

Boundary Element Methode - ein neuartiges Berechnungsverfahren für Bauelemente auch des Landmaschinenbaus

Von Walter Möhrmann und Dieter Radaj, Stuttgart*)

Professor Dr.-Ing. Wilhelm Batel zum 60. Geburtstag

DK 539.4:539.4.001.2

Dargestellt wird ein neuartiges allgemeines Berechnungsverfahren für Kerb- und Reißspannungsprobleme, das zur Lösung von Problemstellungen der industriellen Praxis, wie Ermüdungsfestigkeit, statische Steifigkeit, Form- und Leichtbauoptimierung sowie Wärmeleitung und Schallabstrahlung geeignet erscheint. Die elastizitätstheoretischen Grundlagen des Verfahrens sowie die numerische und software-technische Realisierung (Berechnungssystem BETSY) werden gezeigt. Als Anwendungsbeispiele aus dem Fahrzeugbau werden die Fußbeanspruchung eines Zahnrades, die Steifigkeit eines Gummielements und die Kerbspannung eines Achsschenkels berechnet. Abschließend wird die Leistungsfähigkeit der BEM allgemein diskutiert.

Inhalt

1. Einführung
2. Historie der Festigkeitsbestimmung im Landmaschinenbau
3. Methodische Grundlagen der BEM und zugehörige Systeme
 - 3.1 Theoretische Anwendung der BEM in der Elastizitätstheorie
 - 3.2 Numerische Realisierung
 - 3.3 Das Programmsystem BETSY
4. Anwendungsbeispiele aus dem Fahrzeugbau
 - 4.1 Fußbeanspruchung eines Zahnrades
 - 4.2 Steifigkeit eines Gummielements
 - 4.3 Kerbspannung eines Achsschenkels
5. Leistungsfähigkeit des BEM

1. Einführung

Die Boundary-Element-Methode (BEM) [1 bis 5] ist in den zurückliegenden Jahren bis zur industriellen Einsatzfähigkeit über öffentlich oder halböffentlich zugängliche Codes (z.B. BETSY [6 bis 9], BEASY [10]) weiterentwickelt worden. Sie stellt damit in bestimmten Anwendungsfällen eine Alternative zur Finite-Element-Methode (FEM) [11 bis 13] dar, deren erste allgemein zugängliche Codes vor etwa 20 Jahren entstanden sind und die zwischenzeitlich zum unverzichtbaren Bestandteil industrieller Produktentwicklung geworden ist. Die BEM hatte nicht die günstigen Startbedingungen, die am Anfang der FEM standen. Seinerzeit waren die Berechnungsmöglichkeiten insgesamt äußerst beschränkt,

und mit dem Aufkommen der FEM in Verbindung mit den ersten Großrechenanlagen ergaben sich revolutionierend neue Möglichkeiten. Die BEM muß heute überwiegend in direkter Konkurrenz zur FEM antreten, was die Einführung naturgemäß hemmt, andererseits aber zu besonderen Leistungen anspornt. Ihr erstes breiteres industrielles Anwendungsgebiet hat die BEM bei elastischen Kerb- und Reißspannungsproblemen gefunden (Kerbfaktor bzw. Spannungsintensitätsfaktor), z.B. Zahnräder, Kerbstäbe, Achsschenkel, Flansche, Schrauben.

2. Historie der Festigkeitsbestimmung im Landmaschinenbau

Zur Einschätzung des Stellenwertes des neuen Berechnungsverfahrens erscheint ein kurzer Rückblick auf die Festigkeitsbestimmung im Landmaschinenbau insgesamt nützlich. Da Landmaschinen einer bis in neueste Zeit wirksamen dörflich-handwerklichen Tradition entstammen, hatten empirisch entwickelte Verfahrensweisen lange große Bedeutung. Was handwerkliches Können und Erfindergeist zustandebrachte, wurde gebaut und beim Kunden erprobt. Was nicht hielt, wurde verstärkt, wodurch aber dann vielfach Folgeprobleme auftraten. Vorausschauende Erfahrung und "Gefühl" des Konstrukteurs halfen Festigkeitsprobleme zu vermeiden. Landmaschinenbau war eine Kunst.

Die durch *W. Kloth* begründete wissenschaftliche Behandlung von Festigkeitsproblemen im Landmaschinenbau beginnt um 1935 mit der Messung der Lastkollektive zwischen Traktor und gezogenem Gerät [14] sowie mit der Messung der örtlichen Spannungsverteilung im Bauteil mittels Reißlack und aufgesetzten Dehnungsgebern im statischen Vergleichsversuch [15]. Ein Ermüdungsversuch bei periodischer Vergleichslast schloß die Verfahrensweise ab. Auf diesem Wege konnten Regeln für Gestaltung tragender Landmaschinenteile, besonders für Profilkonstruktionen aufgestellt werden [16, 17]. Diese Regeln hatten auch für Baumaschinen sowie für den Fahrzeugbau insgesamt Bedeutung und wirkten befruchtend in diesen Bereichen.

Hinsichtlich des heutigen Standes der Technologie zur Festigkeitsbestimmung im Landmaschinenbau kann davon ausgegangen werden, daß die auf industrieller Basis arbeitenden Landmaschinenfirmen die modernen Möglichkeiten der vorbeugenden Festigkeitsanalyse, insbesondere Finite-Element-Berechnung und Betriebsfestigkeitsversuche auf computergesteuerten Simulationsanlagen in gleicher Weise nutzen wie der allgemeine Fahrzeugbau. Für Spitzentechnologie, die die Möglichkeiten der Einzelfirma übersteigt, bieten sich externe Service-Unternehmen an, hinsichtlich der Finite-Element-Berechnung zum Beispiel Rechenzentren mit Ingenieurberatung.

