

# Ermittlung von Luftzustandsgrößen mit Hilfe eines Tischrechners, eine Alternative zur Verwendung des h, x-Diagramms.

Von Heinz-Jürgen Ahlgrimm, Braunschweig-Völkenrode\*)

DK 533.27:628.8

Dieser Beitrag befaßt sich mit der Möglichkeit, durch Lufttemperatur und -feuchte gegebene Luftzustände, die als Tafelwerte und Diagramme (h,x-Diagramme) vorliegen, zur Vereinfachung von Auswertevorgängen in funktionaler Form in EDV-Anlagen bzw. in Tischrechnern abzuspeichern. Die Darstellung solcher Zusammenhänge durch Polynome wird an einem konkreten Beispiel vorgestellt.

## 1. Einleitung

Häufig gebrauchte Hilfsmittel im Bereich der Trocknungstechnik sind h,x-Diagramme nach *Mollier* für verschiedene Temperaturbereiche und in unterschiedlichen Maßstäben, in denen die Zusammenhänge zwischen verschiedenen, bestimmte Luftzustände kennzeichnenden Größen wie z.B. Temperatur  $\vartheta$ , relative Luftfeuchte  $\varphi$ , Feuchtegrad  $x$  und Enthalpie  $h$  der wasserdampfhaltigen Luft graphisch dargestellt sind.

Die Auswertung von Meßergebnissen mit Hilfe derartiger Diagramme ist meist sehr zeitaufwendig und erfordert vom Auswertenden ständig ein hohes Maß an Konzentration und Aufmerksamkeit.

Eine sehr viel schnellere und auch sicherere Auswertung von Meßergebnissen ist jedoch in vielen Fällen schon mit einem Tischrechner möglich. Voraussetzung hierfür ist die Speicherung der für den jeweiligen Anwendungsfall benötigten Zusammenhänge aus dem h,x-Diagramm in dem Rechner.

Eine derartige Speicherung wird in den folgenden Ausführungen an einem praktischen Beispiel für die Niedertemperaturtrocknung landwirtschaftlicher Stoffe dargestellt.

## 2. Voraussetzungen

### 2.1 Darstellung der funktionalen Zusammenhänge

Grundlage für eine Vereinfachung der Auswertung mit Hilfe des Rechners ist die Abspeicherung von Tafelwerten oder die mathematische Darstellung der benötigten Zusammenhänge durch Funktionen im Rechner. Die erste Lösung erfordert eine sehr hohe Speicherkapazität des Rechners, die beispielsweise einen Tischrechner weit überfordert und nur auf einer größeren EDV-Anlage gegeben ist. Sehr wenig Speicherplatz benötigt dagegen die Darstellung der Zusammenhänge durch bestimmte mathematische Funktionen.

Für h,x-Diagramme sind die naturgesetzmäßigen Abhängigkeiten zumeist nicht auf einfache Weise exakt mathematisch darstellbar, sondern sie müssen durch passende Funktionen angenähert werden.

Eine der wichtigsten Beziehungen, die nahezu bei jeder Auswertung benötigt wird, ist die Abhängigkeit des Wasserdampfdruckes bei Sättigung  $p_D''$  in Luft als Funktion der Temperatur  $\vartheta$ :

$$p_D'' = f(\vartheta) \quad (1)$$

Diese gewinnt man durch Integration der Clausius-Clapeyronschen Gleichung (Zusammenhang zwischen dem Dampfdruck und der Verdampfungswärme). Wegen der für zahlreiche Flüssigkeiten nicht genau bekannten Temperaturabhängigkeit der Verdampfungswärme ist eine allgemeine Lösung des Integrals nur angenähert möglich. Diese führt zumeist auf eine exponentielle Abhängigkeit zwischen dem Dampfdruck und der Temperatur. Als grobe Annäherungen erweisen sich die Formel von *August* [1]:

$$\log p_D'' = \frac{C_1}{\vartheta} + C_2 \quad (2)$$

mit  $C_1$  und  $C_2$  als Konstanten, die aus zwei Wertepaaren von  $p_D''$  und  $\vartheta$  bestimmt werden müssen, oder die Annäherung nach *Duprè-Rankine* [2]:

$$\log p_D'' = -\frac{C_1}{\vartheta} + C_2 \log \vartheta + C_3 \quad (3)$$

wozu die Konstanten  $C_1$  bis  $C_3$  aus drei Wertepaaren von  $p_D''$  und  $\vartheta$  abgeleitet werden müssen. Noch genauere Annäherungen geben *Brooker* [3] und [4], wobei im letzten Fall der Zusammenhang zwischen Sättigungsdruck und Temperatur im Temperaturbereich zwischen etwa -18 bis +250 °C dargestellt wird.

Als relativ einfache Formel, die recht genaue Werte liefert, erweist sich die aus der Meteorologie bekannte Beziehung von *Magnus* [5] (mit  $p_{D0} = 6,10$  mbar):

$$p_D'' = p_{D0} \cdot \exp \left[ \frac{7,445 \vartheta}{234,67 + \vartheta} \right] \quad (4)$$

Allen hier vorgestellten Beziehungen zwischen dem Sättigungsdruck und der Temperatur ist die exponentielle Abhängigkeit gemeinsam. Diese kann u.U. bei weiteren Auswertegängen zu einem höheren Aufwand bei der Lösung der Gleichungen führen, wodurch in jedem Falle eine größere EDV-Anlage für die Auswertung erforderlich ist.

Nach dem im folgenden behandelten Verfahren wird zwar für Aufstellung dieser speziellen wie auch anderer notwendiger Zusammenhänge aus dem h,x-Diagramm zunächst ebenfalls eine EDV-Anlage benötigt, die eigentliche Versuchsauswertung selber kann jedoch mit einem programmierbaren Tischrechner erfolgen.

### 2.2 Speicherung von Zusammenhängen in Form von Polynomen

Bei dem vorgeschlagenen Verfahren werden die für einen bestimmten Anwendungsfall benötigten Zusammenhänge durch Polynome der Art

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (5)$$

\*) Dr. rer. nat. H.-J. Ahlgrimm ist wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Landmaschinenforschung (Direktor: Prof. Dr.-Ing. W. Baader) der Bundesforschungsanstalt für Landwirtschaft, Braunschweig-Völkenrode.

dargestellt. Dieses Verfahren hatte sich schon bei der Ermittlung von Temperaturen aus Thermospannungswerten sehr gut bewährt [6]. Das Polynom lieferte dabei für einen bestimmten Wert der unabhängigen Variablen  $x$  (z.B. Thermospannung) den Wert der abhängigen Variablen  $y$  (Temperatur). Nicht alle Zusammenhänge sind jedoch durch Polynome darstellbar (stark schwankende Werte, zahlreiche Maxima und Minima sowie Unstetigkeitsstellen im Kurvenverlauf usw.).

Die Koeffizienten  $a_0$  bis  $a_m$  des Polynoms müssen durch polynomiale Regression [7] aus bekannten Wertepaaren (tabellierte Werte oder graphisch dargestellte Zusammenhänge) der abhängigen und unabhängigen Variablen mit einer EDV-Anlage ermittelt werden.

Die Annäherung durch das Polynom an den wahren Verlauf (durch den Grad des Polynoms) soll so gewählt werden, daß die geforderte Genauigkeit etwa die erreicht, die auch bei Benutzung üblicher  $h,x$ -Diagramme realisierbar ist. Übertriebene Forderungen in dieser Hinsicht führen zu einem höheren Speicherplatzbedarf durch die größere Anzahl von Polynomkoeffizienten und zu einer längeren Rechenzeit während der Auswertung.

