[56] *Janssen, J.:* Hinweise für die Konstruktion von Fahrerkabinen – Klimatechnische Maßnahmen. Vortrag auf der VDI-Jahrestagung Landtechnik 1975, Braunschweig (erscheint demnächst in Grundl. Landtechnik).
[57] *Batel, W.:* Entwicklungsstand und -tendenzen beim Filtrationsentstauber. Staub-Reinh. Luft 33 (1973) Nr. 9, S. 359/67.
[58]•*Dalla Valle, J.M.:* Exhaust hoods. New York: Industrial Press 1946.
[59]•*Hemeon, W.G.L.:* Plant and Process Ventilation. New York: Industrial Press 1965.
[60]•*Baturin, W.:* Lüftungsanlagen für Industriebauten. Berlin: VEB-Verlag Technik 1953.
[61] *Strauß, H.J.:* Über eine Näherung zur Bestimmung von Strömungsfeldern von Absaugehauben. Staub-Reinh. Luft 33 (1973) Nr. 3, S. 142/46.
[62] *Engels, L.H. u. G. Willert:* Kriterien und Möglichkeiten zur Erfassung des Staubes in Industriebetrieben. Staub-Reinh. Luft 33 (1973) Nr. 3, S. 140/41.
[63] *Muschelknautz, E.:* vt-Hochschulkurs II: Mechanische Verfahrenstechnik. Verfahrenstechnik, Beilage Nr. 1/6 (1972/73).
[64] *Batel, W.:* Der Waschentstauber – Entwicklungsstand und -tendenzen. Staub-Reinh. Luft 33 (1973) Nr. 12, S. 491/97 und 34 (1974) Nr. 2, S. 52/55.
[65] *Wächter, G.:* Technische Möglichkeiten zur Behandlung oder Abscheidung gasförmiger luftfremder Stoffe – insbesondere im Hinblick auf die Desodorisierung. Grundl. Landtechnik Bd. 23 (1973) Nr. 4, S. 92/98.
[66] *Wolfermann, H.F.:* Emission von Geruchsstoffen aus der Landwirtschaft – Vorkommen, Umfang und Grundlagen zur Abschätzung der Wirtschaftlichkeit von Verfahren zum Umweltschutz. Proceedings of the third international clean air congress Düsseldorf 1973, E 124/ E 127. Düsseldorf: VDI-Verlag 1973.
[67] *Hammer, K.:* Vergleich verschiedener Methoden zur Aufbereitung der Abluft aus Schweineställen unter Praxisbedingungen. Arbeitstagung der Referenten "Landtechnik" und "Landwirtschaftliches Bauwesen", Würzburg 1975.

Über ein Optimierungsproblem bei der Reparatur von Maschinen

Von J. Gruszczynski, Krakau und A.D. Soloviev, Moskau*)

DK 62-7:519.2:518.5

Die Arbeit behandelt das Problem der optimalen Auslegung von Reparatur- und Wartungslinien für einen Maschinenpark. An den Maschinen können Fehler der verschiedensten Art auftreten. Bei einem Fehler wird das schadhafte Maschinenteil durch ein Reserveteil ersetzt. Das schadhafte Maschinenteil wandert in die Reparatur. Für jedes Maschinenteil gibt es eine Reparaturgruppe, die aus mehreren Reparatureinheiten (Personen) besteht. Unter beliebigen Annahmen in Bezug auf die mathematischen Verteilungen der für die Auswechslung der Maschinenteile und ihrer Reparatur benötigten Zeiten, sowie unter der Bedingung, daß diese Zeitspannen relativ zu den Intervallen zwischen den Zeitpunkten des Auftretens von Fehlern kurz sind, wird die optimale Anzahl von Reserveteilen und Reparatureinheiten für jedes Maschinenteil gefunden.

Ebenso wie das hier behandelte Beispiel der optimalen Auslegung von Reparaturlinien lassen sich manche andere Probleme der Landtechnik auf Service- oder Warteschlangenprobleme zurückführen. Die mathematische Theorie zur Behandlung von Warteschlangenproblemen ist ausreichend entwickelt. Auch die Simulation selbst komplexer Modelle mit mehreren Warteschlangen ist mit den modernen Simulationstechniken problemlos. Die vorliegende Arbeit ist ein Beispiel für die Behandlung eines Warteschlangenproblems mit theoretischen Mitteln.

