Untersuchung von Metallsilos

Von Laszlo Varga und Wilmos Thernesz, Budapest, Ungarn*)

DK 725.36:624.042

Metallsilos aus mit Rippen verstärkten gewellten Schalen sind eine anpassungsfähige und vorteilhafte Lösung für die Lagerung von Schüttgütern.
In dieser Arbeit werden Gleichungen für die Spannungsberechnung dieser mit Rippen verstärkten Konstruktionen abgeleitet. Die Richtigkeit der Berechnungsmethode wird durch Dehnungsmessungen an Metallsilos bei betriebsüblichen Bedingungen überprüft und bestätigt. Die Ergebnisse der theoretischen und praktischen Untersuchungen geben Aufschluß über das Verhalten von Schüttgut und Siloaufbau.

1. Einführung

Zur Lagerung von pulverförmigen und gekörnten Materialien sind Metallsilos vorteilhaft einzusetzen, da sie mit verschiedenen Rauminhalten rationell zu fertigen und in Anpassung an die örtlichen Bedingungen relativ schnell und einfach aufzubauen sind. Bei der Gestaltung von Silos hat der Konstrukteur die Aufgabe, eine solche Konstruktion zu entwickeln, die den beim Lagern, Füllen und Entleeren verursachten Spannungen am besten entspricht.

Die optimale Lösung ist nur zu finden, wenn vorher das Verhalten der Schüttung und die Reaktion des Silos eingehend untersucht wurden. Um die zur Planung benötigten Daten zu ermitteln, sind gründliche theoretische der Wirklichkeit entsprechende Versuche durchzuführen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Ergebnisse von Dehnungsmessungen an einem konkreten Siloaufbau angegeben. Die für diesen konkreten Fall erarbeiteten Beziehungen sind allgemeingültig und für die Konstrukteure in der Praxis sicherlich von Nutzen.

2. Silokonstruktion und Belastungen

Die maßgebende Belastung der tragenden Querschnitte wird durch die Druckverhältnisse in der Schüttung und die Mantelreibung bestimmt. Zylindrische Schalenkonstruktionen sind vorteilhaft anzuwenden zur Aufnahme von Druckbeanspruchungen; mit Rippen verstärkt, widerstehen sie den aus der Mantelreibung resultierenden Druckkräften besser. Diese Vorteile zeigt auch die Silokonstruktion nach **Bild 1**. Im Bild sind eine aus einer ringförmigen gewellten Schale bestehende mit Rippen verstärkte Silokonstruktion dargestellt und die durch die Schüttung hervorgerufenen inneren Druckkräfte.

Die Druckverhältnisse sind bekanntlich mit einer Gleichung zu beschreiben, die die Gleichgewichtsbedingungen für eine Schüttschicht der Dicke Δ_z ausdrückt [1]:

$$\frac{\Delta p_v}{\Delta z} + \frac{p_v}{z_o} = \rho_t \, g \tag{1}$$

$$z_o = \frac{d}{4 \, k \, \mu} \tag{2},$$

*) *Professor Dr.-Sc.Techn. L. Varga ist Leiter des Instituts für Maschinenkonstruktionslehre, Ass. Professor W. Thernesz Lehrstuhlleiter des Lehrstuhls für Landmaschinenkonstruktion der Technischen Universität Budapest.*

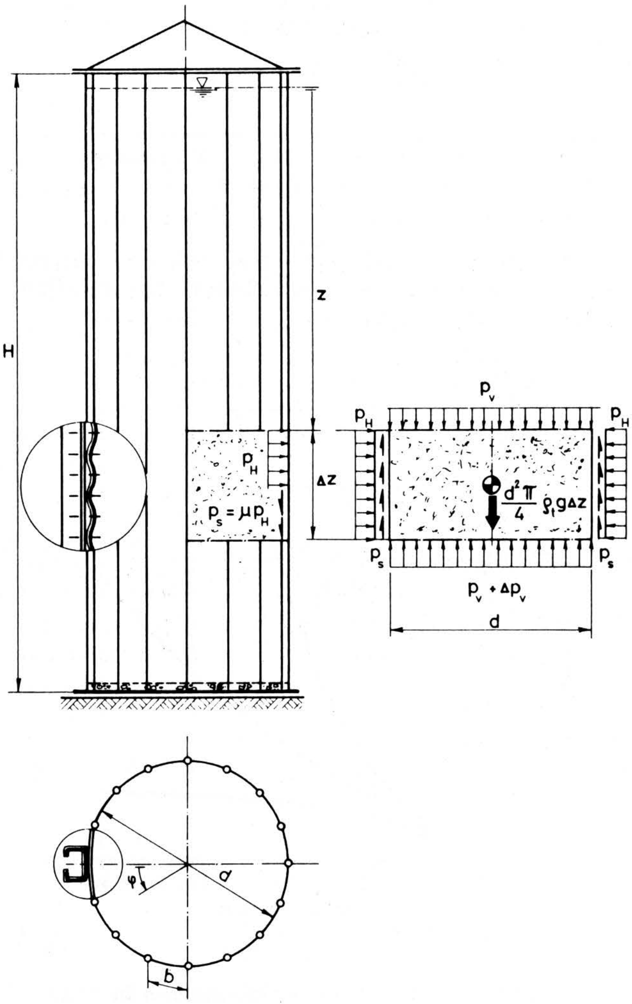

Bild 1. Schema der rippenverstärkten Silokonstruktion und Drücke in der Schüttung.