### 3. Ein praktisches Beispiel

#### 3.1 Zu berechnende Größen

Für die Niedertemperaturtrocknung von Getreide und anderen landwirtschaftlichen Stoffen sollen bei einem durch die Temperatur  $\vartheta_1$  und relative Feuchte  $\varphi_1$  gegebenen Zustand der Luft im Temperaturbereich  $0 \leq \vartheta \leq 60$  °C folgende Größen ermittelt werden (vergl. auch Bild 1):

- die von der Luft bis zur Sättigung aus dem Trocknungsgut aufnehmbare Wassermenge  $\Delta x_{h_1}$  bei adiabatischer Trocknung,
- die von der Luft bis zur Sättigung aufnehmbare Wassermenge  $\Delta x_{\vartheta_1}$  bei isothermer Trocknung,
- die für den Fall (b) zusätzlich benötigte Wärmemenge  $\Delta h$ , die einer Wärmequelle (z.B. Speicher) entnommen werden muß.

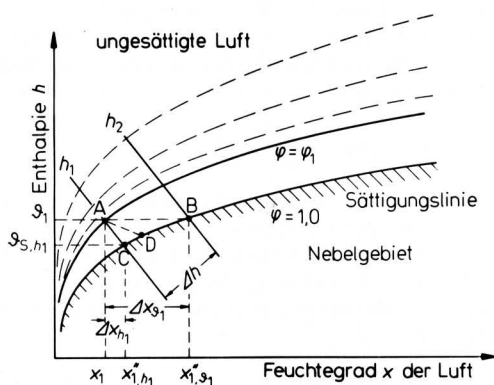


Bild 1.  $h,x$ -Diagramm nach Mollier zur Ableitung spezieller Luftzustandsgrößen.

#### 3.2 Darstellung der Beziehungen im $h,x$ -Diagramm

Im  $h,x$ -Diagramm von Bild 1 ist der Anfangszustand der Luft bei der Temperatur  $\vartheta_1$  und der relativen Feuchte  $\varphi_1$  mit A markiert. Diesem Zustand entspricht ein Feuchtegrad von  $x_1$  [g/kg trockene Luft] und ein Wärmeinhalt der ungesättigten Luft (Enthalpie)  $h_1$ .

- Wird der Luft während des Trocknungsvorganges keine Wärme zugeführt, wie das meistens für eine Trocknung von Halmgutstapeln (Belüftungstrocknung) der Fall ist [8], so verläuft der Vorgang adiabatisch auf der Linie konstanter Enthalpie (Gerade A C). Unter Wasserdampfaufnahme aus dem Trocknungsgut bis zur vollständigen Sättigung ( $\varphi = 1,0$ ) kühlt sich die Luft dabei auf den Wert  $\vartheta_{S,h_1}$  ab. Der maximale Feuchtegrad der Luft in diesem Punkt beträgt  $x_{1,h_1}''$ . Das bei adiabatischer Trocknung entstehende Sättigungsdefizit beträgt somit bestenfalls:

$$\Delta x_{h_1} = x_{1,h_1}'' - x_1 \quad (6)$$

- Kann die Temperatur  $\vartheta_1$  während des Trocknungsvorganges durch Wärmezufuhr konstant gehalten werden, wie das z.B. in einem temperaturgeregelten Trockenofen der Fall ist, so wird vom Ausgangspunkt A über die Isotherme  $\vartheta_1 = \text{const.}$  bei vollständiger Sättigung der Luft der Punkt B mit der Enthalpie  $h_2$  erreicht. Der maximale Feuchtegrad der Luft in diesem Punkt ist  $x_{1,\vartheta_1}''$  und somit das Sättigungsdefizit bei isothermer Trocknung

$$\Delta x_{\vartheta_1} = x_{1,\vartheta_1}'' - x_1 \quad (7)$$

- Die für die Trocknung bei isothermem Verlauf benötigte zusätzliche Wärmemenge (Heizenergie) beträgt somit

$$\Delta h = h_2 - h_1 \quad (8)$$

Bei der praktischen Trocknung landwirtschaftlicher Stoffe kann auch durch Atmungsvorgänge oder mikrobielle Stoffumsetzungen Energie freigesetzt werden, durch die dem Trocknungsprozeß Wärme zugeführt wird. Die Trocknung verläuft dann nicht mehr adiabatisch, sondern nimmt im  $h,x$ -Diagramm einen Verlauf ähnlich der Geraden A D [8].

