

Bild 4. Längsdehnungs-Querdehnungs-Verhalten
a) trockener Zustand, dichte Lagerung;
b) feuchter Zustand, lockere Lagerung

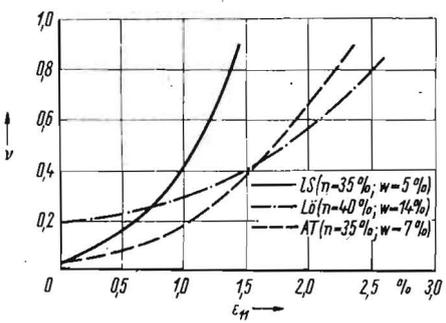


Bild 5. Querkontraktionszahlen (trockener Zustand, dichte Lagerung)

In Bild 4a sind die Längsdehnungs-Querdehnungs-Kurven der untersuchten Böden im trockenen, dicht gelagerten Zustand und im Bild 4b die Kurvenverläufe für die Böden im lockeren, feuchten Zustand dargestellt. Die aus Bild 4 ersichtliche Nichtlinearität der Kurven sagt aus, daß die Querkontraktionszahlen der Versuchsböden nicht konstant, sondern mit der Spannung bzw. Deformation veränderlich sind. Für die Versuchsböden im trockenen, dicht gelagerten Zustand sind im Bild 5 die ermittelten Querkontraktionszahlen in Abhängigkeit von der Längsdehnung dargestellt. Bei kleinen und mittleren Längsdehnungswerten schwanken die Querkontraktionszahlen zwischen 0,05 und 0,3. Kurz vor Erreichen des Bruchzustands überschreiten die Querkontraktionszahlen den Wert 0,5, was physikalisch eine Volumendilatation bedeutet.

5. Zusammenfassung

Die mathematische Beschreibung experimentell gewonnener Spannungs-Deformations-Beziehungen kann auf zwei Wegen erfolgen. Einmal werden die Versuchskurven durch mathematische Funktionen approximiert, zum anderen erfolgt eine Interpretation durch rheologische Modelle. Für die Behandlung bodenmechanischer Probleme der Landtechnik bietet das vierparametrische Modell von Murayama und Shibata gute Möglichkeiten der Annäherung gemessener Kurven und hat darüber hinaus den Vorteil der eindeutigen experimentell-rechnerischen Bestimmbarkeit seiner Parameter. Zur experimentellen Untersuchung des Spannungs-Deformations-Verhaltens wird wegen der Realisierbarkeit relativ eindeutiger Spannungs- und Deformationszustände ein- und dreiaxialen Druckversuchen der Vorzug gegeben. Erste Ergebnisse von Zylinderdruckversuchen werden mitgeteilt. Bei den Versuchen wurde weitestgehend nichtlineares Stoffverhalten nachgewiesen. Die Querkontraktionszahl ist bei den untersuchten Böden in

den meisten Fällen nicht konstant, sondern eine Funktion der Spannung bzw. Deformation.

Literatur

[1] Edel, K.-O.: Rheologische Probleme des Ackerbodens. In: Untersuchungen zur Begründung neuer Wirktechnologien zur Vollmechanisierung der Kartoffelernte. Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg, Forschungsbericht 1975 (unveröffentlicht).
[2] Murayama, S.; Shibata, T.: Flow and Stress Relaxation of Clays (Fließen und Spannungsrelaxation von Tonen). In: Kravtchenko, S.; Sirieys, P.M.: International Union on Theoretical and Applied Mechanics Rheology and Soil Mechanics, Grenoble 1964. Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer-Verlag 1966.
[3] Kezdi, A.: Handbuch der Bodenmechanik (Band III). Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1973. A 2648

Mathematische Modellierung bodenmechanischer Probleme bei Anwendung der Methode der finiten Elemente

Dozent Dr.-Ing. K. Kietzer/Dr.-Ing. P. Hemmann, Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg

