufriedenstellendem Maße erfüllt. Außer diesen aktuellen Forderungen soll die Konstruktion aber auch noch Kriterien bezüglich der Wirtschaftlichkeit, Fertigungstechnik usw. genügen. In der Regel kann man für eine Konstruktion viele Lösungen angeben, welche die auferlegten Bedingungen erfüllen. Der Entwurfsprozeß ist also eine Synthese, deren Ergebnis eine der möglichen Konstruktionen ist. Die erste und entscheidende Aufgabe des Konstrukteurs ist es, die Form der Konstruktion festzulegen.

Beim üblichen Entwerfen einer Konstruktion geht man so vor, daß man die Parameter, z. B. die geometrischen Abmessungen, zunächst gefühlsmäßig aufgrund von Erfahrungen festlegt.

Erst danach ist es möglich, die Eignung der gewählten Parameter analytisch zu prüfen und sie gegebenenfalls so lange zu ändern, bis die Konstruktion sowohl die von ihr geforderten Aufgaben befriedigt, als auch die zusätzlichen Kriterien hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit, Fertigungstechnik usw. in angemessener Weise erfüllt. Eine auf diese Weise erhaltene Konstruktion ist in der Regel nicht schlechter oder besser als alle möglichen Alternativen. Man bezeichnet sie aus diesem Grund als eine adäquate Konstruktion.

Unter den eine Konstruktion kennzeichnenden Parametern gibt es immer einen Parameter oder auch eine Kombination von mehreren, auf die es bei der vorliegenden Aufgabe besonders ankommt. Deshalb sollte man eine Konstruktion so entwerfen, daß das Ergebnis im Hinblick auf die aktuellen Forderungen und die zusätzlichen Kriterien bezüglich dieses Parameters eine optimale Lösung bildet.

Wenn man Entwurfsmethoden anwendet, die zu einer adäquaten Lösung führen, erhält man jedoch keine eindeutige Antwort auf die Frage, ob die gewählten Parameter auch die besten aus der Gesamtheit der möglichen sind. Mit anderen Worten: man



**Bild 2.** Einfache Formen von Abkantprofilen.

- a unverformtes Fertigungsband
- b Winkelprofil
- c Z-Profil
- d U-Profil
- e Hutprofil
- f Vierkantrhrprofil

weiß nicht, ob nicht eine andere Kombination von Parametern, die auch alle gestellten aktuellen Forderungen erfüllen, vom Standpunkt des angenommenen Kriteriums, z. B. minimales Gewicht, besser wäre. Dieser Zweifel entfällt, wenn man die Methode des optimalen Entwurfes<sup>2)</sup> anwendet.

Hier werden im Gegensatz zur üblichen Entwurfsmethode nicht alle Parameter, z. B. die geometrischen Abmessungen, von vornherein festgelegt, sondern ein bestimmter Parameter oder aber auch mehrere Parameter werden als Variable in die Theorie eingeführt und so bestimmt, daß sich für das zugrunde gelegte Kriterium eine optimale Lösung ergibt. Die Theorie des optimalen Entwurfes führt mithin zu dem bekannten mathematischen Problem der Extrema von Funktionen, die bestimmte Nebenbedingungen zu erfüllen haben.

Eines der Ziele des optimalen Entwurfes ist es, ein gewünschtes Tragwerk mit einem Minimum an Materialvolumen zu erstellen. Wenn man das Tragwerk in der üblichen Weise entwirft, versucht man dieses Ziel durch die Auswahl der günstigsten Konstruktion aus verschiedenen möglichen Konstruktionen, deren Materialvolumen man nachträglich berechnet hat, zu erreichen. Wenn man im Gegensatz dazu die Theorie des optimalen Entwurfes anwendet, geht man umgekehrt vor: die als Variable in die Theorie eingegangenen Parameter werden unter Zugrundelegung des Kriteriums minimalen Volumens oder konstanten Volumens für das Maximum an Tragfähigkeit bestimmt. Das Maximum an Wirtschaftlichkeit bezüglich des Materialaufwandes ist hier im voraus sichergestellt.

### 3 Entwurf von biegebeanspruchten Abkantprofilen mit hinsichtlich der Werkstoffausnutzung optimalen Abmessungsverhältnissen

#### 3.1 Theoretische Voraussetzungen für die Anwendung der Methode des optimalen Entwurfes

Für einige einfache Grundformen von abgekanteten Profilen, Bild 2, sollen nun mit Hilfe der Methode des optimalen Entwurfes für den allgemeinen Beanspruchungsfall zweiaxiger Biegung die optimalen Abmessungsverhältnisse bestimmt werden. Abkantprofile besitzen in allen Querschnittsbereichen eine nahezu gleichbleibende Wanddicke. Für die zu untersuchenden fünf Abkantprofile in Bild 2 ist daher das Verhältnis Steghöhe  $h$

zur Gesamtbreite  $l$  des Fertigungsbandes ein maßgebender Querschnittsparameter, der als Variable in die Theorie des optimalen Entwurfes eingeht. Der noch übrigbleibende Querschnittsparameter, das Verhältnis Wanddicke  $d$  zur Gesamtbreite  $l$  des Fertigungsbandes, könnte als weitere Variable in die Theorie des optimalen Entwurfes eingeführt werden. Um die Allgemeinheit der Lösung nicht einschränken zu müssen und um das Wesentliche der Methode des optimalen Entwurfes deutlich herausstellen zu können, soll die vorliegende Aufgabe zunächst als ein einparametrisches Problem behandelt werden.