#### 3.3 Benötigte Zusammenhänge

Für die Berechnung der Feuchtegrade bei Sättigung  $x_{1,h_1}''$  (Punkt C) und  $x_{1,\vartheta_1}''$  (Punkt B) wird in jedem Falle der Zusammenhang zwischen der Temperatur  $\vartheta$  und dem Feuchtegrad der Luft bei Sättigung  $x''$  benötigt. Dieser wird näherungsweise in ein Polynom entwickelt:

$$x'' = f(\vartheta) = a_0 + a_1 \vartheta + a_2 \vartheta^2 + \dots + a_k \vartheta^k \quad (9)$$

Zur Ermittlung des Feuchtegrades  $x_1$  der Luft bei der Temperatur  $\vartheta_1$  und der relativen Feuchte  $\varphi_1$  werden neben der Definition der relativen Luftfeuchte  $\varphi$

$$\varphi = \frac{p_D}{p_D''} \quad (10)$$

folgende weitere Zusammenhänge benutzt:

$$x = \frac{R_L}{R_D} \frac{\varphi p_D''}{p - \varphi p_D''} \quad (11)$$

$$x'' = \frac{R_L}{R_D} \frac{p_D''}{p - p_D''} \quad (12)$$

Darin sind  $R_L$  und  $R_D$  die Gaskonstanten für Luft und Wasserdampf,  $p_D$  der Wasserdampfdruck in der Luft bei der Temperatur  $\vartheta$  und relativen Feuchte  $\varphi$ ,  $p_D''$  der Sättigungsdampfdruck ( $\varphi = 1,0$ ) bei derselben Temperatur und  $p$  der Luftdruck (Barometerstand). Durch Eliminieren von  $p_D''$  und  $p$  in den Gln. (11) und (12) und mit  $R_L/R_D = 0,622$  erhält man den Zusammenhang zwischen  $\varphi$  und  $x$ :

$$x = \frac{0,622 x'' \varphi}{0,622 + x'' (1 - \varphi)} \quad (13)$$

Hieraus kann die benötigte Größe  $x_1$  in den Gln. (6) und (7) mittels des Polynoms Gl. (9) bei der Temperatur  $\vartheta_1$  und Feuchte  $\varphi_1$  berechnet werden. Gl. (13) stellt den Verlauf von  $x$  auf einer durch  $\vartheta$  (und damit durch  $x''$ ) gegebenen Isothermen A B in Bild 1 dar.

Die Enthalpien  $h_1$  (Linie A C) und  $h_2$  lassen sich nunmehr aus der bekannten linearen Beziehung für ungesättigte Luft

$$h = c_{pL} \vartheta + x (r_0 + c_{pD} \vartheta) \quad (14)$$

ermitteln. Darin sind [1]  $c_{pL} = 1,005$  kJ/kg die spezifische Wärmekapazität der Luft,  $r_0 = 2,499$  kJ/kg K die Verdampfungswärme von Wasser bei 0 °C und  $c_{pD} = 1,842$  kJ/kg K die spezifische Wärmekapazität von Wasserdampf. Die Enthalpien  $h_1$  und  $h_2$  ergeben sich jeweils durch Einsetzen der Temperatur  $\vartheta_1$  und der Feuchtegrade  $x_1$  (im Punkt A) bzw.  $x''_1, \vartheta_1$  (im Punkt B auf der Isothermen).