Beim Einsatz der Finite-Element-Methode stehen im allgemeinen Fahrzeug- und Triebwerksbau folgende Problembereiche im Vordergrund: Ermüdungsfestigkeit, statische und dynamische Steifigkeit, Form- und Leichtbauoptimierung, Wärmeleitung, Schallabstrahlung. Dieser Stand des Verfahrenseinsatzes dürfte in etwa auch für den Landmaschinenbau gelten. Ihm soll nunmehr der derzeitige und für die Zukunft erhoffte Einsatz der BEM zur Seite gestellt werden.

*) *Dr. rer. nat. W. Möhrmann ist Fachreferent im Bereich "Forschung und Entwicklung" der Daimler-Benz AG, Stuttgart-Untertürkheim, Prof. Dr.-Ing. D. Radaj ist Hauptabteilungsleiter im Bereich "Forschung und Entwicklung" der Daimler-Benz AG, Stuttgart-Untertürkheim. Er war Mitarbeiter von Prof. Dr.-Ing. Dr. agr. h.c. W. Kloth 1959 bis 1964 und von Prof. Dr.-Ing. W. Batel, dem das vorliegende Heft gewidmet ist, 1964 bis 1969.*

3. Methodische Grundlagen der BEM und zugehörige Systeme

3.1 Theorie der BEM in der Elastostatik

Um den Spannungs- und Verformungszustand bei vorgegebenen statischen und/oder kinematischen Randbedingungen in einem elastischen Kontinuum zu berechnen, geht die Elastizitätstheorie von Systemen partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung aus, deren Lösung über besondere Spannungs- oder Verschiebungsfunktionen in reeller oder komplexer Darstellung gesucht wird (z.B. *Airy*sche und *Maxwellsche* Spannungsfunktionen, Verschiebungsfunktionen nach *Papkowitsch-Neuber*, Verbindung mit konformer Abbildung nach *Kolosow-Mußchelischwili*). Praktisch verwertbare Lösungen konnten damit für ebene und rotationssymmetrisch räumliche Kerbspannungsprobleme erarbeitet werden [18 bis 22].

Mit dem Einsatz der Finite-Element-Methode wurde das Anwendungsspektrum auf Probleme mit allgemein ebener oder räumlicher Geometrie erweitert. Die Minimierung der Formänderungsarbeit, bei Verschiebungsansätzen wieder mit Hilfe der elastischen Differentialgleichungen formuliert, bedarf allerdings der Modellierung des zu untersuchenden Bauteils in finite Elemente und daher eines umfangreichen Elementgenerierungsprozesses vor der eigentlichen Beanspruchungsrechnung.

Ansatzpunkt der Boundary-Element-Methode sind nun ebenfalls die angesprochenen elastischen Differentialgleichungen, etwa in der Form nach *Navier-Cauchy*:

$$\mu \Delta \underline{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \underline{u} - \gamma \text{grad } \Theta + \underline{b} = \underline{0} \quad (1),$$

mit \underline{u} als Verformungsvektor, Θ Temperatur, \underline{b} Volumenkraft sowie den Konstanten λ, μ (*Lamésche* Konstanten) und γ , welche sich auf den Elastizitätsmodul E , die Querdehnungszahl ν und die Wärmeausdehnungszahl α wie folgt zurückführen lassen:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\alpha E}{1-2\nu}.$$

Die Differentialgleichung (1) kann – wie auch in der Potentialtheorie üblich – in eine Integralgleichung übergeführt werden.

Im mathematischen Sinn kann dies durch Anwendung des zweiten *Greenschen* Integralsatzes:

$$\iiint_V (\Psi \Delta \Phi - \Phi \Delta \Psi) dV = \iint_O (\Psi \text{grad } \Phi - \Phi \text{grad } \Psi) dO \quad (2)$$

geschehen, der Volumenintegrale in Oberflächenintegrale überführt.

Im mechanischen Sinn kann dies auch als Umformung des Prinzips der virtuellen Arbeit in den *Bettischen* Satz interpretiert werden, der unter Berücksichtigung von Volumenkräften und thermischer Beanspruchung folgende Gestalt hat

$$\begin{aligned} & \iint_O \left\{ T_j(\xi) u_j(\xi) - U_j(\xi) t_j(\xi) \right\} dO = \\ & = \iiint_V \left\{ \gamma \Theta(\xi) U_{j,j}(\xi) + U_j(\xi) b_j(\xi) \right\} dV \quad (3) \end{aligned}$$

(j = 1, 2, 3)

Dabei ist (u_j, t_j) die Statik- und Kinematikgruppe I, die dem eigentlichen Problem entspricht (also vorgegeben oder unbekannt ist), während (U_j, T_j) die Statik- und Kinematikgruppe II ist, die eine bekannte Referenzlösung (für den Fall $\Theta, b_j = 0$) beinhaltet, welche bei der BEM im allgemeinen eine Einzellast im Vollraum bzw. in der Vollscheibe bei ebener Formulierung ist, wodurch keine

1) Tensorgleichung mit üblicher Konvention der Indexinterpretation: gleiche Indizes in einem Ausdruck bedeuten Summation, Index nach Komma bedeutet partielle Ableitung, j = 1, 2, 3 bezieht sich auf die 3 Raumrichtungen.

Einschränkung bezüglich der Geometrie des aktuellen Problems gemacht wird.

Das Bereichsintegral auf der rechten Seite von Gl. (3) tritt damit nur im Fall thermischer Beanspruchung bzw. bei nicht verschwindender Volumenkraft auf. Die linke Seite von Gl. (3) führt bei Verwendung der angeführten Referenzlösung und Beschränkung aller Größen auf die Oberfläche O zu einem singulären Integral, welches unter Beachtung der Grenzübergänge bei Integration über die Oberfläche O folgende Gestalt annimmt ($P, Q \in O$):

$$\begin{aligned} & c_{jk}(P) u_j + \iint_O \left\{ T_{jk}(P, Q) u_j(Q) - t_j(Q) U_{jk}(P, Q) \right\} dO(Q) = \\ & = \iiint_V \dots dV \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (4) \end{aligned}$$

bzw. = 0 im Fall $\Theta, b_j = 0$ mit dem Koeffizienten $c_{jk}(P)$ vor dem integralfreien Term.