Von einem Fertigungsband gleicher Breite und Dicke, d. h. von konstantem Materialverbrauch ausgehend, ergibt sich als Optimalkriterium das Maximum an Tragfähigkeit. Dabei soll die für dauerschwingbeanspruchte Konstruktionen geltende Annahme getroffen werden, daß die Tragfähigkeit durch die am Querschnitt auftretende größte Biegespannung im elastischen Bereich begrenzt ist.

Ein ausschlaggebender Faktor, sowohl für den Entwurf im üblichen Sinne als auch für die Methode des optimalen Entwurfes, ist die Abhängigkeit der inneren Kräfte von der Form

des Tragwerkes. Im vorliegenden Fall stellt die Technische Mechanik die klassische Biegelehre [3] zur Verfügung, mit deren Hilfe ausreichend genau die Beziehung zwischen der Querschnittsform und den auftretenden Biegespannungen hergestellt werden kann. Die wesentlichen Voraussetzungen der klassischen Biegelehre sind:

1. Gültigkeit der *Bernoullischen* Hypothese vom Ebenbleiben des Querschnittes, die in Verbindung mit dem *Hookeschen* Gesetz das berühmte, zuerst von *Navier* aufgestellte Geradenliniengesetz liefert, welches besagt, daß die Spannungen proportional mit ihren Abständen von der neutralen Faser wachsen;
2. bei Beanspruchung durch Torsion dürfen keine Normalspannungen auftreten und
3. die Querschnittsgestalt muß erhalten bleiben.

Die erste Annahme ist gleichbedeutend mit der Vernachlässigung der Schubspannungen im Querschnitt. Die klassische Biegelehre beschränkt sich also auf Fälle, in denen das Biegemoment längs des Trägers unverändert ist, oder wo bei veränderlichem Moment, das immer Schubspannungen zur Folge hat, der Einfluß der letzteren vernachlässigt wird.

#### Verwendete Formelzeichen

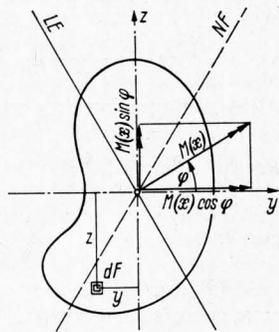
$b$	Flanschbreite des Abkantprofils
$d$	Dicke des Fertigungsbandes
$F$	Flächenelement in einer Querschnittsebene
$h$	Steghöhe des Abkantprofils
$I$	Flächenträgheitsmoment
$I_0$	Flächenträgheitsmoment des unverformten Fertigungsbandes
$k = h/l$	Verhältnis der Steghöhe zur Breite des Fertigungsbandes (Formparameter)
$K$	die statischen und geometrischen Größen des Biegeträgers kennzeichnenden dimensionslosen Koeffizienten
$l$	Breite des Fertigungsbandes
$M$	Biegemoment
$p$	Streckenlast
$W_0$	Widerstandsmoment des unverformten Fertigungsbandes
$x, y, z$	Ortskoordinaten des jeweils betrachteten Querschnittelements
$\xi, \eta$	Koordinaten der Hauptträgheitsachsen
$\sigma$	Biegespannung
$\varphi$	Neigungswinkel des Momentenvektors gegenüber der $y$ -Achse
NF	Neutrale Faser
LE	Lastebene

<sup>2)</sup> Eine zusammenfassende Darstellung, sowie zahlreiche Schrifttumhinweise findet man in [2] und [4].

Die zweite Annahme ist bei gegliederten, dünnwandigen Querschnitten erfüllt, wenn die Lastebene bei Querkraftbiegung durch den sogenannten Schubmittelpunkt geht. In diesem Fall wird der Biegeträger entsprechend den Vorstellungen der klassischen Biegelehre auf verdrehungsfreie Biegung beansprucht.

Die dritte Voraussetzung ist für Profile mit mehr als zwei Abkantungen bedeutungsvoll. Wenn Querkraftbiegung vorliegt, kann bei derartigen Profilen infolge des sich ergebenden Schubflusses die Verformung der Querschnittskontur so groß werden, daß merkbare Quermomente und Umlagerungen in der Spannungsverteilung über der Querschnittsfläche entstehen. Der Biegeträger kann dann nicht mehr mit elementaren Berechnungsmethoden behandelt werden, sondern ist als räumliches Tragwerk mit Hilfe der Elastizitätstheorie zu untersuchen. Die Bedingung, daß die Querschnittsgestalt unter der Belastung erhalten bleibt, kann als erfüllt gelten, wenn der Träger in geeigneter Weise durch Schotte oder dgl. ausgesteift wird oder wenn der dünnwandige Träger sehr lang ist, d. h., wenn das Verhältnis Trägerlänge zur größten Querschnittsabmessung sehr groß ist.