Zur Ermittlung des Feuchtegrades  $x''_{1,h_1}$  im Punkt C von Bild 1 nutzt man die Bedingung, daß die Enthalpie  $h_1$  bei Zunahme der Luftfeuchte bis zur Sättigung konstant bleiben muß: Der Feuchtegrad  $x''_{1,h_1}$  kann mit Hilfe des Polynoms Gl. (9) ermittelt werden, wenn die Temperatur  $\vartheta_{S,h_1}$  im Punkt C bekannt ist. Diese Temperatur läßt sich als Schnittpunkt der Adiabaten  $h_1$  mit der Sättigungskurve  $x'' = f(\vartheta)$  errechnen, was aber bei höheren Polynomgraden  $k$  leicht zu großem Rechenaufwand führt. Eine numerische Behandlung wäre dann langwierig und nur mit einer größeren EDV-Anlage möglich. Wesentlich einfacher läßt sich das Problem lösen, indem zwischen der Enthalpie  $h$  bei Sättigung und der Temperatur ein Zusammenhang hergestellt wird. Hier bietet sich wiederum die Polynomentwicklung an:

$$\vartheta_S = g(h'') = b_0 + b_1 h'' + b_2 h''^2 + \dots + b_m h''^m \quad (15)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann wegen der Bedingung im Punkt C

$$h_1 = h''_1(\vartheta_{S,h_1}) \quad (16)$$

durch Einsetzen von  $h_1$  in Gl. (15) die Temperatur  $\vartheta_{S,h_1}$  errechnet werden. Ist diese bekannt, so folgt damit und mit dem Polynom Gl. (9) der Wert  $x''_{1,h_1}$  zur Ermittlung des adiabatischen Sättigungsdefizits nach Gl. (6). Zur Lösung dieser Aufgabe sind somit insgesamt nur die beiden Polynome Gln. (9) und (15) notwendig.

### 3.4 Polynomkoeffizienten

Die Polynomkoeffizienten  $a_0, a_1$  bis  $a_k$  und  $b_0, b_1$  bis  $b_m$  wurden mit Hilfe des IBM-SSP Hauptprogramms POLRG [7] mit der EDV-Anlage 4004/151 der FAL ermittelt. Die Ausgangswerte von  $\vartheta, x''$  und  $h''$  im Bereich zwischen 0 und 60 °C wurden den Tafeln in [1] entnommen.

Es zeigte sich, daß für beide Zusammenhänge Gln. (9) und (15) jeweils ein Polynom 6. Grades zur Annäherung an den wahren Verlauf (Fehler  $\pm 0,05$  g/kg bzw.  $\pm 0,1$  °C) über dem gesamten Temperaturbereich von 0–60 °C ausreicht; diese Genauigkeit entspricht etwa der, die beim Ablesen aus stark gedehnten  $h, x$ -Diagrammen erreichbar ist.

Durch Modifikation des SSP-Programmes wäre eine weitere Erhöhung der Genauigkeit möglich, jedoch steigen dann Rechenzeiten und Speicherplatzbedarf (im Tischrechner begrenzt) für die Auswertung an. Für die Polynomkoeffizienten der Gln. (9) und (15) wurden die Werte in **Tafel 1** ermittelt.

### 4. Programmierung

Die Programmierung des Rechengangs kann je nach dem vorhandenen Rechengertät wie z.B. Tischrechner oder größere EDV-Anlage sehr verschieden erfolgen. Hier soll auf Einzelheiten nicht weiter eingegangen werden. Im konkreten Fall wurde der Rechengang in Form verschiedener selbständiger Teilprogramme für einen Tischrechner [9] programmiert [10], dessen Speicherkapazität für Pro-