Damit ist bereits der wesentliche Vorteil der BEM-Formulierung sichtbar: die linke Seite von Gl. (4) verknüpft nur noch die Verformungen und Spannungen auf der Oberfläche des Bauteils miteinander. Bei bekannter rechter Seite und ausreichender Vorgabe von Spannungen und/oder Verformungen auf der Oberfläche können damit die restlichen Spannungen und/oder Verformungen auf der Oberfläche errechnet werden.

Um diesen Vorteil auch bei thermischer Beanspruchung bzw. nicht verschwindender Volumenkraft zu erhalten, muß auch die rechte Seite von Gl. (4) in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden. Diese Umwandlung gelingt nach [5] für quasi-stationäre Temperaturfelder ($\partial \Theta / \partial t = \text{konst.}$) und mit der Annahme, daß die Volumenkraft von einer Skalarpotentialfunktion $\tilde{\Psi}$ herleitbar ist. Letztere Annahme kann noch verallgemeinert werden auf solche Volumenkräfte, für welche Gl. (4) mit $\Theta = 0$ mittels einfacher Vollraumlösungen gelöst werden kann [8]. Dies ist für die Schwer- und Zentrifugalkraft sowie eine Reihe von Kombinationen aus punkt- und linienförmig angreifenden Volumenkräften möglich.

Die BEM-Formulierung der Spannungen und Verformungen bei bekannter thermischer Beanspruchung unter Einbeziehung der von einer Potentialfunktion ableitbaren Volumenkräfte lauten dann

$$\begin{aligned} & c_{jk}(P) u_j + \iint_O \left\{ T_{jk}(P, Q) u_j(Q) - t_j(Q) U_{jk}(P, Q) \right\} dO = \\ & = \iint_O \left\{ C_k(P, Q) \Theta(Q) + D_k(P, Q) \frac{\partial \Theta}{\partial n}(Q) + E_k(P, Q) \tilde{\Psi}(Q) + \right. \\ & \left. + F_k(P, Q) \frac{\partial \tilde{\Psi}(Q)}{\partial n} + G_k(P, Q) \right\} dO(Q) \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (5), \end{aligned}$$

wobei bei Verwendung des in [8] dargestellten Vorgehens E_k und F_k entfallen bzw. in die anderen Größen eingehen (n ist der Normalvektor in Punkt Q, P und Q sind Knotenpunkte auf der Oberfläche bzw. dem Rand des Bauteils).

Durch die Formulierung nach Gl. (5) ist das Beanspruchungsproblem vom Volumen auf die Oberfläche des zu untersuchenden Bauteils und damit quasi um eine Dimension reduziert worden.

Da man in analoger Weise wie Gl. (5) auch eine explizite Integralgleichung für innere Punkte P formulieren kann:

$$\tilde{c}_{jk}(P) u_j(P) = \iint_O \left\{ U_{jk}(P, Q) t_j(Q) - T_{jk}(P, Q) u_j(Q) \right\} dO(Q) + \dots$$

(j, k = 1, 2, 3) (6),

können nach Lösung von Gl. (5) sofort auch an jedem inneren Punkt zunächst die Verformungen und in einem zweiten Schritt über das *Hookesche* Gesetz auch die Spannungen explizit errechnet werden (explizite Einzelpunktauswertung).

Gl. (5) liefert auf der Oberfläche, die auch mehrfach zusammenhängend sein kann (Löcher sind zugelassen), neben den Verformungen auch die aufprägbaren Spannungen. Die nicht aufprägbaren Spannungen sind in einem zweiten Schritt wieder mit Hilfe des *Hookeschen* Gesetzes hierzu errechenbar.

Mittels der weiter unten dargestellten Substrukturtechnik, d.h. einer gedachten oder realen Unterteilung des Bauteils in verschiedenen gekoppelte Teilbereiche, ist es auch möglich, die Materialwerte E, ν, α und die Dichte zu wechseln, allerdings müssen sie für den einzelnen Teilbereich konstant sein.

3.2 Numerische Realisierung

Die Lösung von Gl. (5) ist im allgemeinen nicht analytisch möglich, sondern muß numerisch erfolgen.

Hierzu ist zunächst die Oberfläche (im ebenen Fall der Rand) des zu untersuchenden Bauteils zu diskretisieren, d.h. in n Knoten mit einfach zu beschreibenden Verbindungskurven (Gerade, Kreise, u.a.) zu unterteilen, sowie die zunächst unbekannt Funktionen u_j und t_j geeignet zu approximieren (linear, quadratisch, ...), z.B. durch Interpolation der an den vorgewählten Randknoten bestehenden Randwerte.

Mit diesen Näherungen:

- die Oberfläche O zerfalle in l Teile, die jeweils m Knoten besitzen
- u_j werde durch $M(\xi) u_j^{\lambda\mu}$ ($\lambda = 1, \dots, l; \mu = 1, \dots, m$) mit der Formfunktion $M(\xi)$ approximiert, wobei $u_j^{\lambda\mu}$ der Wert an dem μ -ten Knoten im λ -ten Teil der Oberfläche von u_j sei (analog t_j)
- $J^\lambda(\xi)$ sei die *Jacobifunktion*: $dO = J^\lambda(\xi) d\xi$ für das λ -te Oberflächenelement O_λ

erhält Gl. (5) die Gestalt:

$$c_{kj} u_j + \sum_{\lambda=1}^l \sum_{\mu=1}^m \left\{ \int_{O_\lambda} T_{kj}^{\lambda\mu} M^\mu(\xi) J^\lambda(\xi) d\xi \right\} u_j^{\lambda\mu} - \sum_{\lambda=1}^l \sum_{\mu=1}^m \left\{ \int_{O_\lambda} U_{kj}^{\lambda\mu} M^\mu(\xi) J^\lambda(\xi) d\xi \right\} t_j^{\lambda\mu} = \text{rechte Seite von Gl. (5)}$$

(j, k = 1, 2, 3) (7),

wobei die rechte Seite mit den bekannten Funktionen $\Theta, \partial\Theta/\partial n$ und $\tilde{\Psi}$ in analoger Weise diskretisiert wird und sich sofort zu einem Vektor zusammenfassen läßt.