- Verwendete Formelzeichen**
- a Abstand zentraler Knoten — Kontaktknoten im System Rad — Boden
 - E Elastizitätsmodul
 - r Radius des Rades
 - Ar vertikaler Radvorschub
 - u horizontale Verschiebung des Kontaktknotens
 - v vertikale Verschiebung des Kontaktknotens
 - ε₀ Anfangsdehnung
 - ν Querkontraktionszahl
 - σ₀ Anfangsspannung
 - σ̄ errechnete Spannung
 - σ̄ korrigierte Spannung
 - i Iterationsstufe

1. Einleitung

Mit der mathematischen Modellierung wird das Ziel verfolgt, die theoretischen Grundlagen und experimentellen Voraussetzungen zur Erforschung der boden- und fahrmechanischen Probleme der Pflanzenproduktion so zu ent-

wickeln, daß mit ihrer Hilfe Voraussagen zu Fragen der Bodenbearbeitung und der Befahrbarkeit des Ackerbodens möglich sind. Die Berechnungsunterlagen dienen der Analyse neuer Wirkprinzipien der Bodenbearbeitung, des Einflusses der Werkzeuge auf das Bruchverhalten und die Bruchausbreitung sowie der Beurteilung der Befahrbarkeit des Ackerbodens und der Entwicklung neuer Fahrwerksbauformen.

Die Vorzüge der mathematischen Modellierung gegenüber dem Großversuch beziehen sich auf das schnelle Ermitteln einer Variantenvielfalt und auf die Bestimmung des Spannungs- und Deformationszustands im Innern und auf dem Rande des Bodengebiets. Durch Kombination der mathematischen und realen Modellierung sind neue Erkenntnisse der bodenmechanischen Problematik zu erwarten.

Das verwendete mathematische Modell basiert auf den Voraussetzungen der Kontinuumsmechanik und stellt sich in der Form eines geschlossenen Systems gekoppelter Differentialgleichungen einschließlich einiger Nebenbedingungen zur Charakterisierung des Bruch- bzw. Fließzustands dar [1].

Eine unabdingbare Voraussetzung für die praktische Nutzung der Ergebnisse der mathematischen Modellierung sind hinreichend genaue Informationen über das stoffliche Verhalten des Bodens, die in das mathematische Modell einfließen müssen. Das Ermitteln reproduzierbarer rheologischer Bodenkennwerte wird am realen Böden mit Hilfe von Laborexperimenten in einem Speziallabor der Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg durchgeführt. Zum Lösen des mathematischen Modells wird die vielfältig angewendete Methode der finiten

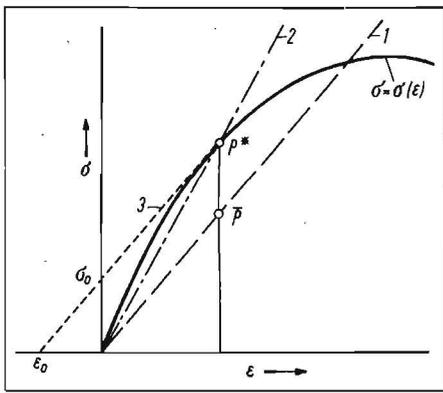


Bild 1. Darstellung der nichtlinearen Lösungsmöglichkeiten:
 1: Mittlerer E-Modul: E_0
 2: Veränderung des E-Moduls: E_1
 3: Veränderung der Anfangsdehnung bzw. -spannung: ϵ_0 bzw. σ_0

