

Ein Beitrag zur Theorie des Wasserüberganges zwischen Boden und keimendem Saatgut

Von Owonam Akpaetok und Alfred Stroppel,
Stuttgart-Hohenheim*)

Mitteilung aus dem Sonderforschungsbereich 140 – Landtechnik "Verfahrenstechnik der Körnerfruchtproduktion" der Universität Hohenheim

DK 631.547.1:58.032:58.051

Die Keimung des Saatgutes im Boden hängt von verschiedenen Einflußfaktoren ab. Zu diesen gehört vor allem der Faktor Wasser, der in ausreichendem Maße zur Verfügung stehen muß. Der zeitliche Verlauf der Wasseraufnahme des Saatgutes im Boden wird durch die Bestellgeräte mitbestimmt, beispielsweise über die Saattiefe und die Krümelstruktur des Saatbettes. Deswegen ist die Kenntnis der grundlegenden Zusammenhänge beim Wasserübergang zwischen Boden und Saatgut auch für den Ingenieur von Bedeutung. Mit dieser Arbeit soll ein Beitrag zur Theorie des Wasserüberganges zwischen Boden und keimendem Saatgut geleistet werden.

1. Einleitung

Mit der Keimung beginnt im Saatgut ein intensiver Stoffwechsel zum Aufbau der Pflanze. Hierfür müssen gewisse Voraussetzungen erfüllt sein. Eine davon ist die Verfügbarkeit von Bodenwasser, das das Saatgut in ausreichender Menge aufnehmen muß, bevor es keimen kann. Dabei soll die Wasseraufnahme nicht zu langsam ablaufen, so daß der Keimungsvorgang und damit das Pflanzenwachstum möglichst schnell eingeleitet werden können. Das ist im Hinblick auf die spätere Ertragsbildung von nicht unerheblicher Bedeutung.

Ein wichtiges Beurteilungskriterium ist in diesem Zusammenhang der zeitliche Verlauf der Wasseraufnahme des Saatgutes zwischen dem Saat- und Keimungszeitpunkt. Dieser zeitabhängige dynamische Prozeß hängt von verschiedenen Faktoren ab, die durch das Klima, den Boden, das Saatgut und die eingesetzten Bestellmaschinen bestimmt werden. Wegen der Bedeutung des Wassers beim Keimungsprozeß wurde in der Vergangenheit von einigen Wissenschaftlern der Versuch unternommen, diesen zeitlichen Feuchteverlauf theoretisch zu beschreiben. Dabei wurde meistens auf Theorien zurückgegriffen, die nicht für den vorliegenden Problembereich entwickelt wurden und somit oft einen Kompromiß darstellen. Ein weiterer Nachteil dieser theoretischen Untersuchungen ist darin zu sehen, daß der eigentliche Vorgang der Keimung nicht genügend einbezogen wurde.

Der Begriff "Keimung" ist leider nicht einheitlich definiert. In den meisten Fällen wird das Durchbrechen der Primärwurzeln durch die Samenschale als einziges Kriterium für die erfolgte Keimung verwendet. Diese Definition reicht jedoch nicht aus, da zum Keimungsvorgang auch noch das Erscheinen des Sprosses gehört. Der Keimungsvorgang ist also ein zweiphasiger Prozeß, bei dem entsprechend Bild 1 die erste Phase beim Erscheinen der Primärwurzeln (A) und die zweite Phase beim Erscheinen des Sprosses (B) beendet ist.

*) Prof. Dr.-Ing. Alfred Stroppel ist Inhaber des Lehrstuhls für Verfahrenstechnik in der Pflanzenproduktion am Institut für Agrartechnik der Universität Hohenheim; Dr. Owonam Akpaetok, B. Sc., M.S., war bis Mai 1980 als Stipendiat des DAAD im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 140 tätig. (Er ist wieder in sein Heimatland Nigeria zurückgekehrt).

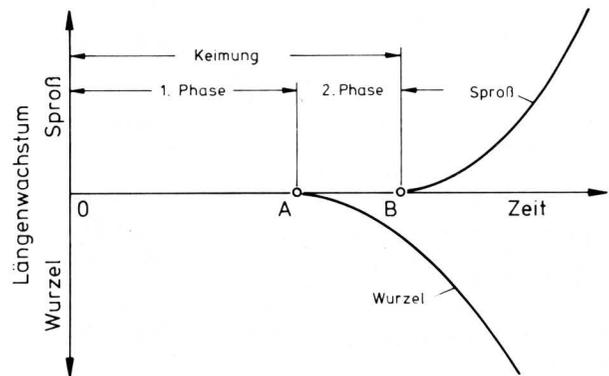


Bild 1. Phasen des Keimungsvorganges (schematisch).