Durchläuft hierbei γ nun alle Oberflächenknotennummern, so erhält man z.B. im dreidimensionalen Fall $3n$ Gleichungen für die $6n$ Größen

$$u_j^{\lambda\mu}, t_j^{\lambda\mu}.$$

Als Randbedingung kann man an jedem Knoten 3 der 6 Größen u_j, t_j verschreiben (soweit sie nicht in dieselbe Richtung weisen) und erhält dann ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\underline{\underline{A}} \underline{u} + \underline{\underline{B}} \underline{t} = \underline{r} \quad (8),$$

mit Matrizen der Dimension $3n \times 3n$, welches nach Umordnung der bekannten Werte auf die rechte Seite nach *Gauß* gelöst werden kann.

In der Formulierung nach Gl. (5) sind auch die starren Bewegungen des Bauteils noch enthalten. Dies bedeutet, daß die vorzuziehenden Randbedingungen für Gl. (7) diese Bewegungen verhindern müssen, das Bauteil muß statisch bestimmt gelagert sein.

Die Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ in Gl. (8) sind dabei voll belegt und $\underline{\underline{A}}$ ist zudem unsymmetrisch, allerdings stark diagonal dominant. In dieser Formulierung enthalten ist daher der Nachteil der BEM, daß das resultierende lineare Gleichungssystem eine vollbesetzte und

im allgemeinen unsymmetrische Matrix besitzt. Trotz der relativ geringen Knotenanzahl nur auf der Oberfläche eines Bauteils steigt damit der Rechenaufwand relativ rasch.

Um diesen Nachteil abzuschwächen, wurde in [4] eine Substrukturtechnik vorgeschlagen, die dann in [6] und [7] auch realisiert wurde und deren Vorteile [8] und [9] aufzeigen.

Dazu wird das Bauteil theoretisch in verschiedene Substrukturen zerschnitten. Entlang der Schnitte kommen dabei zwar noch zusätzliche Unbekannte hinzu, ebenfalls bilden die Koppelbedingungen (Verformungen gleich, aufprägbare Spannungen entgegengesetzt gleich) zusätzliche Gleichungen, die zu Gl. (8) hinzukommen, aber der wesentliche Vorteil besteht nun darin, daß nicht mehr jeder Oberflächenknoten mit jedem anderen Oberflächenknoten direkt gekoppelt ist. Dies drückt sich in der Matrix des Gleichungssystems dadurch aus, daß sie eine Block-Bandstruktur erhält, was den Speicher- und Rechenzeitaufwand bei vergleichbarer Genauigkeit der Ergebnisse ganz erheblich reduziert.

3.3 Programmsystem BETSY

Realisiert ist die BEM incl. Substrukturtechnik in der dargestellten Form nach [6 bis 9] im Rechensystem BETSY (Boundary Element code for Thermoelastic Systems), das, gefördert durch die Arbeitsgemeinschaft Industrieller Forschungsvereinigungen e.V., in den Jahren 1977–1982 im Rahmen eines Forschungsvorhabens der Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e.V. (FVV Frankfurt) an der TU München (Lehrstuhl A für Mechanik, Leitung: Prof. Dr. rer. nat. *H. Lippmann*, Projektleitung: Prof. Dr.-Ing. habil. *G. Kuhn*) entstanden ist und den Mitgliedsfirmen der FVV zur Verfügung steht. BETSY ist unterteilt in fünf selbständige Programme:

BETSY-2D	für ebenen Spannungs- und/oder Verzerrungszustand
BETSY-AXT	für axialsymmetrische Geometrie und reine Torsionslast
BETSY-AXO	für axialsymmetrische Geometrie und radiale sowie axiale symmetrische Last
BETSY-AX1	für axialsymmetrische Geometrie und einfache (cos-, sin-verteilte) Biegung
BETSY-3D	für allgemein dreidimensionale Probleme.

Dabei sind BETSY-2D, BETSY-AXO und BETSY-3D mit der Substrukturtechnik versehen.

[9] zeigt an zwei ebenen Beispielen das Konvergenz- und Rechenzeitverhalten von BETSY-2D, [8] die Auswirkung der Substrukturtechnik auf die Rechenzeit. In [9] ist zudem bei beiden Beispielen ein Vergleich mit der Finite-Element-Methode durchgeführt. Dabei hat es sich gezeigt, daß besonders im Bereich der Datenaufbereitung (bei BEM der Rand, bei FEM die gesamte Fläche) die BEM sehr viel wirtschaftlicher einsetzbar ist, als die FEM. Dies gilt zunächst nur für die beiden angeführten Beispiele, läßt sich jedoch zumindest qualitativ ausdehnen auf all jene Berechnungsobjekte, deren Oberfläche relativ zum Volumen klein ist oder in solche Teile zerlegt werden kann. Besonders günstig schneidet die Methode bei Kerbspannungsproblemen ab, da die Ergebnisse unmittelbar an der Oberfläche bzw. am Rand erzielt werden und dementsprechend genauer sind als vergleichbare FEM-Extrapolationen.