wobei gilt:

p_v senkrechter Druck

$k = \frac{p_H}{p_v}$ das Verhältnis von waagerechtem zu senkrechtem Druck

$\mu = \frac{p_s}{p_H}$ Mantelreibung, das Verhältnis zwischen Wandreibungs- und waagerechtem Druck

d Silodurchmesser

ρ_t Schüttdichte.

Angenommen k und μ (und damit auch z_o) sind von der Schütthöhe unabhängige Konstanten, und die Änderung des Druckes mit der Schütthöhe ist kontinuierlich, dann ist Gl. (1) als Differentialgleichung zu behandeln, deren Lösung bei

$z = 0, \quad p_v = 0$

$$p_v = \rho_t \, g \, z_o \, (1 - e^{-z/z_o}) \tag{3}$$

ist. Daraus folgt

$$p_H = k \, p_v = \rho_t \, g \, k \, z_o \, (1 - e^{-z/z_o}) \tag{4}$$

und

$$p_s = \mu \, p_H = \frac{\rho_t \, g \, d}{-4} (1 - e^{-z/z_o}) \tag{5}.$$

Die aus der Mantelreibung resultierende Streckenlast am Umfang der Mantelfläche wird mit Hilfe der Beziehung

$$N_z = \int_o^z p_s \, dz = \frac{\rho_t \, g \, d}{4} [z - z_o (1 - e^{-z/z_o})] \tag{6}$$

berechnet.

Bei Kenntnis des waagerechten Drucks p_v und der durch die Mantelreibung verursachten Streckenlast N_z sind die in der Konstruktion auftretenden Spannungen zu berechnen.

3. In der Konstruktion auftretende Spannungen

Zuerst werden die Spannungen untersucht, die durch die Streckenlast N_z erzeugt werden. Auf einen mit einer Rippe verstärkten Schalenabschnitt der Breite b, **Bild 2**, wirkt eine Druckkraft der Größe:

$$V_z = \frac{\rho_t \, g \, b \, d}{4} [z - z_o (1 - e^{-z/z_o})] \tag{7}.$$

Diese Belastung verursacht aufgrund der unterschiedlichen Druckfestigkeit verschieden hohe Spannungen in der Schale und der Rippe.

Die Spannungen σ_l in der Schale mit der Blechstärke δ und σ_b in der Rippe mit dem Querschnitt A_b werden aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_l \, b \, \delta + \sigma_b \, A_b = V_z \tag{8}$$

und aus der Verformungsbedingung

$$\Delta l = \Delta l_b \tag{9}$$

berechnet.

Die Formänderung der Schale läßt sich [2] unter Verwendung der Bezeichnungen in Bild 2 wie folgt angeben:

$$\Delta l = \frac{1 - \nu^2}{\sigma_l \, b \, \delta} \left[\int_o^{n_h l} \frac{(\sigma_l \, b \, \delta)^2}{E_l \, b \, \delta} dx + \int_o^{n_h l} \frac{M_x^2}{I_l \, E_l} dx \right].$$

Substituiert man die Werte $M_x = y \, \sigma_l \, b \, \delta$, $y \approx a_o \sin \frac{\pi}{l} x$, $y_l = \frac{b \, \delta^3}{12}$, so führt die Integration auf den Ausdruck:

$$\Delta l = (1 - \nu^2) \left[1 + 6 \left(\frac{a_o}{\delta}\right)^2\right] \frac{\sigma_l}{E_l} n_h \, l \, .$$

Da die Formänderung der Rippe

$$\Delta l_b = \frac{\sigma_b}{E_b} n_h \, l$$

ist, kann man σ_l unter Berücksichtigung der Verformungsbedingung Gl. (9) berechnen:

$$\sigma_l = \frac{1}{(1 - \nu^2) \left[1 + 6 \left(\frac{a_o}{\delta}\right)^2\right]} \frac{E_l}{E_b} = k_h \, \sigma_b \tag{10},$$

wobei k_h das Steifigkeitsverhältnis von Rippe und Schale ist.