Im folgenden wird in kurzgefaßter Form eine theoretisch ermittelte mathematische Beziehung vorgestellt, mit der der zeitliche Feuchtegradverlauf bei keimendem Saatgut beschrieben werden kann. Dabei wird ein neuer Ansatz für die "treibende Kraft", die für den Wasserübergang zwischen zwei verschiedenen Materialien verantwortlich ist, eingeführt. Wenn auch die entwickelten theoretischen Zusammenhänge für das gesamte Gebiet der Keimung, also für die Zeitspanne OB in Bild 1, gültig sein soll, so wird in dieser Arbeit nur der zeitliche Feuchtegradverlauf der ersten Phase (Zeitspanne OA) behandelt. Detailliertere Erläuterungen zu diesem Themenkreis, auch im Vergleich zu den entsprechenden Arbeiten anderer Autoren, sind in [1] enthalten.

2. Aufgabenstellung

Im folgenden werden zuerst die Komponenten erläutert, die bei der Wasseraufnahme des Saatgutes im Boden eine Rolle spielen. Darauf aufbauend, wird ein physikalisches Modell vorgestellt, bei dem der Wasseraustausch zwischen den beteiligten Komponenten berücksichtigt wird. Dieses Modell ist die Grundlage für die Ableitung einer Differentialgleichung, mit deren Lösung man den zeitlichen Feuchtegradverlauf bei keimendem Saatgut beschreiben kann.

Wie einleitend erwähnt wurde, wird in den folgenden Ausführungen nur der zeitliche Feuchtegradverlauf der ersten Phase in Bild 1 behandelt. Zur Ermittlung der Randbedingungen zum Saatzeitpunkt O und zum Zeitpunkt A, in dem die Primärwurzeln die Samenschale durchstoßen, und zur Ermittlung der Koeffizienten der theoretisch abgeleiteten Gleichung wurden mit Mais entsprechende Laborversuche durchgeführt. Auf den Versuchsaufbau und die Versuchsdurchführung wird kurz eingegangen. Ein Versuchsergebnis wird näher erläutert.

Anhand dieses Versuchsergebnisses werden die Randbedingungen und die Koeffizienten ermittelt und die Gültigkeit der vorgeschlagenen Theorie nachgewiesen. Hierbei wird auch auf eine neuere Methode zur Behandlung von Differentialgleichungen höherer Ordnung hingewiesen.

3. Theoretische Grundlagen

Bei der Wasseraufnahme des Saatgutes sind die in **Bild 2** dargestellten Hauptkomponenten beteiligt. Wasser kann vom Saatgut (2) ausgetauscht werden mit den Bodenteilchen (1) und der Porenluft (3). Ferner kann Wasser ausgetauscht werden zwischen Bodenteilchen, die ein unterschiedliches Feuchtegradniveau haben, und zwischen Bodenteilchen und der Porenluft (3), die ihrerseits Wasser mit der Außenluft (4) austauscht. Ein solches System wird als "composite system" bezeichnet [2].

Bei der Ermittlung der Gesetzmäßigkeiten für den Wasseraustausch zwischen unregelmäßig geformten porösen Körpern, wie Saatgut und Bodenteilchen, gibt es eine Reihe von Schwierigkeiten. So sind die Stellen, an denen der Wasserübergang am Saatgut stattfindet, unbekannt, ebenso wie die Größe der Übergangsfläche. Einige Autoren nehmen einen punktuellen Übergang an bestimmten Stellen [3, 4] an, während andere [5] unterstellen, daß der Wasserübergang an der gesamten Oberfläche stattfinden kann. Bei Trocknungsversuchen mit Mais [6] wurde festgestellt, daß zu Beginn der Trocknung der Feuchteaustritt hauptsächlich an der Ansatzstelle K (siehe **Bild 2**) des Kornes am Kolben erfolgt, während mit fortschreitender Trocknung die gesamte Saatgutoberfläche Feuchtigkeit abgibt.

Ein weiteres Problem liegt darin, daß das Saatgut als organisches Material bei der Wasseraufnahme und -abgabe infolge des Quellens und Schrumpfens sein Volumen ändert.

Wenn auch die Masse der Trockensubstanz des Saatgutes bekannt ist, so ist die Masse der Trockensubstanz des Bodens, die am Wasseraustausch beteiligt ist, unbekannt. Dies ist eine weitere Schwierigkeit hinsichtlich der Ermittlung der Gesetzmäßigkeiten für den Wasseraustausch.

Um der Lösung dieses Problems näher zu kommen, soll zuerst die Frage nach der "treibenden Kraft", die für den Wasserübergang zwischen zwei Medien verantwortlich ist, beantwortet werden.