$x'' = f(\vartheta)$	$\vartheta_S = g(h'')$
$a_0 = 3,8382$	$b_0 = -5,6258$
$a_1 = 0,2544$	$b_1 = 0,6429$
$a_2 = 0,0152$	$b_2 = -4,5159 \cdot 10^{-3}$
$a_3 = -3,582 \cdot 10^{-4}$	$b_3 = 2,1772 \cdot 10^{-5}$
$a_4 = 2,374 \cdot 10^{-5}$	$b_4 = -6,1946 \cdot 10^{-8}$
$a_5 = -3,957 \cdot 10^{-7}$	$b_5 = 9,2898 \cdot 10^{-11}$
$a_6 = 3,392 \cdot 10^{-9}$	$b_6 = -5,6374 \cdot 10^{-14}$

$x''$  in g/kg und  $\vartheta$  in °C       $\vartheta_S$  in °C und  $h''$  in kJ/kg

**Tafel 1.** Werte der Polynomkoeffizienten der Gln. (9) und (15).

gramme (maximal 224) zu etwas mehr als die Hälfte ausgenutzt wurde. Durch die Abspeicherung der Polynomkoeffizienten in 14 seiner 25 Konstanten-Speicher ist es möglich, den Programmspeicherplatzbedarf so gering wie möglich und die Rechenzeiten kurz zu halten [10]. Je nach angewähltem Programm oder Teilprogramm betragen die Rechenzeiten zwischen etwa 3 und 8 s. Eine schnellere Auswertung ist nur noch mit einer größeren EDV-Anlage möglich, wobei jedoch u.U. erhebliche Zeiten für die Erstellung der Datenträger (z.B. Lochkarte) benötigt werden, wenn dies nicht automatisch oder bei einer Verarbeitung der Daten "on-line" während der Messung erfolgt.

### 5. Zusammenfassung

Zeitraubende Auswertearbeiten von Trocknungsversuchen mit Hilfe von  $h, x$ -Diagrammen und Tafeln von *Mollier* können durch Benutzung von EDV-Anlagen bzw. Tischrechnern wesentlich einfacher und schneller erfolgen. Notwendige Tafelwerte können hierzu in Form von funktionalen Zusammenhängen im Rechner gespeichert werden.

In einem praktischen Beispiel wird die Speicherung von Zusammenhängen in Form von Polynomen zur Auswertung von Trocknungsversuchen mittels eines programmierbaren Tischrechners dargestellt.

### Schrifttum

Bücher sind durch • dargestellt

- [1] • *Krischer, O.*: Trocknungstechnik Bd. I: Die wissenschaftl. Grundlagen der Trocknungstechnik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1963.
- [2] • *Näser, K.-H.*: Physikalische Chemie. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1974.
- [3] *Brooker, D.B.*: Mathematical Model of the Psychrometric Chart. Trans. ASAE Bd. 10 (1967) Nr. 4, S. 58/60, 63.
- [4] Anonym: Psychrometric Data. ASAE Yearbook, 1978, S. 365/69.
- [5] • Anonym: Meyers Lexikon der Technik und exakten Naturwissenschaften, Bd. I, S. 511, Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut, 1969.
- [6] *Ahlgrimm, H.-J.*: Programm zur Auswertung von Trocknungsversuchen. Anlage zum Abschlußbericht "Überführung tierischer Exkremente in einen umweltfreundlichen Feststoff hohen Nutzwertes durch biologisch-thermische Behandlung". BML 114-1553.3-61, März 1976.
- [7] Anonym: IBM-Application Program, 1130 Subroutine Package. (1130-CM-02X), S. 151 ff.
- [8] • *Wieneke, F.*: Verfahrenstechnik der Halmfutterproduktion. Göttingen: Eigenverlag Prof. Dr. F. Wieneke, 1972, S. 268.
- [9] • Anonym: Hewlett-Packard Bedienungshandbuch für HP 97.
- [10] *Ahlgrimm, H.-J.*: Programmbeschreibung zur Auswertung von Trocknungsversuchen mittels eines im Tischrechner HP 97 gespeicherten  $i, x$ -Diagrammes, Institutsbericht 1979.