4. Anwendungsbeispiele aus dem Fahrzeugbau

4.1 Fußbeanspruchung eines Zahnrades

Nachdem bereits 1975 die Vorteile der BEM durch [1, 3, 4] bekannt waren, wurde das Verfahren für ebene Anwendungen bei Daimler-Benz getestet und seit 1976 bei der Zahnradberechnung eingesetzt. **Bild 1** zeigt als ebenes Beispiel den Verlauf der Tangentialspannung entlang einer Zahnkontur bei Kräfteingriff am Zahnkopf. Deutlich zu sehen ist die Spannungsüberhöhung im Zahnfuß. Die Rechnung zeigt also sowohl die Höhe als auch die

Stelle des maximalen Spannungswertes am Zahnfuß, beides wichtige Einflußfaktoren auf die Haltbarkeit und Lebensdauer der Verzahnung. Der Rechnung zugrunde gelegt ist ein ebenes Modell des Zahns einschließlich Radkörper, der auf der dem Zahn gegenüberliegenden Seite entsprechend abgestützt ist.

Bild 1 zeigt auch die Art der Diskretisierung im Bereich des Zahns. Insbesondere im Fußbereich und um den Ort des Kraftangriffs wurde relativ fein unterteilt, in den anderen Randzonen gröber. Interne Vergleiche mit Messungen an der TU München (Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau, Leitung: Prof. Dr.-Ing. H. Winter) haben eine solche gute Übereinstimmung der Formzahlen in ihrer Abhängigkeit von der Zahnform und dem Kraftangriff gebracht, daß diese Art der Spannungsberechnung im Zahnradauslegungsprogramm bei Daimler-Benz schon mehrere Jahre routinemäßig angeboten wird.

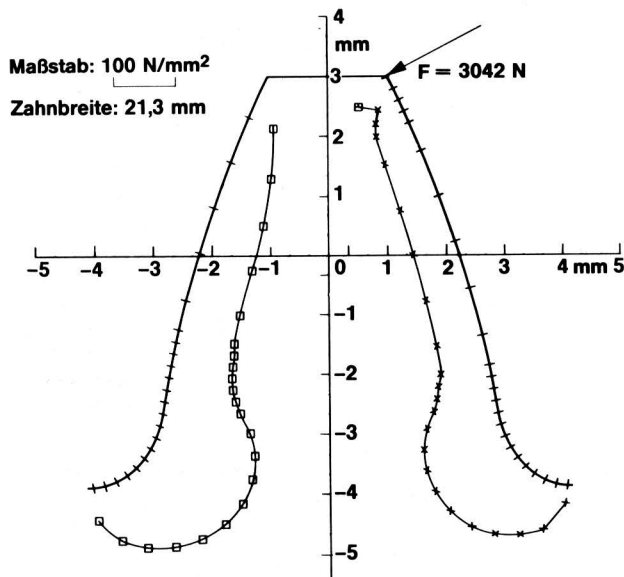


Bild 1. Tangentialspannungsverlauf entlang der Zahnkontur bei Kraftangriff am Zahnkopf, ebene Anwendung der BEM, die Spannungswerte sind radial zur Kontur nach innen aufgetragen.

□ Druck-Mittelwerte x Zug-Mittelwerte

4.2 Steifigkeit eines Gummielements

Bild 2 zeigt als Anwendungsbeispiel ein rotationssymmetrisches Gummielement (Teil eines Gummilagers), welches an den äußeren Radien wie angegeben am Metall anvulkanisiert (und damit fest) ist und das von oben in axialer Richtung zusammengedrückt wird.

Das Zusammendrücken wird durch eine zur Symmetrieachse senkrechte starre Anlagefläche simuliert, die 9 mm abgesenkt wird. Da sich bei den auftretenden Verformungen die Geometrie des Gummielements stark ändert, ist ein iteratives Vorgehen erforderlich. Zunächst wird zwar an der ursprünglichen Anlagefläche die axiale Absenkung vorgegeben und die Reaktionen werden errechnet (woraus auf die axiale Steifigkeit geschlossen werden kann), doch Teil I von Bild 2 zeigt als Ergebnis auch, daß nun aufgewölbte Teile des Gummielements die Auflagefläche durchdringen würden. Daher wird die Rechnung bis zu dem Wert zurückgenommen, wo gerade der erste neue Knoten an der Auflagefläche anliegt, und mit dieser veränderten Geometrie wird nun erneut eine Absenkung um den an der Gesamtabsenkung von 9 mm noch fehlenden Restbetrag vorgenommen. Teil II von Bild 2 zeigt diesen zweiten Schritt. Insgesamt waren für die gezeigte Lösung sieben Iterationsschritte nötig, Teil III von Bild 2 zeigt den letzten Schritt.

Bei jedem Schritt geht eine neue Geometrie in die Rechnung ein, die sich jeweils ergebende Steifigkeit in axialer Richtung ändert sich daher, und Bild 2 zeigt im Diagramm die sich dadurch progres-

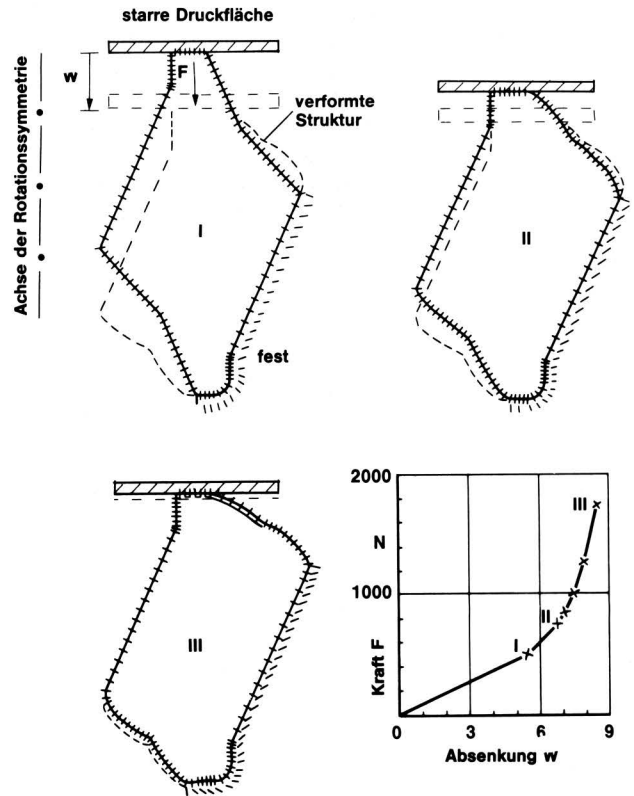


Bild 2. Iterative Verformungsberechnung eines axialsymmetrischen Gummielements mit der BEM, axiale Steifigkeit.