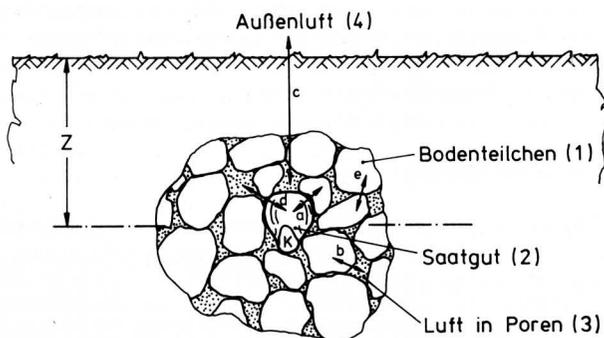


Bild 2. Schematische Darstellung der bei der Wasseraufnahme des Saatgutes beteiligten Komponenten.

K Ansatzstelle des Kornes am Kolben
Z Saattiefe

Formen des Wasseraustausches

- a Saatgut – Bodenteilchen
- b Bodenteilchen – Porenluft
- c Porenluft – Außenluft
- d Saatgut – Porenluft
- e Bodenteilchen – Bodenteilchen

Betrachtet man zunächst den Wasserübergang zwischen zwei Gasen, beispielsweise bei unserem Problem zwischen der Porenluft (3) und der Außenluft (4) (siehe **Bild 2**), so erfolgt solange ein Wasseraustausch, wie der Wasserdampfdruck in beiden Gasen unterschiedlich ist, bei gleichen Temperaturen also solange, wie die relative Feuchte oder der Feuchtegrad unterschiedlich sind. Die "treibende Kraft" und damit auch die in der Zeiteinheit von der Porenluft (3) zur Außenluft (4) übergehende Wassermasse $m_{W,34}$ ist proportional zur Feuchtegraddifferenz:

$$\frac{dm_{W,34}}{dt} \sim X_3 - X_4 \quad (1)$$

Bezeichnet man die Masse der trockenen Luft, die sich in der Porenluft (3) befindet und die am Feuchteausgleich mit dem Saatgut (2) beteiligt ist, mit m_3 , so kann man Gl. (1) wie folgt schreiben:

$$-\frac{dm_{W,34}}{dt} = \frac{m_3}{\mu_{34}} (X_3 - X_4) \quad (2)$$

Hierbei ist μ_{34} ein Beiwert, der den Strömungswiderstand beim Wasseraustausch zwischen Porenluft (3) und Außenluft (4) kennzeichnet. Je größer dieser Beiwert ist, desto langsamer läuft der Wasserübergang ab und umgekehrt. Das negative Vorzeichen auf der linken Seite der Gleichung (2) deutet darauf hin, daß die Porenluft (3) Wasser abgibt.

Betrachtet man den Wasserübergang zwischen einem porösen Feststoff und einem Gas, beispielsweise bei unserem Problem zwischen den Bodenteilchen (1) und der Porenluft (3) (siehe **Bild 2**), so wird solange Wasser an die Porenluft abgegeben, bis die Feuchte der Bodenteilchen gleich der "Gleichgewichtsfeuchte" ist, die sich bei der vorliegenden Temperatur und bei dem momentanen Feuchtegrad der Porenluft ergibt. Die "treibende Kraft" ist also ebenfalls proportional zu einer Feuchtegraddifferenz. Die Wassermasse, die pro Zeiteinheit von den Bodenteilchen (1) zur Porenluft (3) wandert, ist proportional der Differenz aus Feuchtegrad X_1 der Bodenteilchen und dem Gleichgewichtsfeuchtegrad X_g :

$$\frac{dm_W}{dt} \sim X_1 - X_g \quad (3)$$

Bezeichnet man die Masse der Trockensubstanz der Bodenteilchen, die am Feuchteausgleich mit dem Saatgut (2) beteiligt ist, mit m_1 , so kann man Gl. (3) wie folgt schreiben:

$$\frac{dm_W}{dt} \sim m_1 (X_1 - X_g) = m_1 X_1 - m_1 X_g \quad (4)$$

Die Gleichung besagt, daß die pro Zeiteinheit von den Bodenteilchen abgegebene Wassermenge proportional dem aktuellen Wasserinhalt $m_1 X_1$ abzüglich des Wasserinhalts bei Gleichgewichtsfeuchte ist. Da der Gleichgewichtsfeuchtegrad X_g einem bestimmten Feuchtegrad X_3 der Porenluft entspricht, kann man einem bestimmten Wasserinhalt $m_1 X_g$ der Bodenteilchen einen bestimmten Wasserinhalt $m_3 X_3$ der Porenluft zuordnen. Damit kann man Gl. (4) auch wie folgt schreiben:

$$-\frac{dm_{W,13}}{dt} = \frac{1}{\mu_{13}} (m_1 X_1 - m_3 X_3) \quad (5)$$

Hierbei ist μ_{13} ein Beiwert, der den beim Wasseraustausch zwischen den Bodenteilchen und der Porenluft herrschenden Strömungswiderstand kennzeichnet. Die Gl. (5) macht deutlich, daß die "treibende Kraft" für den Wasserübergang der Differenz der Wasserinhalte der Bodenteilchen und der Porenluft proportional ist.