Die gesuchten Spannungen ergeben sich aus der Lösung der Gln. (8) und (10):

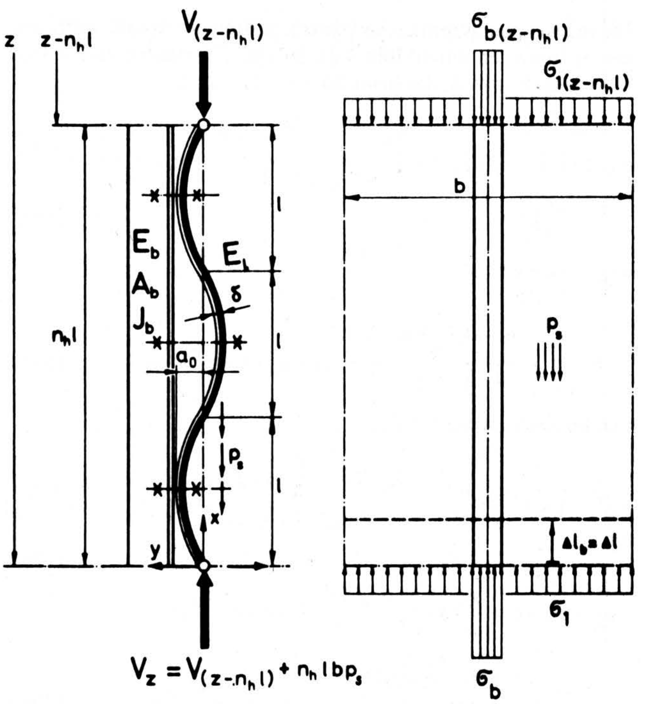

Bild 2. Ausschnitt aus dem Silomantel zur Darstellung der verwendeten Bezeichnungen.

$$\sigma_b = \frac{V_z}{A_b + k_h \, b \, \delta} = - \frac{\rho_t \, g \, b \, d}{4 (A_b + k_h \, b \, \sigma)} [z - z_o (1 - e^{-z/z_o})] \tag{11},$$

$$\sigma_l = \frac{k_h \, V_z}{A_b + k_h \, b \, \delta} = - \frac{k_h \, \rho_t \, g \, b \, d}{4 (A_b + k_h \, b \, \delta)} [z - z_o (1 - e^{-z/z_o})] \tag{12}.$$

Die so berechneten Druckspannungen sind nichts anderes, als in der Schale in Längsrichtung hervorgerufene Membranspannungen. Da die gewellte Schale auch einem Biegemoment

$$M_x = \sigma_l \, b \, \delta \, a_o \sin \frac{\pi}{l} x \tag{13}$$

unterliegt, werden in den Randfasern Biegespannungen von der Größe

$$\sigma_{lh} = \pm \frac{6 \, M_x}{b \, \delta^2} = \pm 6 \, \sigma_l \frac{a_o}{\delta} \sin \frac{\pi}{l} x \tag{14}$$

erzeugt. Die resultierende Spannung ist damit

$$\sigma_{lR} = \sigma_l + \sigma_{lh} = \sigma_l \left(1 \pm 6 \frac{a_o}{\delta} \sin \frac{\pi}{l} x\right) \tag{15}.$$

Die durch den waagerechten Druck verursachten Spannungen in Umfangsrichtung ergeben sich einfach aus der Kesselformel (bei $l/i \approx l$) zu:

$$\sigma_2 = \frac{p_H \, d}{2 \, \delta} = \frac{\rho_t \, g \, k \, d \, z_o}{2 \, \delta} (1 - e^{-z/z_o}) \tag{16}.$$

Die in Umfangsrichtung wirkenden Biegespannungen haben nach [3] die Größe

$$\sigma_{2h} = \nu \, \sigma_{lh} \, .$$

Die resultierende Spannung in den Randfasern kann wie folgt berechnet werden:

$$\sigma_{2R} = \sigma_2 + \sigma_{2h} = \frac{\rho_t \, g \, k \, d \, z_o}{2 \, \delta} (1 - e^{-z/z_o}) \pm 6 \, \nu \, \sigma_l \frac{a_o}{\delta} \sin \frac{\pi}{l} x \tag{17}.$$

Die in zwei charakteristischen Querschnitten der Schale auftretenden Spannungen sind in **Bild 3** dargestellt. Die resultierenden Spannungen im Punkt A, das heißt für x = - l/2, sind

$$\sigma_{1R} = \left(1 + 6\,\frac{a_o}{\delta}\right)\sigma_1 = -\,\frac{k_h\left(1 + 6\,\frac{a_o}{\delta}\right)\rho_t\, g\, b\, d}{4\,(A_b + k_h\, b\, \delta)}\left[z - z_o\left(1 - e^{-z/z_o}\right)\right] \qquad (18a),$$