In Bild 3 ist der allgemeine Querschnitt eines Biegeträgers dargestellt. Er wird auf ein räumliches Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt und dessen  $x$ -Achse mit der Trägerlängsachse zusammenfallen, während die Richtung des in der Querschnittsebene liegenden  $y$ - und  $z$ -Achsensystems willkürlich gewählt werden kann. In der Regel wird die Wahl der Richtung jedoch durch äußere Umstände nahegelegt, z. B. so, daß die Koordinatenachsen parallel zu irgendwelchen Querschnittskanten verlaufen. Das allein angreifende Biegemoment ist durch einen freien Vektor gegeben, den man im Querschnittsschwerpunkt ansetzen kann. Wenn das Biegemoment jedoch durch Querkräfte hervorgerufen wird, muß die Lastebene durch den Schubmittelpunkt gehen, damit der Träger den Voraussetzungen entsprechend auf verdrehungsfreie Biegung beansprucht wird. Im allgemeinen Beanspruchungsfall zweiachsiger Biegung läßt sich der Momentenvektor in Komponenten zerlegen, die mit den willkürlich gewählten Koordinatenachsen zusammenfallen. Eine zweiachsige Biegebeanspruchung bedeutet im Grunde also nichts anderes, als daß der resultierende Momentenvektor in einer ganz beliebigen Ebene wirken kann.



**Bild 3.** Allgemeiner Querschnitt eines Biegeträgers bei schiefer bzw. zweiachsiger Biegung.

Die gewünschte Beziehung zwischen den inneren Kräften einerseits und der Querschnittsform und äußeren Kräften andererseits stellt für einen Biegequerschnitt gemäß Bild 3 die Gl. (1) her:

$$\sigma_x(x, y, z) = \left[ \frac{I_z z - I_{yz} y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \cos \varphi - \frac{I_y y - I_{yz} z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \sin \varphi \right] M(x) \quad (1)$$

Darin bedeuten  $\sigma_x(x, y, z)$  die Normalspannung in Trägerlängsrichtung;  $I_y$ ,  $I_z$  und  $I_{yz}$  Flächenträgheitsmomente;  $y$  und  $z$  die Ortskoordinaten des jeweils betrachteten Querschnittselementes;  $\varphi$  den Winkel, unter dem der Momentenvektor gegenüber der  $y$ -Achse geneigt ist und  $M(x)$  das angreifende Biegemoment.

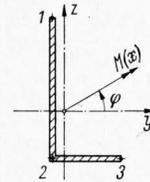
Wenn die willkürlich wählbaren Richtungen der Koordinatenachsen mit den Richtungen der sogenannten Hauptträgheitsachsen des Querschnittes zusammenfallen, wird das zentrifugale Flächenträgheitsmoment  $I_{yz}$  gleich Null und die Gl. (1) vereinfacht sich zu

$$\sigma_x(x, y, z) = \left[ \frac{z}{I_y} \cos \varphi - \frac{y}{I_z} \sin \varphi \right] M(x) \quad \dots \quad (2)$$

Für die Auffindung der Spannungsgrößtwerte ist es nützlich, die Lage der neutralen Faser zu kennen. Nachdem man die neutrale Faser in den Querschnitt eingetragen hat, kann man leicht die Punkte angeben, in denen die größten Spannungen auftreten müssen. Wenn die Querschnittskontur durch ein Polygon gegeben ist, treten die Größtwerte entweder an den End- oder Knickpunkten des Polygons auf. In dem Fall ist es am einfachsten, wenn man auf das Aufsuchen der neutralen Faser ganz verzichtet und die Spannungen von vornherein in diesen ausgezeichneten Querschnittspunkten berechnet.

### 3.2 Winkelprofil

Als nächstes werden für das Beispiel eines einfachen Winkelprofils, Bild 4, die interessierenden Querschnittsgrößen, wie Schwerpunktskoordinaten, Ortskoordinaten der ausgezeichneten Querschnittspunkte und Flächenträgheitsmomente in Abhängigkeit von dem variablen Querschnittsparameter und den geometrischen Abmessungen des Fertigungsbandes dargestellt.



**Bild 4.** Querschnitt eines Winkelprofils.

Wegen der vorausgesetzten Dünnwandigkeit der Querschnitte können bei der Bestimmung der Flächenträgheitsmomente die entsprechenden Trägheitsmomente der einzelnen Querschnittsflächen bezüglich der Profilmittellinie vernachlässigt werden. Im einzelnen erhält man die gewünschten Größen in nachstehender Form:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= (1 - k)^2 \frac{l}{2} = K_{10} \frac{l}{2} \\ z_0 &= k^2 \frac{l}{2} = K_{20} \frac{l}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.1)$$

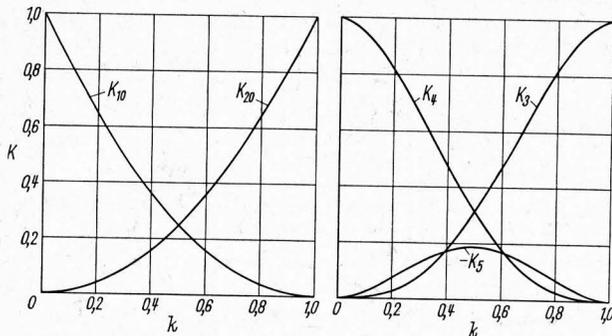
$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -y_0 = -(1 - k)^2 \frac{l}{2} = K_{11} \frac{l}{2} \\ z_1 &= h - z_0 = k(2 - k) \frac{l}{2} = K_{21} \frac{l}{2} \\ y_2 &= -y_0 = -(1 - k)^2 \frac{l}{2} = K_{12} \frac{l}{2} \\ z_2 &= -z_0 = -k^2 \frac{l}{2} = K_{22} \frac{l}{2} \\ y_3 &= b - y_0 = (1 - k^2) \frac{l}{2} = K_{13} \frac{l}{2} \\ z_3 &= -z_0 = -k^2 \frac{l}{2} = K_{23} \frac{l}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} I_y &= k^3(4 - 3k) \frac{d l^3}{12} = K_3 I_0 \\ I_z &= (1 - k)^3(1 + 3k) \frac{d l^3}{12} = K_4 I_0 \\ I_{yz} &= -3k^2(1 - k)^2 \frac{d l^3}{12} = K_5 I_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.3)$$