In Analogie zu den Gln. (2) und (5), in denen für die "treibende Kraft" des Wasserübergangs die Differenz zweier Wasserinhalte angesetzt wurde, wird bei dem Wasserübergang zwischen zwei porösen Körpern, beispielsweise bei unserem Problem zwischen den Bodenteilchen (1) und dem Saatgut (2) (siehe Bild 2), folgender Ansatz gemacht:

$$-\frac{dm_{W,12}}{dt} = \frac{1}{\mu_{12}} (m_1 X_1 - m_2 X_2) \quad (6).$$

Die Wassermasse $m_{W,12}$, die pro Zeiteinheit von den Bodenteilchen (1) zum Saatgut (2) wandert, ist proportional der Differenz aus Wasserinhalt $m_1 X_1$ der Bodenteilchen und Wasserinhalt $m_2 X_2$ des Saatgutes (m_2 = Masse der Trockensubstanz des Saatgutes, X_2 = Feuchtegrad des Saatgutes) und umgekehrt proportional einem Beiwert μ_{12} , der den zwischen den Bodenteilchen und dem Saatgut herrschenden Strömungswiderstand kennzeichnet. m_1 ist, wie oben schon erwähnt, die Masse der Trockensubstanz der Bodenteilchen, die am Feuchteausgleich mit dem Saatgut beteiligt sind. Auf den Einfluß dieser Größe, die im Gegensatz zu m_2 unbekannt ist, haben schon andere Autoren [7] hingewiesen.

Ziel dieser theoretischen Untersuchungen ist die Ermittlung des Feuchtegradverlaufs beim keimenden Saatgut in Abhängigkeit von der Zeit. Mit Hilfe der Gln. (2), (5) und (6) lassen sich für die drei Komponenten des "composite system" in Bild 2 bezüglich des Wasseraustausches die Gleichungen für das Massegleichgewicht erstellen, aus denen man dann eine Differentialgleichung für den Feuchtegrad X_2 (Saatgut) mit der Zeit t als unabhängige Variable entwickeln kann.

Berücksichtigt man alle in Bild 2 angedeuteten Möglichkeiten des Wasseraustausches (a bis e), so erhält man ein relativ kompliziertes Gleichungssystem. Deswegen wurden zwei vertretbare Vereinfachungen vorgenommen, die zu einem Gleichungssystem führen, bei dessen Zusammenführung sich eine Differentialgleichung 3. Ordnung ergibt. Folgende Vereinfachungen wurden getroffen:

1. Der Wasseraustausch zwischen der Porenluft (3) und dem Saatgut (2) (Pfeil d in Bild 2) ist gegenüber dem Wasseraustausch zwischen den Bodenteilchen (1) und dem Saatgut (2) vernachlässigbar klein, weswegen er nicht berücksichtigt wird.
2. Die Masse m_1 der Trockensubstanz der Bodenteilchen (1) steht nur im Wasseraustausch mit dem Saatgut (2) (Pfeil a) und mit der Porenluft (3) (Pfeil b) und nicht mit den benachbarten Bodenteilchen, die sich außerhalb der Masse m_1 befinden. Diese vereinfachende Annahme kann man deshalb treffen, da die Gleichgewichtsbedingungen für ein sehr kleines Bodenvolumen in der Nähe des Saatgutes gelten, so daß Feuchtegradänderungen im Boden unberücksichtigt bleiben können, also auch der Feuchteübergang von Boden zu Boden.

In Bild 3 ist das vereinfachte Modell des "composite system" Saatgut – Boden – Porenluft dargestellt. Die entsprechenden Gleichungen für das Masse-Gleichgewicht lauten bei konstanten Masseanteilen:

$$-m_1 \frac{dX_1}{dt} = \frac{1}{\mu_{12}} (m_1 X_1 - m_2 X_2) + \frac{1}{\mu_{13}} (m_1 X_1 - m_3 X_3) \quad (7),$$

$$m_2 \frac{dX_2}{dt} = \frac{1}{\mu_{12}} (m_1 X_1 - m_2 X_2) \quad (8),$$

$$m_3 \frac{dX_3}{dt} = \frac{1}{\mu_{13}} (m_1 X_1 - m_3 X_3) - \frac{m_3}{\mu_{34}} (X_3 - X_4) \quad (9).$$

Durch entsprechende Umformungen kann man aus diesen Gleichungen eine Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für den Feuchtegrad X_2 des Saatgutes in Abhängigkeit von der Zeit t ableiten:

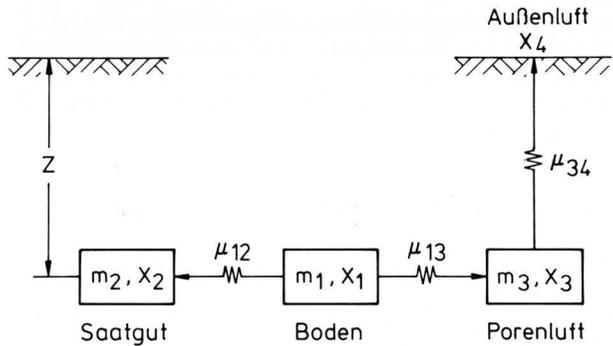


Bild 3. Vereinfachtes Modell des in Bild 2 dargestellten "composite system" Saatgut – Boden – Luft.

$$\ddot{X}_2(t) + B_1 \dot{X}_2(t) + B_2 X_2(t) + B_3 X_2(t) = B_3 X_p \quad (10),$$

wobei X_p die sogenannte Partikulärlösung ist:

$$X_p = \frac{m_3}{m_2} X_4 \quad (11).$$

B_1 , B_2 und B_3 sind konstante Koeffizienten. Sie hängen nur von den Strömungswiderständen μ_{12} , μ_{13} , μ_{34} ab:

$$B_1 = \frac{2}{\mu_{12}} + \frac{2}{\mu_{13}} + \frac{1}{\mu_{34}} \quad (12),$$

$$B_2 = \frac{3}{\mu_{12} \mu_{13}} + \frac{2}{\mu_{12} \mu_{34}} + \frac{1}{\mu_{13} \mu_{34}} \quad (13),$$

$$B_3 = \frac{1}{\mu_{12} \mu_{13} \mu_{34}} \quad (14).$$

Die Gl. (10) ist die allgemeine Gleichung für den zeitlichen Feuchtegradverlauf des keimenden Saatgutes. Die Gleichung berücksichtigt nicht nur den einfachen Einfluß der Strömungswiderstände (Gl. (12)), sondern auch den Einfluß ihrer zwei- und dreifaktoriellen Interaktionen (Gl. (13) und (14)). Ein weiterer Vorteil der Differentialgleichung (10) ist, daß weder die korrespondierenden Werte von X_1 , X_3 und X_4 noch die jeweiligen Massen der Komponenten für die Beschreibung des Feuchtegradverlaufes des Saatgutes notwendig sind.

Es wurde schon darauf hingewiesen, daß in dieser Arbeit nur der Feuchtegradverlauf der ersten Keimungsphase (siehe Bild 1) behandelt wird, also der Zeitraum zwischen dem Säen und dem Erscheinen der Primärwurzel. Bezeichnet man die Stelle der Feuchtegradkurve, an der die Primärwurzel erscheint, mit t_A , X_A , so ist im folgenden mit Hilfe der Gl. (10) der Feuchtegradverlauf in den Grenzen $0 \leq t \leq t_A$ und $X_0 \leq X_2 \leq X_A$ zu ermitteln, wobei X_0 der Anfangsfeuchtegrad des Saatgutes ist.

4. Versuchsaufbau und -durchführung

Zur Lösung einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten müssen die Anfangs- und/oder Randbedingungen festgelegt werden. In unserem Beispiel sind das die entsprechenden Werte für die Zeitpunkte 0 und A in Bild 1. Daneben müssen die numerischen Werte der konstanten Koeffizienten bekannt sein. In unserem Beispiel sind das die entsprechenden Werte für B_1 , B_2 und B_3 der Gl. (10). Bei praktischen Problemen, wie dem vorliegenden, können die diesbezüglichen Anfangs- und Randbedingungen als bekannt vorausgesetzt bzw. abgeschätzt werden, die konstanten Koeffizienten sind aber gewöhnlich experimentell zu bestimmen.

Zur Ermittlung dieser Koeffizienten wurden Versuche durchgeführt, bei denen der Feuchtegrad X_2 eines im Boden befindlichen Samenkorns (als Versuchsgut wurde Mais genommen) als Funktion der Zeit t gemessen wurde. Um die Experimente durchführen zu können, wurde eine Anzahl hölzerner Behälter der gleichen Größe hergestellt. Jeder Behälter wurde bis zur gewünschten Saattiefe mit gleichmäßig angefeuchtem Boden bestimmter Krümelgröße angefüllt. Dann wurden 100 Maiskörner in einem Abstand von 3,5 cm voneinander auf die Oberfläche gelegt und anschließend die Behälter voll mit Boden aufgefüllt, so daß das Saatgut in die gewünschte Saattiefe kam. Die Behälter wurden in einem Klimaraum mit konstanter Temperatur (15 °C) und konstanter relativer Luftfeuchte (60 %) aufbewahrt.