$$\sigma_{2R} = \sigma_2 + 6\,\nu\,\frac{a_o}{\delta}\,\sigma_1 = \frac{\rho_t\, g\, k\, d\, z_o}{2\,\delta}\left(1 - e^{-z/z_o}\right) - \frac{6\,\nu\, k_h\,\frac{a_o}{\delta}\,\rho_t\, g\, b\, d}{4\,(A_b + k_h\, b\, \delta)}\left[z - z_o\left(1 - e^{-z/z_o}\right)\right] \qquad (18b)$$

und im Punkt B, für x = l/2:

$$\sigma_{1R} = \left(1 - 6\,\frac{a_o}{\delta}\right)\sigma_1 = -\,\frac{k_h\left(1 - 6\,\frac{a_o}{\delta}\right)\rho_t\, g\, b\, d}{4\,(A_b + k_h\, b\, \delta)}\left[z - z_o\left(1 - e^{-z/z_o}\right)\right] \qquad (19a),$$

$$\sigma_{2R} = \sigma_2 - 6\,\nu\,\frac{a_o}{\delta}\,\sigma_1 = \frac{\rho_t\, g\, k\, d\, z_o}{2\,\delta}\left(1 - e^{-z/z_o}\right) + \frac{6\,\nu\, k_h\,\frac{a_o}{\delta}\,\rho_t\, g\, b\, d}{4\,(A_b + k_h\, b\, \delta)}\left[z - z_o\left(1 - e^{-z/z_o}\right)\right] \qquad (19b).$$

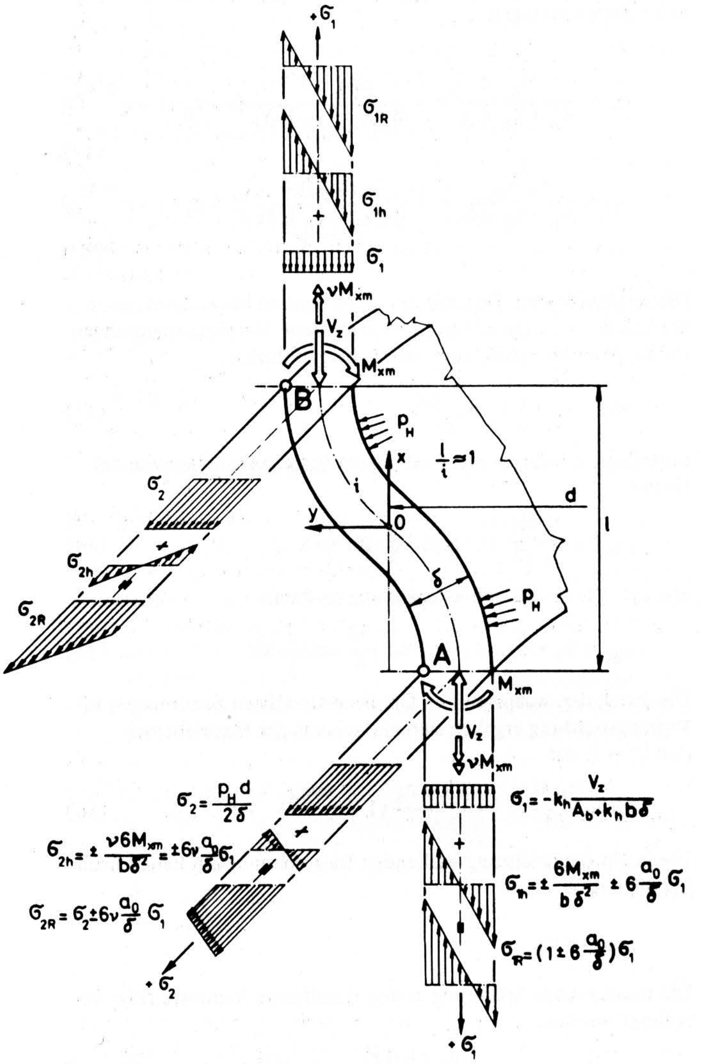

Bild 3. An der gewellten Schale wirksame Belastungen und dadurch hervorgerufene Spannungen.

3. Versuche und Ergebnisse

Zur Untersuchung des Verhaltens der Schüttung und der im Silo hervorgerufenen Spannungen wurden Dehnungsmessungen durchgeführt. Die Versuche haben unter Betriebsbedingungen während des Füllens stattgefunden.

Charakteristische Daten des Silos:

Material	St 37.2
Höhe	H = 19410 mm
Durchmesser	d = 6260 mm
Dicke der Schale	δ = 2,5 mm
weitere Merkmale	

der gewellten Schale $a_o/\delta \approx 1$; $k_h \approx 0{,}157$; $l \approx 60$ mm.