*) bearbeitet von Dr.-Ing. W. Paul Braunschweig

**) Dr.-Ing. Jerzy Gruszczynski ist wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Landwirtschaftlichen Akademie in Krakau, Polen,und Prof. Dr. Alexander D. Soloviev ist wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Staatlichen Lomonossov-Universität, Moskau, UdSSR.*

1. Einleitende Systembeschreibung

In einem Maschinenpark arbeitet eine große Zahl von Maschinen des gleichen Typs. Jede Maschine ist aus verschiedenen Teilen zusammengesetzt. Während der Arbeit treten an den Maschinen zufällige Schäden auf. Bei einem Schaden wird das schadhafte Maschinenteil ausgewechselt, d.h. ein intaktes Teil wird dem Vorrat entnommen und in die Maschine eingesetzt. Während der Austauschzeit ist die Maschine nicht zu nutzen, und es treten in dieser Zeit auch keine weiteren Schäden an anderen Teilen dieser Maschine auf.

Das schadhafte Teil wird nach dem Austausch in die Reparaturwerkstatt eingeliefert. Dort wird es repariert, um anschließend dem für den Austausch bereitgehaltenen Vorrat an Maschinenteilen zugewiesen zu werden. Die Reparaturwerkstatt besteht aus spezialisierten Servicelinien, die jeweils nur ein spezielles Maschinenteil reparieren. Die Linien können aus mehreren Arbeitsplätzen zur gleichzeitigen Reparatur mehrerer Maschinenteile bestehen.

Die Schäden an den Maschinen verursachen wirtschaftliche Verluste, die sich aus folgenden Anteilen zusammensetzen:
- Verluste, die durch die Wartezeiten der Maschine während eines Austauschs verursacht werden;
- Verluste, die durch zusätzliche Maschinenwartezeiten verursacht werden, weil momentan der Vorrat an benötigten Maschinenteilen ausgeschöpft ist;

– die Instandhaltungskosten der Reparaturwerkstatt;
– die Lagerkosten für die Reserve an Maschinenteilen;
– die Kosten des Personals, das mit dem Austausch der Maschinenteile beschäftigt ist.

Alle Einzelkosten pro Zeiteinheit können angegeben werden.

Es ist ferner angenommen, daß der Austausch eines Maschinenteils ohne Verzögerung durchgeführt wird. Eine Warteschlange von auf den Austausch wartenden Maschinen bildet sich also nicht. Mit dieser Annahme hängen sämtliche Verluste dann von folgenden Parametern des Servicesystems ab:
– von der Zahl der Arbeitsplätze in jeder Servicelinie;
– von der Zahl der in Reserve liegenden Maschinenteile jeden Typs.

Die hier interessierende Aufgabe besteht darin, die Parameterwerte zu finden, bei denen die Verluste zum Minimum werden.

2. Das mathematische Modell

Es sei n die Anzahl der arbeitenden Maschinen. Bei jeder Maschine können Schäden vom Typ i auftreten (Schaden am Maschinenteil des i-ten Typ). Die Schäden treten mit der zeitlichen Häufigkeit λ_i auf $(i = 1, 2, ..., l)$.

Sofort nach dem Auftreten eines Fehlers erfolgt der Austausch des Maschinenteils. Die Dauer des Austausches ξ_i ist eine Zufallsveränderliche mit der Verteilung F_i und dem Mittelwert T_i:

$$P\left\{\xi_i < t\right\} = F_i(t) \; ; \quad E\left[\xi_i\right] = T_i.$$

Das schadhafte Maschinenteil des i-ten Typs wird sofort nach dem Austausch in die i-te Linie des Servicesystems gegeben. Die i-te Linie besteht aus r_i Arbeitsplätzen. An jedem Arbeitsplatz kann zur gleichen Zeit nur ein Maschinenteil repariert werden. Wenn die Reparatur zu Ende ist, geht das Maschinenteil in den Vorrat von Reserveteilen ein. Im System gibt es m_i Reserveteile des i-ten Typs. Die Reparaturzeiten η_i eines Teiles vom i-ten Typ folgen der Verteilung G_i:

$$P\left\{\eta_i < t\right\} = G_i(t).$$

Wenn alle Plätze der i-ten Reparaturlinie besetzt sind, warten die neu ankommenden Maschinenteile auf ihre Reparatur in dieser Linie. Falls der Vorrat an Reserveteilen vom i-ten Typ ausgeschöpft ist, wartet eine schadhafte Maschine, bei der das i-te Maschinenteil ausgetauscht werden muß, bis zu dem Zeitpunkt, an dem eins der benötigten Maschinenteile dieses Typs repariert ist.

Für die in der Zeiteinheit entstehenden Verluste werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

C_0 – Verluste, verursacht durch die Wartezeit einer Maschine;
C_{1i} – Lagerkosten für eine Reserveuntergruppe des i-ten Typs;
$C_{2i} r_i + C_{3i}$ - variable und fixe Kosten der Reparaturlinie für den i-ten Typ, die aus r_i Arbeitsplätzen besteht.