In unregelmäßigen Zeitintervallen wurde ein Behälter herausgenommen. Mit Hilfe einer speziellen Schaufel, die in Bild 4 zusammen mit einem Behälter zu sehen ist, wurden die 100 Maiskörner aus der entsprechenden Tiefe entnommen. Mit Hilfe der Trockenschrankmethode wurde der Feuchtegrad ermittelt. Ferner wurden die Samenkörner danach beurteilt, ob die Primärwurzel oder der Sproß zu sehen waren.

Die Versuche wurden mit vier verschiedenen Größen der Bodenteilchen und fünf verschiedenen Saattiefen durchgeführt. Auf den Einfluß dieser Größen kann in dieser Arbeit nicht eingegangen werden (siehe [1]). Hier wird nur ein Versuchsergebnis beispielhaft gebracht, um die theoretischen Zusammenhänge zu untermauern.

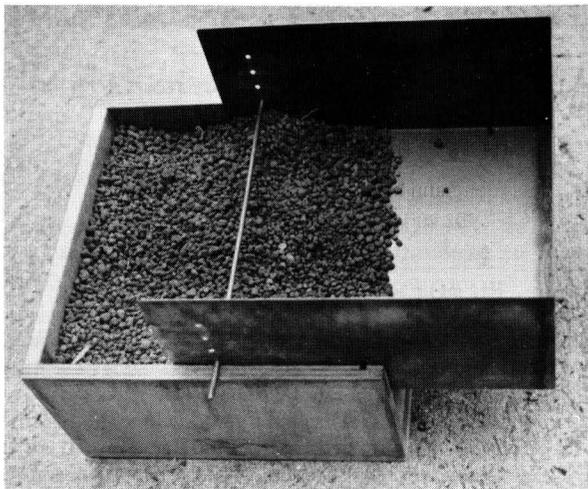


Bild 4. Versuchsbehälter mit Entnahmeschaufel.

5. Versuchsergebnisse

Trägt man die experimentell gefundenen Werte für den Feuchtegrad X_2 des Saatgutes als Funktion der Zeit t sämtlicher Versuchsreihen auf und vergleicht die Kurvenverläufe miteinander, so kann man drei charakteristische Gruppen unterscheiden. Bei der einen Gruppe, die zahlenmäßig am größten war, lief der gesamte Keimungsvorgang entsprechend Bild 1 ab, d.h. nach gewissen Zeiten erschien zunächst die Primärwurzel, dann auch der Sproß. Bei der zweiten Gruppe erschien nur die Primärwurzel und nicht der Sproß, d.h. der Keimungsvorgang wurde unterbrochen. Bei der dritten Gruppe erschien trotz eines anfänglichen Feuchtegradanstieges weder die Primärwurzel noch der Sproß, so daß bei diesem Saatgut nicht von Keimung gesprochen werden konnte.

Für jede der drei Gruppen gab es typische Kurvenverläufe $X_2(t)$. Hier soll nur als Beispiel ein Kurvenverlauf der ersten Gruppe betrachtet werden, Bild 5. Weitere Ausführungen im Detail findet man in [1].

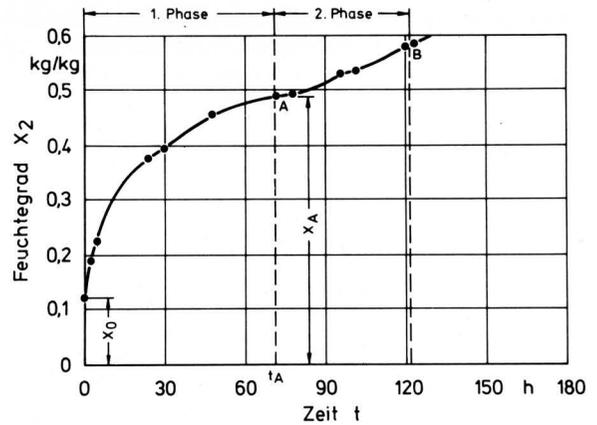


Bild 5. Experimentell ermittelter Feuchtegradverlauf des Saatgutes, bei dem beide Keimungsphasen durchlaufen wurden.

Verfolgt man die Meßpunkte in Bild 5 entsprechend dem Kurvenverlauf, so kann man erkennen, daß zu Beginn der Wasseraufnahme ein schneller Anstieg des Feuchtegrades X_2 erfolgt. Mit zunehmender Zeit flacht die Kurve ab, und zwar bis zum Punkt A, an dem die Primärwurzel erscheint. In der zweiten Keimungsphase ist dann wieder eine schnellere zeitliche Feuchtegradzunahme zu verzeichnen.