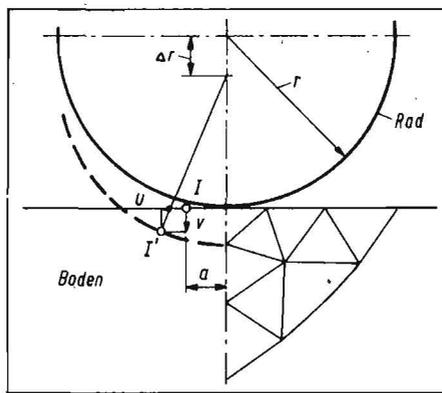


Bild 2. Darstellung der Kontaktbeziehungen zwischen Rad und Boden

Elemente [2] herangezogen, die eine numerische Methode bei Nutzung programmgesteuerter Großrechenanlagen darstellt. Die Diskretisierung des Bodengebiets in finite Elemente erfüllt die bei der Kontinuumsmechanik vorausgesetzte Kontinuität, Quasihomogenität und Quasiisotropie im integralen Sinn, so daß dem heterogenen Charakter bindiger Erdstoffe mit hinreichender Genauigkeit Rechnung getragen wird. Gleichmaßen entspricht das finite Element der Tatsache, daß sich die Deformationen ausschließlich aus den Änderungen der Luft- bzw. Wasserphase ergeben. Der automatisch ablaufende Rechenprozeß auf der EDVA liefert im Ergebnis für jedes finite Element den Tensor der Spannung, den Tensor der Deformation und für jeden Netzknoten den Vektor der Verschiebungen.

2. Standardrechenprogramm und Auswertprogramm

Bei der Erarbeitung des Rechenprogramms wurde das Ziel verfolgt, ein universell anwendbares Standardprogramm zu entwickeln, das der Vielfalt möglicher praktischer Aufgabenstellungen gerecht wird und allgemeiner Nutzung zugänglich ist. Das Standardprogramm, das auf dem Finite-Elemente-Programm ELAFIT [3] basiert, gestattet die Berechnung des Spannungs- und Deformationszustands in ebenen Systemen beliebiger Randformen, Randverschiebungen und Randbelastungen. Der Nutzer eines Standardprogramms muß die genaue Aufgabenstellung mit Elementkonfiguration, Randkontur und Belastungen rechenstechnisch aufschließen, während der Rechenprozeß bis zum Ergebnis automatisch abläuft.

Die Weiterverarbeitung der Ergebnisse des Standardprogramms erfolgt in speziellen Auswertprogrammen, die an der Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg vorliegen bzw. in Bearbeitung sind. Es handelt sich um nachstehende Probleme:

- Belastungsregime der Kontaktbeziehung zwischen Rad und Boden bei der Einwirkung eines angetriebenen und belasteten Rades auf den Ackerboden
- korrelierende Beanspruchungszustände bei Rad-Boden- und Sonde-Boden-Systemen zur Aufstellung von Befahrbarkeitsschaubildern
- Bruchentstehung und Bruchausbreitung in trockenharten Böden bei der Einwirkung von Bodenbearbeitungswerkzeugen

— Realisierung des nichtlinearen Stoffverhaltens bei feuchten, plastischen Böden.

3. Unterprogramme „Nichtlineares Stoffgesetz für plastische Bodenzustände“

Da das Grundprogramm lineare Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen voraussetzt, erfordert eine Erweiterung auf plastische Bodenzustände die Erarbeitung eines speziellen Unterprogramms.

Nach Zienkiewicz [2] gibt es folgende grundsätzliche Möglichkeiten, unter Ausnutzung des Programms für lineare Probleme auch Systeme mit nichtlinearem Materialverhalten iterativ zu lösen (Bild 1):

3.1. Methode der Anfangsdehnungen

Bei dieser Methode werden die Materialeigenschaften der finiten Elemente konstant gehalten. Das nichtlineare Verhalten wird dadurch realisiert, daß jedem Element Anfangsdehnungen ϵ_0 zugeordnet werden, die iterativ so lange variiert werden, bis im gesamten Elementebereich das nichtlineare Spannungs-Dehnungsgesetz mit hinreichender Genauigkeit erfüllt ist.

3.2. Methode der Anfangsspannungen

Gegenüber der Methode der Anfangsdehnungen besteht der einzige Unterschied, daß elementweise veränderliche Anfangsspannungen σ_0 (Vorspannungen) das nichtlineare Verhalten erzeugen.