Dabei bedeuten  $y_0$  und  $z_0$  die Schwerpunktskoordinaten;  $y_i$  und  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Ortskoordinaten der ausgezeichneten Querschnittspunkte, in denen die Biegespannung  $\sigma_x$  berechnet werden soll;  $I_y$ ,  $I_z$  und  $I_{yz}$  Flächenträgheitsmomente;  $d$  die Dicke und  $l$  die Breite des Fertigungsbandes;  $k = h/l$  das Verhältnis Steghöhe zur Breite des Fertigungsbandes und  $I_0 = d l^3/12$  das Flächenträgheitsmoment des unverformten Fertigungsbandes.

Es zeigt sich allgemeingültig, daß für eine bestimmte Querschnittsform alle interessierenden Querschnittsgrößen durch einen dimensionslosen Koeffizienten  $K$ , der nur von dem Formparameter  $k$  abhängt und durch die geometrischen Abmessungen

des Fertigungsbandes ausgedrückt werden können. Für den betrachteten Fall des einfachen Winkelprofils sind die verschiedenen Funktionen  $K = f(k)$  durch Auswertung der Gln. (3) in **Bild 5** graphisch dargestellt.



**Bild 5.** Die dimensionslosen Koeffizienten  $K$ , die die Querschnittsgrößen eines Winkelprofils kennzeichnen, in Abhängigkeit vom Formparameter  $k$ .

Durch Einsetzen der Gln. (3) in Gl. (1) erhält man für die Biegespannung  $\sigma_x$  in einem allgemeinen Querschnittspunkt  $i$  mit den Ortskoordinaten  $y_i$  und  $z_i$  folgende allgemeingültige Beziehung:

$$\sigma_x(x, y_i, z_i) = \frac{\left[ \frac{K_4 K_{2i} - K_5 K_{1i}}{K_3 K_4 - K_5} \cos \varphi - \frac{K_3 K_{1i} - K_5 K_{2i}}{K_3 K_4 - K_5} \sin \varphi \right] M(x)}{\frac{d l^2}{6}} = \frac{K_{\sigma i} M(x)}{W_0} \quad (4.1)$$

Darin bedeutet  $W_0 = d l^2 / 6$  das Widerstandsmoment des unverformten Fertigungsbandes.

Auch hier kann man wieder einen dimensionslosen Koeffizienten  $K_{\sigma i} (i = 1, 2, 3, \dots)$  angeben, der für einen bestimmten Querschnitt, einen bestimmten Angriffswinkel  $\varphi$  des Momentenvektors und einen bestimmten Querschnittspunkt  $i$  nur noch von dem Formparameter  $k$  abhängt. Die geometrischen Abmessungen des Fertigungsbandes kommen in der Größe  $W_0$  zum Ausdruck. Von der Dünnwandigkeit des Querschnitts wird hier insofern Gebrauch gemacht, als die Normalspannungen in der Profilmittellinie repräsentativ für die Spannungen über die ganze Querschnittsdicke sein sollen.

In den drei ausgezeichneten Querschnittspunkten des betrachteten Winkelprofils erhält man für die Biegespannung durch Einsetzen von den Gln. (3) in Gl. (1) nach einigen elementaren Rechenschritten nachstehende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1} &= \left[ \frac{1+k}{2k^2} \cos \varphi - \frac{1}{2(1-k)} \sin \varphi \right] \frac{M(x)}{W_0} = K_{\sigma 1} \frac{M(x)}{W_0} \\ \sigma_{x2} &= \left[ -\frac{1}{k} \cos \varphi + \frac{1}{1-k} \sin \varphi \right] \frac{M(x)}{W_0} = K_{\sigma 2} \frac{M(x)}{W_0} \\ \sigma_{x3} &= \left[ \frac{1}{2k} \cos \varphi - \frac{2-k}{2(1-k)^2} \sin \varphi \right] \frac{M(x)}{W_0} = K_{\sigma 3} \frac{M(x)}{W_0} \end{aligned} \right\} (4.2)$$

Nach diesen vorbereitenden Maßnahmen wird jetzt das Optimalkriterium zur Herleitung einer Bestimmungsgleichung für den variablen Querschnittsparameter  $k$  herangezogen. Als optimal soll derjenige Querschnitt angesehen werden, für den sich von konstantem Materialverbrauch ausgehend, ein Maximum an Tragfähigkeit ergibt. Dabei soll die Tragfähigkeit durch die größte am Querschnitt auftretende Biegespannung im elastischen Bereich begrenzt sein. Das ist im vorliegenden Fall gleichbedeutend mit der Forderung, daß die dimensionslosen Koeffizienten  $K_{\sigma i}$  ihre kleinsten Werte annehmen sollen.