siv erhöhende Steifigkeit, die quasi das geometrisch nichtlineare Verhalten der Steifigkeit reproduziert. In [23] sind analoge Berechnungen durchgeführt, dort sind die Ergebnisse auch mit Messungen und (auch nichtlinearen) FEM-Rechnungen verglichen. Es haben sich erwartungsgemäß gute Übereinstimmungen immer dann ergeben, wenn die Nichtlinearität des Materials noch nicht stark zum Tragen kommt.

Vorteilhaft ist hier, daß auch die Randspannungsergebnisse erhalten werden, welche bei FEM-Rechnungen mit relativ hohen Ungenauigkeiten behaftet sein können. Ebenfalls ein Vorteil gegenüber der FEM ist, daß die Querzahl mit 0,5 explizit vorgebar ist. Damit ist das inkompressible Verhalten von Gummi im Rahmen der linearen Theorie voll erfassbar.

4.3 Kerbspannung eines Achsschenkels

Bild 3 zeigt eine Anwendung von BETSY-AX1. Ein in der Geometrie rotationssymmetrisch modellierter Achsschenkel wird an der gekennzeichneten Stelle (fest) ringförmig festgehalten und oben durch das Rad einer über den Umfang konstanten Querkraft ausgesetzt. Das Bild zeigt den Verlauf der Tangentialspannung in der r,z -Ebene jeweils normal über der Kontur nach innen aufgetragen. Auffällig sind die Spannungsüberhöhungen in den 3 Kerben, die wieder feiner diskretisiert wurden und wo auch die Approximationsordnung für u und t quadratisch gewählt ist.

Bild 4 zeigt für den Fall dieses Achsschenkels eine Konvergenzuntersuchung bezüglich der Kerbfaktoren in den 3 Kerben, abhängig von der Gesamtzahl der verwendeten Randpunkte. Variiert wurde auch der Funktionsansatz (linear oder quadratisch). Mit Punkten angedeutet ist jeweils das Ergebnis zweier Rechnungen mit BETSY-3D und dem analogen Achsschenkel, nun allerdings dreidimensional nachmodelliert und durch drei Schnitte in 4 Substrukturen unterteilt. **Bild 5** zeigt die Struktur des dreidimensionalen Modells. Es zeigt sich insgesamt eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

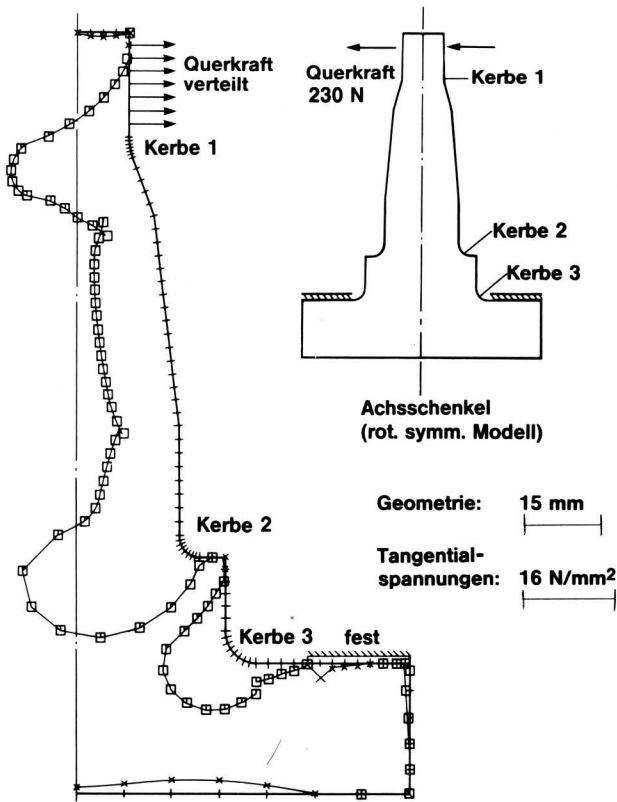


Bild 3. Kerbspannungen für Achsschenkel unter Querkraftbiegung; Berechnung mit BETSY-AX1, die Spannungswerte sind normal zur Kontur nach innen aufgetragen.

□ Druck-Mittelwerte x Zug-Mittelwerte

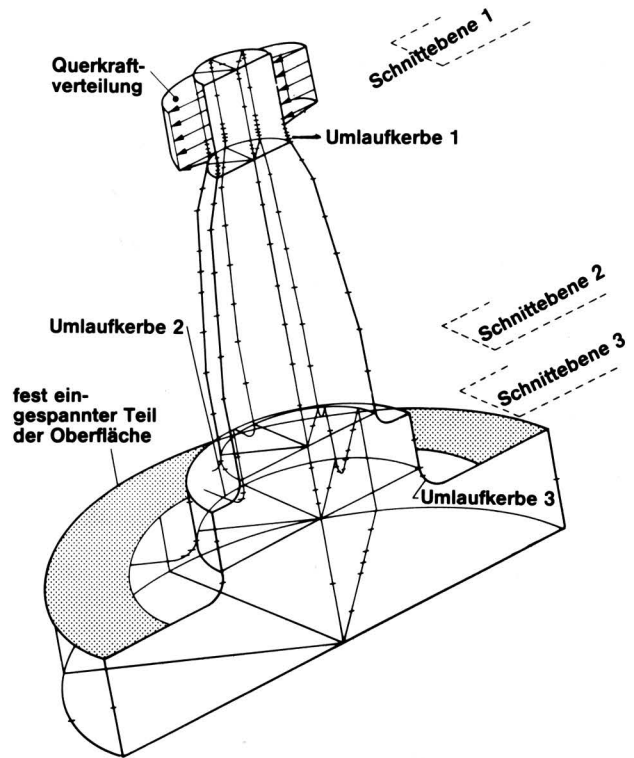


Bild 5. Dreidimensionales Modell des Achsschenkels unter Querkraftbiegung zur Kerbspannungsberechnung mit BETSY-3D.