Die folgenden Ausführungen konzentrieren sich auf den Feuchtegradverlauf der ersten Keimungsphase. Zur Lösung der Differentialgleichung (10) müssen – wie früher erwähnt – neben den Koeffizienten B_1 , B_2 und B_3 die Anfangs- und Randbedingungen bestimmt werden. Die Anfangs- und Randbedingungen X_0 und X_A sind bekannt, da sie experimentell ermittelt wurden. Eine weitere Randbedingung für die Stelle A kann festgelegt werden. Eine mathematische Analyse der Kurvenverläufe sämtlicher Versuche, bei denen die Primärwurzel erschien, zeigte, daß an der Stelle A ein Wendepunkt vorhanden ist. Das bedeutet, daß an der Stelle A, an der die Primärwurzel erscheint, zwei Randbedingungen bekannt sind:

$$X_2(t_A) = X_A ;$$

$$\ddot{X}_2(t_A) = 0 .$$

6. Theoretische Ergebnisse

Eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung 3. Ordnung – mit konstanten Koeffizienten entsprechend Gl. (10) – lautet:

$$X_2(t) = X_p + C_1 e^{Kt} + C_2 \sin(\omega t + \Phi) e^{at} \quad (15)$$

Diese Gleichung muß der Anfangsbedingung $X_2(t=0) = X_0$ genügen:

$$X_0 = X_p + C_1 + C_2 \sin \Phi \quad (16)$$

Setzt man Gl. (16) in (15) ein, so kann man X_p eliminieren und erhält:

$$X_2(t) = X_0 - C_1(1 - e^{Kt}) - C_2(\sin \Phi - \sin(\omega t + \Phi) e^{at}) \quad (17)$$

Die numerischen Werte von K , a , ω und Φ sind abhängig von den numerischen Werten der unbekannt Koeffizienten B_1 , B_2 und B_3 . Die Konstanten C_1 und C_2 werden aus den beiden Randbedingungen $X_2(t_A) = X_A$ und $\ddot{X}_2(t_A) = 0$ in Verbindung mit Gl. (17) bestimmt. Man erhält dann folgende exakte Lösung der Gl. (10), die im Hinblick auf die folgenden Ausführungen in einer etwas anderen Form als bisher aufgelöst wurde:

$$\frac{X_2 - X_0}{X_A - X_0} = -F(1 - e^{Kt}) - G(\sin \Phi - \sin(\omega t + \Phi))e^{at} \quad (18),$$

mit:

$$F = \frac{C_1}{X_A - X_0}; \quad G = \frac{C_2}{X_A - X_0} \quad (19).$$

F und G sind bekannte Funktionen von K, a, ω, Φ und t_A. Gl. (18) ist gültig für den Bereich 0 ≤ t ≤ t_A und X₀ ≤ X₂ ≤ X_A. Das heißt, daß Gl. (10) damit für die erste Keimungsphase (bis zum Erscheinen der Primärwurzel) gelöst ist.

Welche numerischen Werte haben nun K, a, ω, Φ und damit F und G für ein bestimmtes Meßergebnis X₂(t), beispielsweise entsprechend Bild 5? Wie sieht die Form des zeitlichen Feuchtegradverlaufs entsprechend Gl. (18) aus?

Da Gl. (18) implizit ist, wird ein Umweg gewählt, der aber ebenfalls eine exakte Lösung des Problems darstellt und in gewisser Weise als eine neue Methode zur Behandlung von Differentialgleichungen höherer Ordnung angesehen werden kann.

Jede Exponentialfunktion und jede trigonometrische Funktion (sin, cos), auch die in Gl. (18), können unter Verwendung der Taylorschen Reihe durch ein Polynom ausgedrückt werden. Entwickelt man dieses Polynom vom Punkt t = 0 aus, so kann man Gl. (18) auf folgendes Äquivalentpolynom zurückführen:

$$\frac{X_2 - X_0}{X_A - X_0} = \sum_i^n g_i t^i \quad (20).$$

g_i sind die Konstanten der Glieder des Polynoms.

Da Gl. (18) eine Lösung der Differentialgleichung (10) ist, muß auch das Äquivalentpolynom nach Gl. (20) eine Lösung sein. Um diese Lösung in die Differentialgleichung (10) zur Bestimmung der Koeffizienten B₁, B₂ und B₃ einführen zu können, muß man sich auf eine bestimmte Anzahl n von Gliedern des Polynoms festlegen. Es hat sich ergeben, daß für die vorliegende Aufgabe ein Polynom 4. Grades, auch im Hinblick auf die einzuhaltenden Randbedingungen, eine gute explizite Lösung der Gl. (10) ist. Mit Hilfe der multiplen Regressionsanalyse konnten dann die gewünschten Koeffizienten unter Verwendung eines Digitalrechners ermittelt werden. Auf Einzelheiten kann an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

Nach Ermittlung der Koeffizienten B₁, B₂ und B₃ können die Konstanten K, a usw. der Gl. (18) errechnet werden. Auf diese Weise erhält man die exakte Lösung der Differentialgleichung (10). In Bild 6 ist für das Beispiel in Bild 5 der Kurvenverlauf nach Gl. (18) mit den angegebenen Konstanten eingetragen. Ähnliche theoretisch ermittelte Kurven erhielt man für sämtliche Versuchsreihen, bei denen die erste Keimungsphase abgeschlossen wurde.