Die Mantelfläche wurde mit 28 Rippen mit einer Querschnittsfläche $A_b = 1104\ mm^2$ in Abständen von b = 702 mm verstärkt.
Der Silo wurde mit nassem zerknicktem Mais mit einer Dichte von $\rho_t = 900\ kg/m^3$ beschickt. Die Befüllung wurde zentral und kontinuierlich vorgenommen, die Oberfläche mit Hilfe einer Fräse waagerecht gehalten.
Gemessen wurde die Dehnung, wozu Dehnungsmeßstreifen an der Außenfläche des Silomantels und an Rippen angebracht waren.
Die Anordnung der Meßstellen ist aus **Bild 4** ersichtlich.
An den Meßstellen wurden bei verschiedenen Schüttungshöhen die Dehnungen registriert, nach Mittelwertbildung das Hookesche Gesetz angewandt und die Spannungen σ_b, σ_{1R}, σ_2 berechnet.

Die Membranspannung σ_2 wurde als Mittelwert der resultierenden Spannungen im Punkt A und B bestimmt. Das Verhalten charakteristischer Werte der Konstruktion ist in **Tafel 1** und **Bild 5 bis 7** dargestellt.

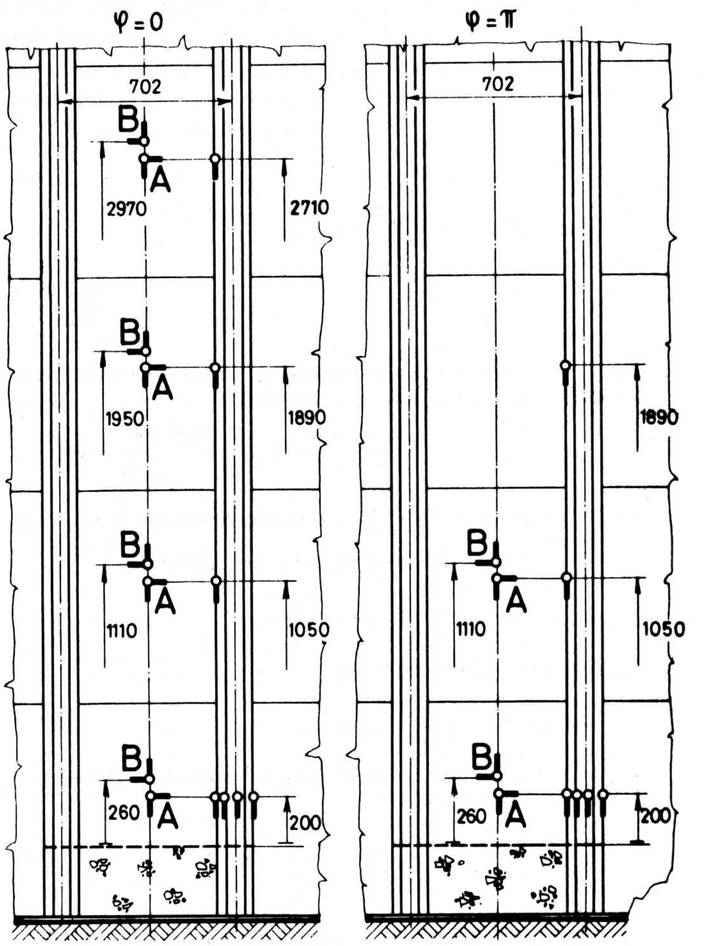

Bild 4. Anordnung der Meßstellen für die Dehnungsmessung.