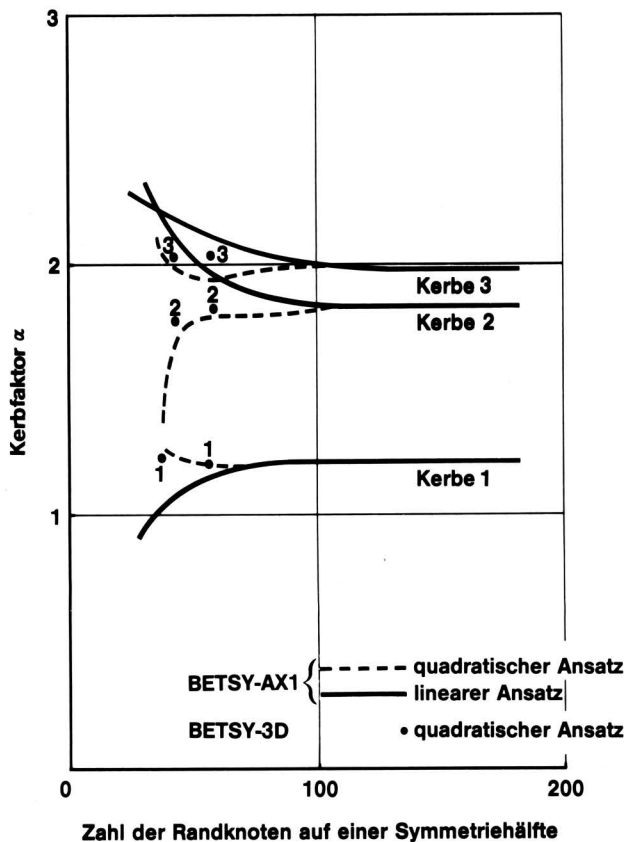


Bild 4. Konvergenzverhalten der Kerbfaktoren nach BETSY-AX1 und BETSY-3D am Beispiel des Achsschenkels unter Querkraftbiegung.

--- BETSY-AX1 quadratischer Ansatz
 ——— BETSY-AX1 linearer Ansatz
 ••••• BETSY-3D quadratischer Ansatz

5. Leistungsfähigkeit der BEM

Neben den dargestellten realisierten Möglichkeiten bietet die Methode grundsätzlich auch die Möglichkeit, Randbedingungen nicht nur explizit, sondern auch implizit in Form von zusätzlichen Beziehungen zwischen Randwerten vorzugeben. Wie aus Gl. (8) ersichtlich, gilt dies für jede beliebige Kombination der Verformungen und der aufprägbaren Spannungen, so daß nicht nur Symmetrien und Periodizitäten, sondern auch allgemeine Zusammenhänge (Reibschlüsse, Steifigkeiten usw.) am Rand oder an gedachten Schnitten vorgegeben werden könnten.

Im ebenen Fall wurde die BEM auch erfolgreich zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren an Rissen eingesetzt [24]. Dabei ist ein verschiedenartiges Vorgehen möglich. Die an der Rispspitze singulären Spannungen werden zweckmäßigerweise bereits in der Referenzlösung (Statik, Kinematikgruppe II) in Gl. (3) berücksichtigt, so daß eine besondere Diskretisierung im Risfbereich entfällt [25]. In [6, 26] wird dagegen aus Verformungen und Spannungen in der Umgebung des Risses durch Ausgleichsrechnung auf die Spannungsintensitätsfaktoren geschlossen.

[24, 27] geben einen Überblick über weite Bereiche der Anwendungsmöglichkeit der BEM, deren Erschließung zum größten Teil erst begonnen hat. Wärmeleitung, Plastizität, zeitabhängige inelastische Verformungen, Schmelz- und Verfestigungsprobleme, Platten und Schalen aber auch die Schallabstrahlung schwingender Strukturen sind Beispiele solcher Entwicklungen.

Schrifttum

Bücher sind durch • gekennzeichnet

- [1] Rizzo, F.J.: An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quart. Appl. Math. Bd. 25 (1967) S. 83/95.
 [2] Cruse, T.A., D.W. Snow u. R.B. Wilson: Numerical solutions in axisymmetric elasticity. Comp. a. Structures Bd. 7 (1977) S. 445/51.