Für zwei verschiedene Angriffswinkel des Momentenvektors  $\varphi = -15^\circ$  und  $\varphi = +15^\circ$  zeigt **Bild 6** eine graphische Darstellung der Funktionen  $K_{\sigma i} = f(k)$  gemäß den Gln. (4.2). Man erkennt anhand dieser graphischen Darstellung, daß sich

im Fall eines negativen Angriffswinkels für den Momentenvektor das optimale Abmessungsverhältnis aus der nachstehenden Bedingung ergibt:

$$K_{\sigma 1} = K_{\sigma 3} \quad \text{für } \varphi \leq 0 \quad (5)$$

Wenn man für  $K_{\sigma 1}$  und  $K_{\sigma 3}$  die entsprechenden Ausdrücke der Gln. (4.2) einsetzt, erhält man nach einigen Umformungen die nachstehende algebraische Gleichung 2. Grades zur Bestimmung des optimalen Abmessungsverhältnisses  $k_{\text{opt}}$ :

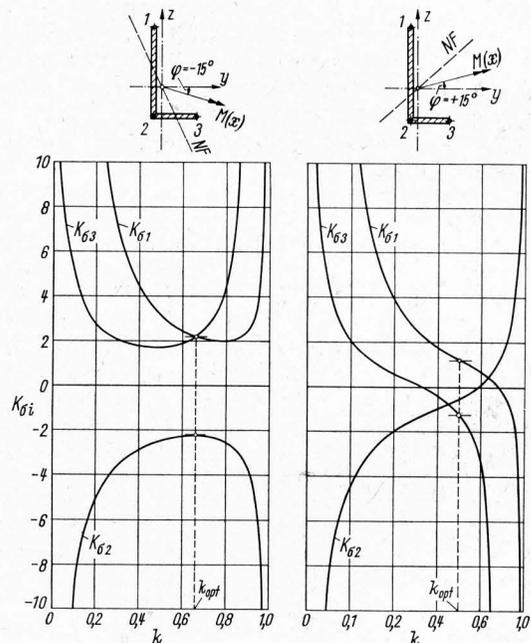
$$(1 - k_{\text{opt}})^2 + k_{\text{opt}}^2 \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad \text{für } \varphi \leq 0 \quad (6)$$

Im Fall eines positiven Angriffswinkels des Momentenvektors erhält man das optimale Abmessungsverhältnis, wie aus der graphischen Darstellung zu ersehen ist, vermittelt der Bedingung

$$K_{\sigma 1} = -K_{\sigma 3} \quad \text{für } \varphi \geq 0 \quad (7)$$

Hier erhält man durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke gemäß Gln. (4.2) und durch einige Umformungen schließlich nachstehende algebraische Gleichung 3. Grades zur Bestimmung von  $k_{\text{opt}}$ :

$$(1 + 2k_{\text{opt}})(1 - k_{\text{opt}})^2 - (3 - 2k_{\text{opt}})k_{\text{opt}}^2 \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad \text{für } \varphi \geq 0 \quad (8)$$



**Bild 6.** Die dimensionslosen Koeffizienten  $K_{\sigma i}$ , die die Biegespannungen an ausgezeichneten Querschnittspunkten eines Winkelprofils kennzeichnen, in Abhängigkeit vom Formparameter  $k$ .

Die vorstehenden Gln. (6) und (8) wurden für verschiedene Stellungswinkel  $\varphi$  des Momentenvektors ausgewertet. Durch Einsetzen der Werte für  $k_{\text{opt}}$  in die entsprechenden Ausdrücke der Gln. (4.2) wurden die bei optimalen Verhältnissen auftretenden Größtspannungen in Form des dimensionslosen Koeffizienten  $K_{\sigma \text{opt}}$  wie folgt bestimmt:

$$K_{\sigma \text{opt}} = \frac{(1 + k_{\text{opt}})}{2k_{\text{opt}}^2} \cos \varphi - \frac{1}{2(1 - k_{\text{opt}})} \sin \varphi \quad \dots (9)$$

Mit Hilfe dieser in **Bild 7** in Abhängigkeit von dem Stellungswinkel  $\varphi$  des Momentenvektors in einem Diagramm zusammengestellten dimensionslosen Formkoeffizienten  $k_{\text{opt}}$  und Spannungskoeffizienten  $K_{\sigma \text{opt}}$  kann man für ein Winkelprofil mit beliebig angreifendem Momentenvektor das optimale Abmessungsverhältnis und die dabei auftretenden größten Spannungen festlegen. Im einzelnen erhält man für die gewünschten Größen folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} h &= k_{\text{opt}} l \\ b &= (1 - k_{\text{opt}}) l \end{aligned} \right\} \dots (10.2)$$

$$\max \sigma_x = K_{\sigma \text{opt}} \frac{M(x)}{W_0} \quad \dots (10.2)$$

Zur Deutung des Ergebnisses ist in Bild 7 rechts oben und unten neben dem Diagramm noch einmal der entsprechende Querschnitt mit dem angreifenden Momentenvektor und der sich ergebenden neutralen Faser dargestellt. Im Fall eines positiven Angriffswinkels des Momentenvektors wird die neutrale Faser durch die Optimierung in eine Lage gezwungen, bei der die beiden Endpunkte des Querschnittspolygons gleichen Abstand

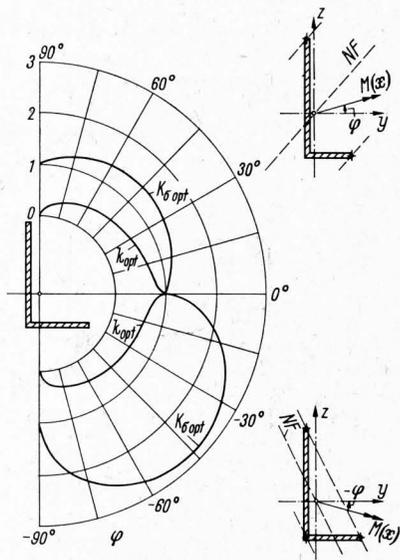


Bild 7. Winkelprofil

Durch Auswertung der Gln. (11) bis (13) für verschiedene Stellungswinkel phi des Momentenvektors wurde das in Bild 8 gezeigte Diagramm gewonnen. Oben und unten neben dem Diagramm ist wiederum der Querschnitt mit angreifendem Momentenvektor und zugehöriger neutraler Faser dargestellt.