3.3. Methode der veränderlichen Steifigkeitsmatrix

Bei dieser Methode werden jedem finiten Element andere elastische Konstanten (E, ν) zugeordnet. Diese Konstanten werden iterativ so lange variiert, bis die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Kurve genügend genau angenähert wird.

Für die Methode der veränderlichen Steifigkeitsmatrix wurde ein Unterprogramm erarbeitet, für das an einigen Testbeispielen Brauchbarkeit und Wirtschaftlichkeit nachgewiesen wurden.

Die einfach zu realisierende Iterationsvorschrift lautet für diese Methode:

$$E_{i+1} = \frac{\sigma_i}{\sigma_i'} E_i \quad (1)$$

4. Unterprogramm „Kontaktbeziehung zwischen starrem Rad und elastischem Boden“

In diesem Unterprogramm wird das vertikale Eindringen eines Rades in das Erdreich untersucht. Die Genauigkeit der mit diesem Programm ermittelten Spannungswerte kann mit den Ergebnissen der Boussinesqschen Lösungen für den elastischen Halbraum [4] verglichen werden.

Hauptproblem bei der Programmierung ist das Formulieren der veränderlichen Randbedingungen für den Boden in der Kontaktebene zwischen Rad und Boden. Diese Bedingungen werden im Programm dadurch erfüllt, daß die Radkontur schrittweise durch die Oberflächenknotenpunkte des Elementenetzes des Bodens geführt wird (Bild 2).

Die Annäherung an diese Kontaktpunkte erfolgt wieder iterativ.

Für die Berührung der Radkontur im Knotenpunkt I (Bild 2) wurde folgende Anfangsnäherung gewählt:

$$\Delta r = \frac{a^2}{2r} \quad (2)$$

Die weitere Iteration erfolgt nach der Vorschrift

$$\Delta r_{i+1} = r + v_i - [r^2 - (a - u_i)^2]^{1/2} \quad (3)$$

in der die elastischen Verschiebungen des Oberflächenpunktes infolge der Belastung berücksichtigt werden.

Unter Verwendung des Unterprogramms für ein nichtlineares Stoffgesetz (nach Abschn. 3.) können auch Untersuchungen für plastische Böden durchgeführt werden.

Die in den Ergebnissen der Rechnung ermittelten Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen lassen sich auf einfache Weise zur Berechnung von Spurtiefe, Bodenverdichtung, Rollwiderstand, Schlupf u. dgl. heranziehen, so daß es möglich ist, entsprechende Befahrbarkeitsschaubilder aufzustellen.

5. Zusammenfassung

Im Beitrag werden Ziele und Möglichkeiten einer mathematischen Modellierung boden- und fahrmechanischer Probleme dargestellt. Als vielseitig einsetzbares Lösungsverfahren bietet sich die Methode der finiten Elemente an. Ein EDV-Rechenprogramm wird vorgestellt, das es gestattet, elastische und plastische Bodenzustände zu berücksichtigen. Hauptuntersuchungsobjekte sind Bruchzustände des Bodens, die Aufstellung von Befahrbarkeitsschaubildern und die Kontaktbeziehungen zwischen Rad und Boden.

Literatur

- [1] Kietzer, K.: Anwendung der Methode der finiten Elemente zur Lösung bodenmechanischer Probleme in der Landtechnik. In: Vorträge anlässlich eines Symposiums des Wissenschaftsbereiches Mechanisierung der Landwirtschaft aus Anlaß des 75. Geburtstages von Heinrich Heyde. Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg (1978) S. 12–21.
- [2] Zienkiewicz, O.: Methode der finiten Elemente. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1975.
- [3] Kuna, M.: Programmsystem ELAFIT. Institut für Festkörperphysik und Elektronenmikroskopie der AdW der DDR. Halle 1976.
- [4] Girkmann, K.: Flächentragwerke. Wien: Springer-Verlag 1959. S. 63. A 2650