- [3] *Cruse, T.A.*: Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Int. J. Solids Structures Bd. 5 (1969) S. 1259/74.
- [4] *Lachat, J.C.*: A further development of the boundary integral technique for elastostatics. Ph. D. Thesis Univ. of Southampton 1975.
- [5] *Rizzo, F.J. u. D.J. Shippy*: An advanced boundary integral equation method for three-dimensional thermoelasticity. Int. J. Num. Meth. Eng. Bd. 11 (1977) S. 1753/68.
- [6] *Neureiter, W.*: Boundary-Element-Programmrealisierung zur Lösung von zwei und dreidimensionalen thermoelastischen Problemen mit Volumenkräften. Diss. TU München 1982.
- [7] *Drexler, W.*: Ein Beitrag zur Lösung rotationssymmetrischer thermoelastischer Kerbprobleme mittels der Randintegralgleichungsmethode. Diss. TU München 1982.
- [8] *Kuhn, G. u. W. Möhrmann*: Boundary-Element-Method in elastostatics, theory and applications. Unveröffentlichtes Manuskript.
- [9] *Radaj, D., W. Möhrmann u. G. Schilberth*: Efficiency and emergence investigation: Boundary Element Method versus Finite Element Method. Zur Veröffentlichung eingereicht bei Numerical Methods in Engineering.
- [10] *Danson, D.J.*: A boundary element formulation of problems in linear isotropic elasticity with body forces "Boundary Element Methods". Proc. of the 3rd Int. Seminar (Juli 1981) Irvine, California (Ed. C.A. Brebbia), S. 105/22.
- [11] *Zienkiewicz, O.C.*: The Finite Element Method. 3rd Ed. Maidenhead-Berkshire/England: McGraw Hill 1977; u. Methode der finiten Elemente. 2. Aufl., München/Wien: C. Hanser 1975.
- [12] *Gallagher, R.H.*: Finite-Element-Analysis. Englewood Cliffs N.J.: Prentice Hall 1975; u. Finite Element Analysis. Berlin/Heidelberg/New York: Springer 1976.
- [13] *Schwarz, H.R.*: Methode der finiten Elemente. Stuttgart: Teubner 1980.
- [14] *Kloth, W. u. Th. Stroppel*: Kräfte, Beanspruchungen und Sicherheiten in den Landmaschinen. Z. VDI Bd. 80 (1936) S. 85/92.
- [15] *Kloth, W.*: Spannungs- und Verformungsfelder als Grundlage der festigkeitgerechten Gestaltung von Landmaschinen. Grndl. Landtechnik H. 11 (1959) S. 105/109.
- [16] *Kloth, W.*: Leichtbauaufibel. Wolfratshausen bei München: Verlag Neureuter 1947.
- [17] *Kloth, W.*: Atlas der Spannungsfelder in technischen Bauteilen. Düsseldorf: Verlag Stahl Eisen 1961.
- [18] *Neuber, H.*: Kerbspannungslehre. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1937 (1. Aufl.) u. 1958 (2. Aufl.).
- [19] *Sawin, G.N.*: Spannungserhöhung am Rande von Löchern. Berlin: VEB-Verlag Technik 1956 (Übersetzung 1. Aufl., Moskau 1951, russisch).
- [20] *Sawin, G.N.*: Stress distribution around holes. NASA Techn. Transl. F-607, Nov. 1970 (Übersetzung 2. Aufl., Kiew 1968, russisch).
- [21] *Radaj, D.*: Kerbspannungen an Öffnungen und starren Kernen. Habilitationsschrift Techn. Univ. Braunschweig 1970. Eigenverlag Stuttgart.
- [22] *Radaj, D. u. G. Schilberth*: Kerbspannungen an Ausschnitten und Einschlüssen. Düsseldorf: Deutscher Verlag f. Schweißtechnik 1977.
- [23] *Holzemer, K.H.*: Berechnungsverfahren für Gummi und deren Einsatz bei der Entwicklung von Gummibauteilen. VDI-Berichte 444 Düsseldorf: VDI-Verlag 1982, S. 109/20.
- [24] *Banerjee, P.K. u. R. Butterfield*: Developments in Boundary Element Methods, Bd. 1. London: Appl. Science Publishers 1979.
- [25] *Kuhn, G.*: Numerische Behandlung von Mehrfachrisen in ebenen Scheiben. ZAMM Bd. 61 (1981) S. T105-T106.
- [26] *Tanaka, M., M. Hamada u. Y. Iwata*: Computations of a two-dimensional stress intensity factor by the Boundary Element Method. Ingenieur-Archiv Bd. 52 (1982) S. 95/104.
- [27] *Banerjee, P.K. u. R.P. Shaw*: Developments in Boundary Element Methods, Bd. 2. London: Appl. Science Publishers 1982.

Forschung für die Technik der Pflanzenproduktion in Gewächshäusern

Von Christian von Zabeltitz, Hannover*)

Professor Dr.-Ing. Wilhelm Batel zum 60. Geburtstag

DK 635:631.23:631.344.5.001.5

Die Gartenbaubetriebe mit Pflanzenproduktion in Gewächshäusern sind vor allem durch die Steigerung der Energie- und Arbeitskosten sehr stark belastet. Es müssen weiterhin große Anstrengungen unternommen werden, die Wettbewerbsfähigkeit der Betriebe zu erhalten. Ausgehend von Grundlagenuntersuchungen, sind in verstärktem Maße Techniken zu entwickeln und Gesetzmäßigkeiten zu untersuchen, die für den praktischen Gartenbau eine Hilfe für Entscheidungen über technische Betriebsmittel darstellen.

*) Prof. Dr.-Ing. Chr. von Zabeltitz ist Leiter des Instituts für Technik in Gartenbau und Landwirtschaft der Universität Hannover.

1. Einleitung

Die gärtnerische Pflanzenproduktion aus Obstbau, Gemüsebau, Zierpflanzenbau und Baumschulwirtschaft wird in der Statistik der Landwirtschaft zugerechnet. Diese gärtnerischen Sparten nehmen nur etwa 1 % der landwirtschaftlichen Nutzfläche ein, erzielen darauf aber 10 % der Verkaufserlöse der landwirtschaftlichen Produktion. In der Bundesrepublik gibt es in 24 000 Betrieben mit Pflanzenproduktion in Gewächshäusern etwa 3 400 ha Gewächshausfläche, von der etwa 2 600 ha mit Zierpflanzen belegt sind. Der Rest wird bis auf eine geringe Fläche in Obstbau und Baumschule für die Gemüseproduktion genutzt.

Ende 1980 gab es insgesamt 539 ha Kunststoffgewächshäuser, von denen 377 ha mit Folie eingedeckt waren. 32 ha Gewächshausfläche sind als Doppelbedachung mit Acryl-Stegdoppelplatten und