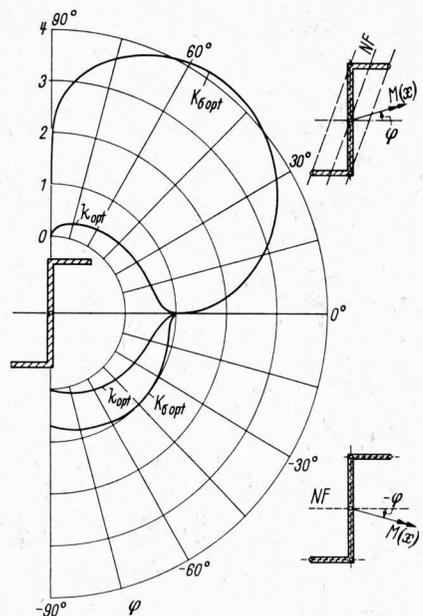


Bild 8. Z-Profil

von der neutralen Faser besitzen. Im Fall eines negativen Angriffswinkels des Momentenvektors liegen die beiden Endpunkte und der Eckpunkt in gleichem Abstand von der neutralen Faser. Ein Vergleich der dimensionslosen Koeffizienten  $K_{\sigma opt}$  als Maßzahlen für die maximale Beanspruchung zeigt, daß die Werkstoffausnutzung im ersteren Fall wegen der Querschnittsbereiche, die in weiterem Abstand von der neutralen Faser liegen, wesentlich günstiger ist als im letzteren Fall. Noch augenfälliger wird dieses Merkmal bei dem Z-förmigen Abkantprofil in Erscheinung treten. Für ausgezeichnete Lagen des Angriffswinkels des Momentenvektors,  $\varphi = -90^\circ, 0^\circ$  und  $+90^\circ$  wird  $k_{opt}$  gleich Null, d. h., das Winkelprofil degeneriert zum unverformten Fertigungsband.

**3.3 Z-Profil**

In gleicher Weise werden die übrigen, in die Untersuchung einbezogenen Abkantprofile behandelt. Für das Z-Profil ergibt sich das optimale Abmessungsverhältnis im Fall eines positiven Angriffswinkels des Momentenvektors aus der Bedingung, daß die Spannungen am End- und Knickpunkt des Querschnittspolygons gleich große Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen haben sollen. Unter Zugrundelegung der Ausdrücke für die Spannungswerte an den entsprechenden Querschnittspunkten erhält man das optimale Abmessungsverhältnis als Wurzel nachstehender Gleichung:

$$(1 - k_{opt})^2 - 2 k_{opt}^2 \operatorname{tg} \varphi = 0 \dots\dots\dots(11).$$

Wenn der Angriffswinkel des Momentenvektors negativ wird, führt die Bedingung gleich großer Spannungswerte gleichen Vorzeichens an den End- und Knickpunkten des Querschnittspolygons zu optimalen Querschnittsabmessungen. Das optimale Abmessungsverhältnis ergibt sich dann als Lösung folgender Gleichung:

$$3(1 - k_{opt})^2 + 2(3 - 2k_{opt})k_{opt} \operatorname{tg} \varphi = 0 \dots\dots(12).$$

Durch die vorstehende Optimalforderung gelangt ein großer Querschnittsbereich, d. h. der gesamte Flansch, mit weitem Abstand in eine parallele Lage zu der neutralen Faser. Aus diesem Grund ergibt sich hier eine besonders günstige Werkstoffausnutzung. Die dimensionslosen Beanspruchungskoeffizienten  $K_{\sigma opt}$  erhält man durch Einsetzen des optimalen Abmessungsverhältnisses  $k_{opt}$  in den entsprechenden Ausdruck für die Spannung zu

$$K_{\sigma opt} = \frac{4}{k_{opt}(3 + k_{opt})} \cos \varphi + \frac{6}{(1 - k_{opt})(3 + k_{opt})} \sin \varphi \quad (13).$$

**Bild 7 und 8.** Koeffizienten des Abmessungsverhältnisses ( $k_{opt}$ ) und der maximalen Biegebeanspruchung ( $K_{\sigma opt}$ ) von Abkantprofilen bei optimaler Werkstoffausnutzung.

**3.4 U-, Vierkantrohr- und Hutprofil**

Wegen der einfachsymmetrischen Querschnittsform braucht für das U-, Vierkantrohr- und Hutprofil nur der Fall eines positiven Angriffswinkels des Momentenvektors behandelt zu werden. Die Optimalbedingung ergibt sich hier aus der Forderung, daß die Biegespannung an dem unteren Ende, bzw. für das Vierkantrohrprofil an dem unteren Eckpunkt des Querschnittspolygons, zu einem Minimum werden soll. Durch Differentiation und anschließendes Nullsetzen des Ausdruckes für die Spannung an dem in Frage kommenden Querschnittspunkt erhält man die Bestimmungsgleichungen für das optimale Abmessungsverhältnis. Durch Einsetzen der so erhaltenen Werte für  $k_{opt}$  in die entsprechenden Ausdrücke für die Spannungen ergeben sich die Beanspruchungskoeffizienten  $K_{\sigma opt}$ .