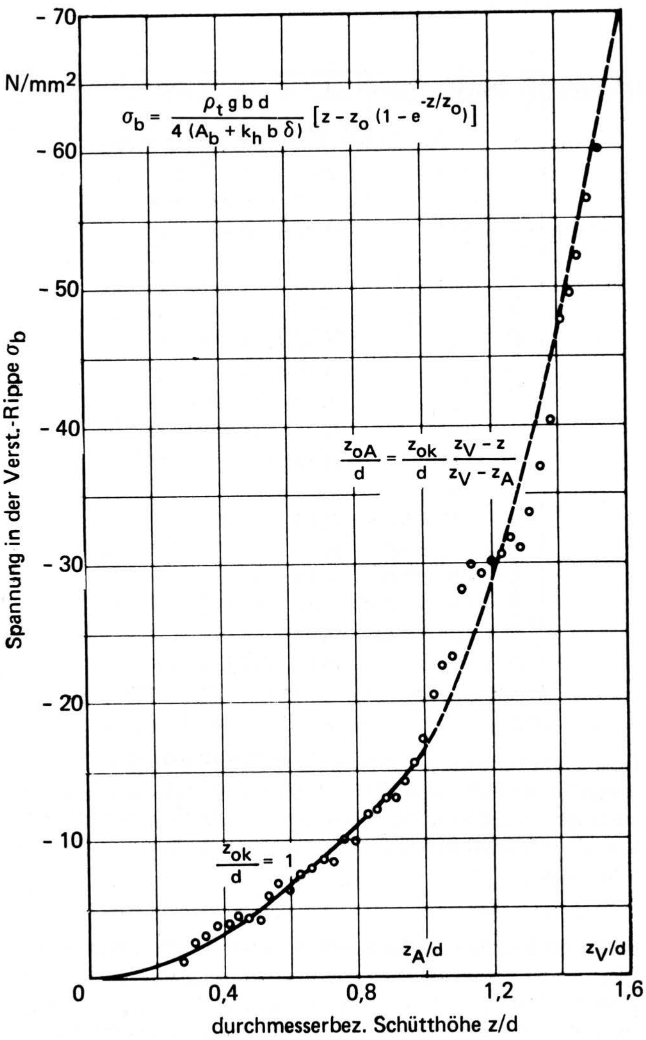

Bild 5. Spannungen in den Versteifungsrippen in Abhängigkeit von der auf den Silodurchmesser bezogenen Höhe der Schüttung.

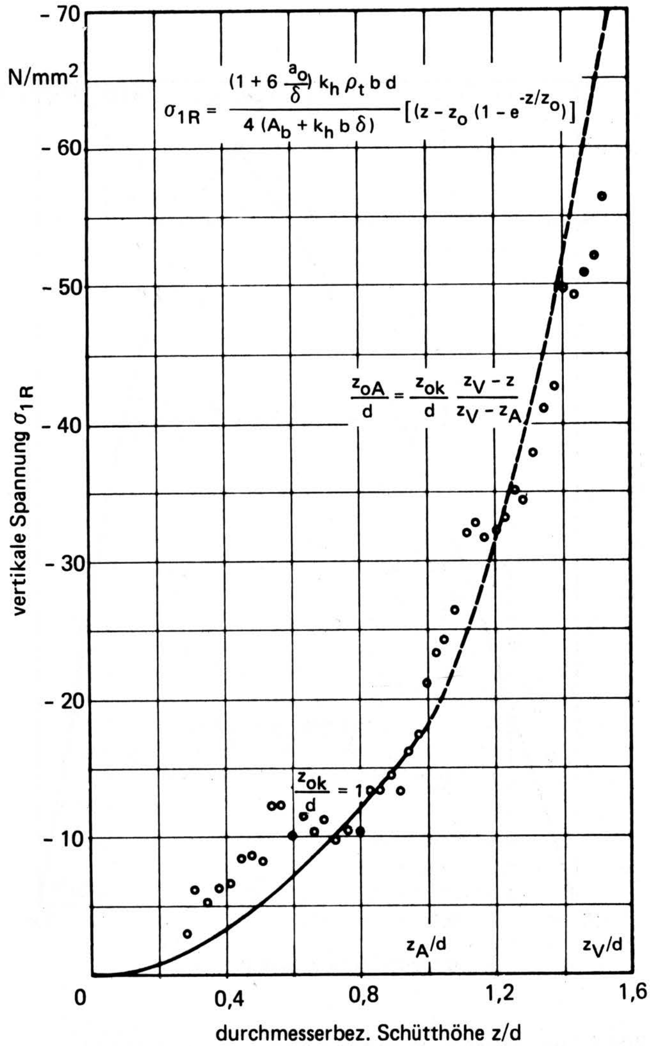

Bild 6. Vertikale Spannungen in der Randfaser der gewellten Schale in Abhängigkeit von der auf den Silodurchmesser bezogenen Höhe der Schüttung.

z/d	σ_b N/mm²	σ_{1R} N/mm²	σ_2 N/mm²	z/d	σ_b N/mm²	σ_{1R} N/mm²	σ_2 N/mm²
0,022			2,26	0,828	- 11,85	- 13,24	19,10
0,053			3,46	0,856	- 12,16	- 13,28	20,72
0,084			4,35	0,888	- 13,08	- 14,42	21,12
0,118			5,74	0,916	- 12,98	- 13,18	23,07
0,150			6,41	0,946	- 14,21	- 16,08	23,38
0,183			7,68	0,973	- 15,55	- 17,30	23,56
0,214			8,93	1,002	- 17,20	- 20,94	22,18
0,245			9,35	1,032	- 20,50	- 23,23	21,83
0,281	- 1,24	- 2,96	8,39	1,058	- 22,54	- 24,26	21,27
0,311	- 2,68	- 6,15	7,23	1,088	- 23,22	- 26,41	19,88
0,346	- 3,09	- 5,24	8,94	1,117	- 28,12	- 32,02	17,55
0,379	- 3,91	- 6,26	8,91	1,145	- 28,94	- 32,74	17,08
0,411	- 4,02	- 6,67	9,70	1,175	- 29,25	- 31,71	18,14
0,443	- 4,53	- 8,44	9,74	1,204	- 30,18	- 32,28	18,60
0,476	- 4,32	- 8,71	10,34	1,235	- 30,59	- 33,07	19,91
0,505	- 3,91	- 8,23	11,46	1,262	- 31,83	- 35,11	19,92
0,533	- 5,97	- 12,25	8,96	1,291	- 31,11	- 34,24	21,59
0,566	- 6,80	- 12,37	9,69	1,322	- 33,68	- 37,77	20,65
0,597	- 6,28	- 9,93	12,20	1,351	- 36,98	- 41,00	18,45
0,631	- 7,62	- 11,47	12,63	1,380	- 40,38	- 42,55	17,81
0,664	- 7,93	- 10,47	14,24	1,410	- 47,69	- 49,72	10,72
0,696	- 8,55	- 11,31	15,13	1,440	- 49,54	- 49,25	10,05
0,727	- 8,45	- 9,74	17,70	1,467	- 52,22	- 50,81	8,10
0,762	- 10,09	- 10,49	18,50	1,497	- 56,44	- 52,05	5,55
0,793	- 9,79	- 10,31	20,21	1,523	- 60,15	- 56,24	2,93