7. Zusammenfassung

Der Keimungsvorgang besteht aus zwei Phasen, für die der zeitliche Feuchtegradverlauf des Saatguts experimentell ermittelt wurde.

Die erste Phase erstreckt sich bis zum Zeitpunkt des Erscheinens der Primärwurzel. Die zweite Phase ist beendet, wenn der Sproß erscheint. Diese beiden Phasen werden auch im Feuchtegradverlauf sichtbar. Anhand eines Versuchsergebnisses wurden diese Zusammenhänge verdeutlicht.

Zur Ermittlung der theoretischen Zusammenhänge wurde ein allgemeines Modell mit den am Wasserübergang beteiligten Komponenten erstellt. Dieses Modell führte unter Berücksichtigung spezieller Ansätze für die "treibende Kraft", die für den Wasserübergang verantwortlich ist, zu einer Differentialgleichung dritter Ordnung mit dem Feuchtegrad als abhängige und der Zeit als unabhängige Variable.

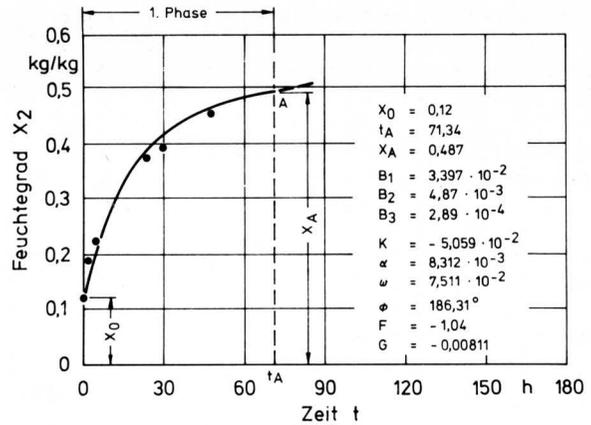


Bild 6. Theoretische Lösung für den Feuchtegradverlauf des Saatgutes für die 1. Phase des Beispiels in Bild 5.

Die erstellte Differentialgleichung wurde für die erste Keimungsphase gelöst. Dazu mußten die Anfangs- und Randbedingungen ermittelt werden. Von wesentlicher Bedeutung hierbei war die Feststellung, daß die Stelle im Feuchtegradverlauf, bei der die Primärwurzel erscheint, durch einen Wendepunkt charakterisiert wird. Die Lösungsgleichung für den Feuchtegrad des Saatgutes in Abhängigkeit von der Zeit wurde in allgemeiner Form erstellt.

Zur Bestimmung der zahlreichen Koeffizienten dieser Lösungsgleichung mußte ein spezieller Lösungsweg eingeschlagen werden, da die Gleichung bezüglich der zu bestimmenden Koeffizienten implizit ist. Für ein bestimmtes, experimentell ermitteltes Versuchsergebnis wurden dann beispielhaft die Koeffizienten ermittelt und die exakte Lösung graphisch dargestellt.

Schrifttum

Bücher sind durch ● gekennzeichnet

- [1] Akpaetok, O.: Zur Sorptionskinetik des Bodenwassers beim keimenden Saatgut. Diss. Univ. Hohenheim 1980, erschienen als Forschungsbericht Nr. 43 der Max-Eyth-Gesellschaft zur Förderung der Agrartechnik.
- [2] Holman, J.P.: Heat Transfer. New York, Toronto, London: Mc Graw-Hill, Tokio: Kogakusha Ltd., 3. Auflage, 1972, S. 83/87.
- [3] Sedgley, R.H.: The importance of liquid - seed contact during the germination of medicago tribuloides. Austr. J. agric. Res. Bd. 14 (1963) S. 646/54.
- [4] Manohar, M.S. u. W. Heydecker: Effects of water potential on germination of pea seeds. Nature Bd. 202 (1964) Nr. 4927, S. 22/24.
- [5] Phillips, R.E.: Water diffusivity of germination soybean, corn and cotton seed. Agron. J. Bd. 60 (1968) S. 568/71.
- [6] Mühlbauer, W.: Untersuchungen über die Trocknung von Körnermais unter besonderer Berücksichtigung des Gleichstromtrocknungsverfahrens. Forschungsbericht Nr. 1 (1974) der Max-Eyth-Gesellschaft zur Förderung der Agrartechnik.
- [7] Dasberg, S.: Soil water movement to germinating seeds. J. Expt. Bot. Bd. 22 (1971) Nr. 73, S. 999/1008.