Im einzelnen erhält man

für das U-Profil

$$(1 - k_{opt})^3 (1 + 3k_{opt})^2 (3 - 4k_{opt}) - 4k_{opt}^3 (3 - 2k_{opt})^2 (5 + 3k_{opt}) \operatorname{tg} \varphi = 0 \dots\dots\dots(14),$$

$$K_{\sigma opt} = \frac{1}{k_{opt}(3 - 2k_{opt})} \cos \varphi + \frac{2(1 + k_{opt})}{(1 - k_{opt})^2(1 + 3k_{opt})} \sin \varphi \dots\dots\dots(15),$$

für das Vierkantrohrprofil

$$(1 - k_{opt})^2 (1 + 2k_{opt})^2 (3 - 4k_{opt}) + k_{opt}^2 (3 - 2k_{opt})^2 (1 - 4k_{opt}) \operatorname{tg} \varphi = 0 \dots\dots\dots(16),$$

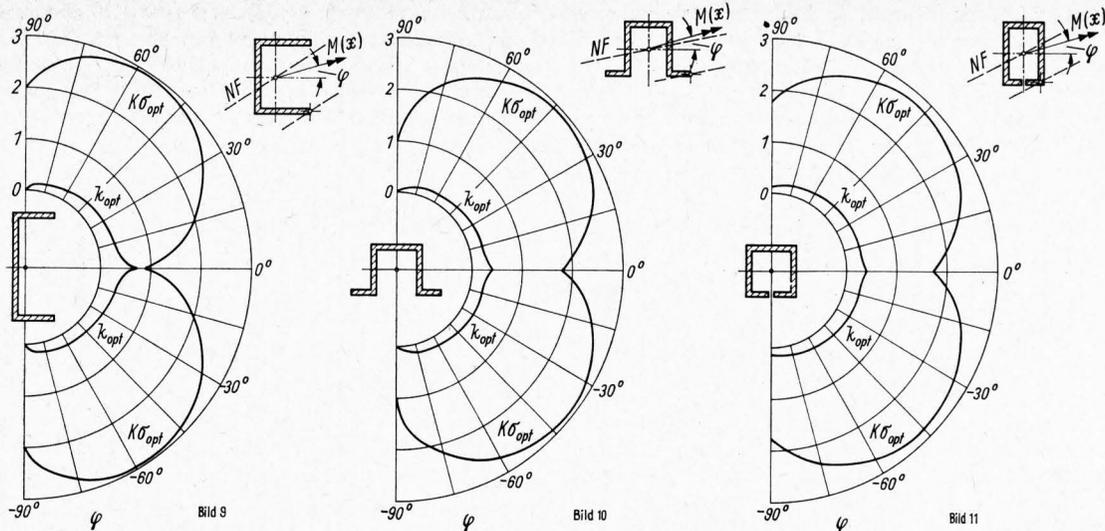
$$K_{\sigma opt} = \frac{2}{k_{opt}(3 - 2k_{opt})} \cos \varphi + \frac{2}{(1 - k_{opt})(1 + 2k_{opt})} \sin \varphi \dots\dots\dots(17)$$

und für das Hutprofil

$$(1 - k_{opt})^2 (4 - k_{opt})^2 (3 - 4k_{opt}) + 2k_{opt}^2 (3 - 2k_{opt})^2 (2k_{opt} - 5) \operatorname{tg} \varphi = 0 \dots\dots\dots(18),$$

$$K_{\sigma opt} = \frac{2}{k_{opt}(3 - 2k_{opt})} \cos \varphi + \frac{4}{(1 - k_{opt})(4 - k_{opt})} \sin \varphi \dots\dots\dots(19).$$

Die Gln. (14) bis (19) wurden ebenfalls für verschiedene Stellungswinkel phi des Momentenvektors ausgewertet. Die



Ergebnisse sind in **Bild 9 bis 11** graphisch dargestellt. Auch hier zeigen die Bilder rechts neben den Diagrammen den jeweiligen Querschnitt mit dem angreifenden Momentenvektor und der sich dabei ergebenden neutralen Faser.

**Bild 9 bis 11.** Koeffizienten der Abmessungsverhältnisse ( $k_{opt}$ ) und der maximalen Biegebeanspruchung ( $K_{\sigma_{opt}}$ ) von Abkantprofilen bei optimaler Werkstoffausnutzung.