Aus den Bildern ist ersichtlich, daß die Spannungen in Abhängigkeit von der Höhe der Schüttung z/d bedeutende Veränderungen aufweisen, d.h. daß in der Nähe der Schüttungshöhe z_A, für $z \approx d$, in den Spannungen ein Knick auftritt, weiterhin daß nach dem Erreichen der Höhe z_v, für $z \approx 1{,}6$ d, das eingefüllte Material sich beinah vollständig an dem Mantel und den Rippen abstützt.

Diese Erscheinungen sind durch die während des Füllens periodisch auftretende Verdichtung und Gewölbebildung zu erklären. Es ist sicherlich erwähnenswert, daß die Schüttdichte im Labor in Abhängigkeit vom Maß der Verdichtung Werte im Bereich von 590 bis 760 kg/m³ erreichte, im Silo aber 900 kg/m³ gemessen wurden.

4. Feststellungen und Schlußfolgerungen

Aufgrund der Ergebnisse der Dehnungsmessungen ist festzustellen, daß der Koeffizient $z_o = d/4\,k\,\mu$, der die Spannungsverhältnisse bestimmt, eine von der Höhe der Schüttung abhängige sich periodisch ändernde Größe ist. Das heißt, daß die Berechnungsgleichungen, die zunächst unter der Annahme z_o = const. aufgestellt wurden, verändert werden müssen.

Tafel 1. Aus Dehnungsmessungen berechnete Spannungen in der Versteifungsrippe (σ_b) und vertikale (σ_{1R}) und in Umfangsrichtung wirkende Spannungen (σ_2) in der gewellten Schale in Abhängigkeit von der auf den Silodurchmesser bezogenen Höhe der Schüttung (z/d).

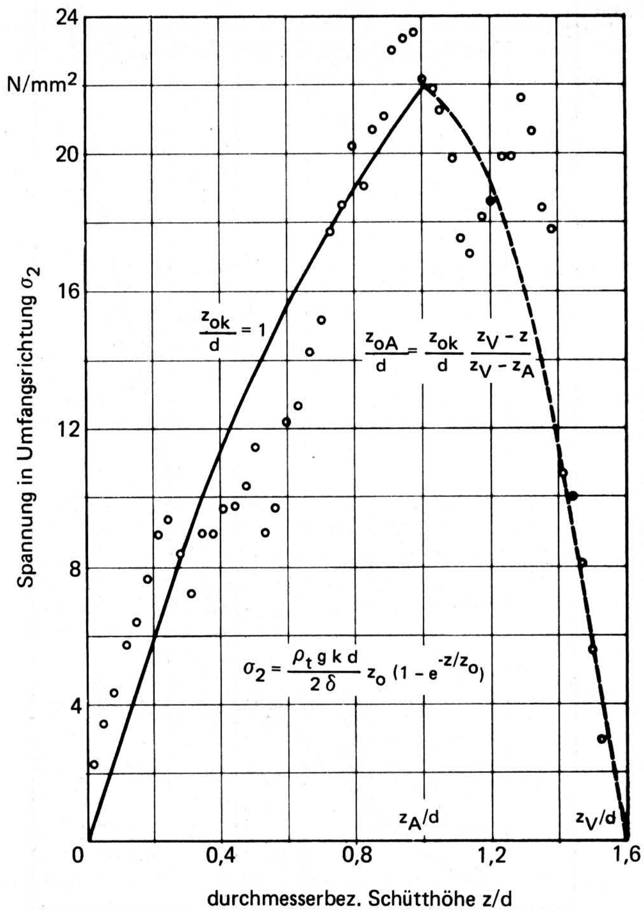

Bild 7. Spannungen in der gewellten Schale in Umfangsrichtung in Abhängigkeit von der auf den Silodurchmesser bezogenen Höhe der Schüttung.