Bild 9. U-Profil  
Bild 10. Hutprofil  
Bild 11. Vierkantrohrprofil

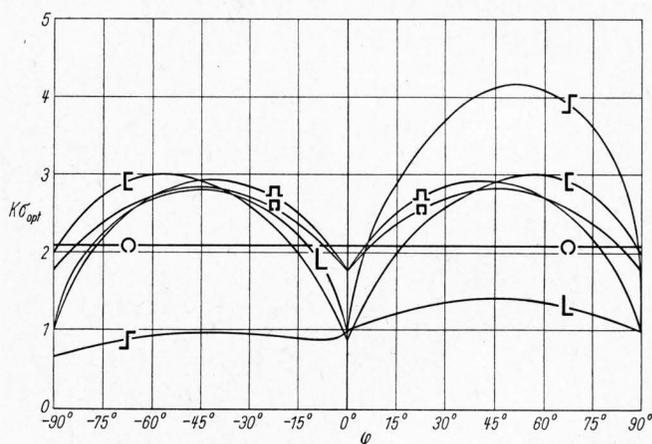
#### 4 Schlußbetrachtung

Es wurden für einige einfache Grundformen von Abkantprofilen mit Hilfe der Methode des optimalen Entwurfes für den allgemeinen Fall einer zweiachsigen Biegebeanspruchung die jeweils günstigsten Abmessungsverhältnisse des Querschnittes bestimmt. Als Ergebnis ergaben sich in Abhängigkeit vom Angriffswinkel  $\varphi$  des Momentenvektors dimensionslose Koeffizienten  $k_{opt}$  und  $K_{\sigma_{opt}}$ , die in Diagrammen dargestellt wurden. Dabei ist durch  $k_{opt}$  das optimale Abmessungsverhältnis des Querschnittes gegeben;  $K_{\sigma_{opt}}$  kann als eine Maßzahl für die jeweilig auftretende maximale Beanspruchung gelten. Mit Hilfe der Gln. (10) erhält man dann die gesuchten Abmessungen der Steghöhe  $h$  und der Flanscbreite  $b$  des Abkantprofils sowie die bei diesen Abmessungen sich für den Querschnitt ergebende größte Biegespannung  $\max \sigma_x$ .

In **Bild 12** sind zum Vergleich die Koeffizienten  $K_{\sigma_{opt}}$  der untersuchten Profilformen in Abhängigkeit von dem Stellungswinkel  $\varphi$  des Momentenvektors zusammengestellt worden. Dabei ist zu beachten, daß sich für jeden Angriffswinkel des Momentenvektors ein anderes optimales Querschnittsverhältnis ergibt, daß sich also mit Änderung des Angriffswinkels auch die Querschnittsabmessungen ändern. Außer den untersuchten Profilformen ist in **Bild 12** auch noch der Kreisquerschnitt mit in die Betrachtung einbezogen. Ein Vergleich läßt erkennen, daß insbesondere in Fällen, in denen der Angriffswinkel  $\varphi$  des Momentenvektors in einem gewissen Bereich schwankt, das dünnwandige Kreisrohr als Biegequerschnitt trotz eines Beanspruchungskoeffizienten  $K_{\sigma} = 2/3 \pi = 2,094$  vorteilhaft sein kann.

Das U-Profil ist günstig, wenn der Angriffswinkel des Momentenvektors gegenüber der waagerechten Achse gleich Null ist. Dann wird der Beanspruchungskoeffizient  $K_{\sigma_{opt}} = 8/9 = 0,889$  und das dazugehörige optimale Abmessungsverhältnis beträgt  $k_{opt} = 3/4 = 0,75$ , d. h., die Steghöhe des U-Profils beträgt dreiviertel der Gesamtbreite des Fertigungsbandes.

Den überhaupt kleinsten Wert für den Beanspruchungskoeffizienten nimmt das Z-Profil mit  $K_{\sigma_{opt}} = 2/3 = 0,667$  an, wenn der Angriffswinkel des Momentenvektors gegen  $\varphi = -90^\circ$  geht. Das zugehörige optimale Abmessungsverhältnis  $k_{opt}$  strebt aber im gleichen Maße nach Null, d. h., das Z-Profil degeneriert für die Grenzlage des Stellungswinkels  $\varphi = -90^\circ$  zum unverformten Fertigungsband. Daher hat dieses Ergebnis praktisch keine Bedeutung. Zum anderen bleibt aber der Beanspruchungskoeffizient  $K_{\sigma_{opt}}$  für den ganzen Bereich des Stellungswinkels  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = -90^\circ$  kleiner als 1, so daß das Z-Profil für diese



**Bild 12.** Koeffizienten  $K_{\sigma_{opt}}$  der maximalen Biegespannungen von Abkantprofilen mit hinsichtlich der Werkstoffausnutzung optimalen Abmessungsverhältnissen in Abhängigkeit von der Winkellage  $\varphi$  des Momentenvektors.

Lagen des Momentenvektors große Vorteile z. B. gegenüber dem U-Profil bietet, dessen Beanspruchungskoeffizient  $K_{\sigma_{opt}}$  in diesem Bereich bis auf 3 ansteigt. Das bedeutet, daß das U-Profil im ungünstigsten Fall etwa dreimal so hoch beansprucht wird wie ein entsprechendes Z-Profil.

Zum Abschluß sei noch darauf hingewiesen, daß die hier zur Anwendung gelangte Methode des optimalen Entwurfes in ähnlicher Weise auf kompliziertere Belastungsfälle von Abkantprofilen wie Biegung mit Torsion und dgl. angewandt werden kann [1].

#### 5 Schrifttum

- [1] Balovnev, G. G., und G. S. Trofimov: O racional'nykh formach sečenij tonkostennykh gnutych profilej (Rationelle Querschnittsformen dünnwandiger, abgekanteter Profile). Vestnik mašinostroenie (1959) Nr. 4, S. 3/10, russ.
- [2] Barnett, R. L.: Survey of optimum structural design. Experimental Mechanics 6 (1966) Nr. 12, S. 19A/26 A.
- [3] Szabó, I.: Einführung in die Technische Mechanik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1954.
- [4] Wasjutynski, Z., und A. Brandt: The present state knowledge in the field of optimum design of structures. Applied Mechanics Reviews 16 (1963) Nr. 5, S. 341/50.