Wenn wir die Spannung innerhalb der Schüttung und im Silo untersuchen, können wir in Abhängigkeit von der Höhe der Schüttung drei charakteristische Zustände feststellen.

Der Anfangszustand liegt, entsprechend den Messungen, im Bereich der Schüttungshöhe $0 < z \leqslant z_A$; hier ist die Annahme $z_o \equiv z_{ok} \approx$ const. gültig.

Im Bereich $z_A < z \leqslant z_V$ liegt der Übergangszustand, hier ist die Annahme z_o = const. nur für diskrete Abschnitte gültig, in dem ganzen Bereich kann man die Veränderungen von z_o mit Hilfe folgender Funktion beschreiben:

$$z_o \equiv z_{oA} \approx z_{ok} \frac{z_V - z}{z_V - z_A} .$$

Der Endzustand tritt im Bereich $z > z_V$ auf, wobei die Näherung $z_o \equiv z_{oV} \approx 0$ zulässig ist.

Entsprechend den vorangegangenen Ausführungen wurde festgestellt, daß jeder beliebige Querschnitt des Silos sich im Verlaufe des Füllens nacheinander im Anfangs-, Übergangs- bzw. Endzustand befinden kann, abhängig von der Höhe der Schüttung. Diese Betrachtungsweise des Befüllvorganges und die Reaktion der Silokonstruktion ermöglicht die Verwendung der abgeleiteten Beziehungen für die Bestimmung der Spannungen und der Druckkräfte im Silo, wenn die jeweils gültigen Werte von z_o angesetzt werden. Auf diese Weise wurden für den untersuchten Fall die Spannungen σ_b, σ_{lR} und σ_2 aus den Gln. (11), (15) und (16) berechnet mit Hilfe des Koeffizienten k = 0,5 (Verhältnis von senkrechten zu waagerechten Spannungen) – bzw. unter Verwendung der Meßergebnisse z.B. aus Bild 5, wo die Größen $z_{ok}/d = 1$, $z_A/d = 1$ und $z_V/d = 1{,}6$ abgelesen werden können. Es ergibt sich aus den Werten $z_{ok}/d = 1$, und k = 0,5 für den Anfangszustand eine Mantelreibung von der Größe $\mu = 0{,}5$.

	z/d	z_o/d	σ_b N/mm²	σ_{1R} N/mm²	σ_2 N/mm²
Anfangszustand	0		0	0	0
	0,1		- 0,21	- 0,23	3,29
	0,2		- 0,82	- 0,90	6,27
	0,3		- 1,79	- 1,97	8,97
	0,4		- 3,09	- 3,39	11,41
	0,5	1,0	- 4,69	- 5,15	13,61
	0,6		- 6,55	- 7,20	15,61
	0,7		- 8,65	- 9,50	17,42
	0,8		- 10,97	- 12,05	19,05
	0,9		- 13,49	- 14,82	20,53
	1,0		- 16,19	- 17,79	21,87
Übergangszustand	1,1	0,8333	- 21,53	- 23,66	21,13
	1,2	0,6667	- 28,32	- 31,12	19,25
	1,3	0,5000	- 36,85	- 40,49	16,01
	1,4	0,3333	- 47,17	- 51,83	11,36
	1,5	0,1666	- 58,69	- 64,45	5,76
	1,6	0	- 70,42	- 77,38	0

Tafel 2. Mit Hilfe der abgeleiteten Gleichungen berechnete Spannungen in der Versteifungsrippe (σ_b) sowie vertikale (σ_{1R}) und in Umfangsrichtung wirkende Spannungen (σ_2) in der gewellten Schale als Funktion der auf den Silodurchmesser bezogenen Höhe der Schüttung.

Die berechneten Spannungen sind in **Tafel 2** zusammengefaßt und in den Bildern 5 bis 7 als Kurvenzüge dargestellt. Beim Vergleich der berechneten Werte mit den Meßergebnissen läßt sich feststellen, daß die Berechnungsmethode eine zuverlässige Näherung ergibt.

Anhand der aufgeführten Ergebnisse von Messung und Berechnung kann man behaupten, daß die entwickelten Gleichungen zur Berechnung der Spannungen im Silo und die Annahmen zum Verhalten der Schüttung allgemein gültig sind und in ähnlichen Fällen für die Konstruktion von Silos eine zuverlässige Methode bieten.

Schrifttum

Bücher sind durch ● gekennzeichnet

[1] *Janssen, H.:* Versuche über Getreidedruck in Silozellen. Z. VDI Bd. 39 (1895) Nr. 39, S. 1045/49.

[2] ●*Love, H.:* The mathematical theory of elasticity. Oxford: Univ. Press 1952.

[3] ●*Timoshenko, S.:* Theory of plates and shells. New York: McGraw Hill 1959.