Die Komponente C_{3i} muß im folgenden nicht weiter beachtet werden, weil sie keinen Einfluß auf die Optimierung ausübt. Dasselbe gilt auch für die Unterhaltungskosten der den Austausch der schadhaften Maschinenteile ausführenden Personen.

Die Arbeit des Servicesystems wird unter stationären Bedingungen betrachtet. Wenn P_k die stationäre Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß zum betrachteten Zeitpunkt sich gerade k Maschinen in der auf einen Austausch wartenden Warteschlange befinden, so ist die Summe der Verluste pro Zeiteinheit in Abhängigkeit von den Systemparametern gleich:

$$\Phi = C_0 \sum_{k=0}^{n} k P_k + \sum_{i=1}^{l} C_{1i} m_i + \sum_{i=1}^{l} C_{2i} r_i \qquad (1).$$

Aus Gl. (1) folgt, daß die Optimierung im Prinzip darauf zurückgeführt werden kann, die stationären Wahrscheinlichkeiten P_i zu finden. Im einfachsten Fall, wenn es nur einen Typ von Maschinenteilen $(l = 1)$ gibt und die Verteilungen F_1 und G_1 exponentiell sind:

$$F_1(t) = 1 - e^{-\nu t} \; ; \qquad G_1(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

reduziert sich das Problem auf die Untersuchung eines einfachen *Markow*-Prozesses im Phasenraum $\Omega = \left\{(i,j)\right\}$. Dabei ist i die Zahl der sich in der Warteschlange befindenden Maschinen und j ist die Zahl der sich in der Reparatur befindenden Maschinenteile. Die stationären Wahrscheinlichkeiten P_{ij} dieses Prozesses summieren sich einfach zu den Wahrscheinlichkeiten P_i:

$$P_i = \sum_j P_{ij}\,.$$

Bei großem n kann man jedoch auch für die einfachsten Fälle Formeln für die Wahrscheinlichkeiten P_{ij} nicht angeben. Andererseits sind jedoch auch die Verteilungen der Austauschzeit und der Reparaturzeit praktisch nie exponentiell. Bei einer guten Serviceorganisation werden diese Zeiten nur wenig von einem Mittelwert abweichen.

Die unter Ingenieuren verbreitete Meinung, die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten hingen nicht oder nur in geringem Maße von der Verteilung der Servicezeiten (in unserem Fall der Reparaturzeitverteilung) ab, ist für die meisten Systeme falsch. Die Annahme einer exponentiellen Verteilung für die Servicezeiten kann die Lösung der betrachteten Aufgabe wesentlich verfälschen.

Hier wird deshalb ein anderer Weg eingeschlagen. Die Annahme von freien Austauschzeit- und Reparaturzeitverteilungen wird beibehalten, daneben werden jedoch gewisse andere plausible Zusatzannahmen getroffen. Es wird so ein angenähertes Modell erstellt, das untersucht werden kann.

3. Das angenäherte Servicemodell

Im angenäherten Modell wird angenommen, daß:

1. die durchschnittliche Zeit der störungsfreien Maschinenarbeit um ein mehrfaches länger ist als die durchschnittliche Servicezeit (Austausch und Reparatur);
2. die durchschnittliche Reparaturzeit wesentlich länger als die durchschnittliche Austauschzeit ist;
3. die Zahlen der in Reserve liegenden Maschinenteile m_i so groß sind, daß die durch die Ausschöpfung des Vorrats verursachten Maschinenwartezeiten verhältnismäßig klein sind.

Wenn die Reserven unbeschränkt wären, könnten die Verluste getrennt für jeden Typ von Maschinenteilen berechnet werden. Indem der selten auftretende Fall der gleichzeitigen Ausschöpfung der Vorräte für zwei oder mehrerer Maschinenteile vernachlässigt wird, wird auch im Fall eines ausgeschöpften Vorrats der Verlust für jeden Maschinenteil getrennt berechnet:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i\,.$$

Da die Austauschzeit der Maschinenteile sehr viel kürzer als die störungsfreie Arbeitszeit der Maschine ist, kann angenommen werden, daß die Schadensraten der verschiedenen Typen von Maschinenteilen *Poisson*-verteilt sind. Weil sich die Schadensraten der einzelnen Maschinen summieren und die Maschinenzahl meistens groß ist, werden auch die Summen der Schadensraten einer *Poisson*-Verteilung sehr ähnlich sein.

Es ist leicht zu berechnen, daß die Schadensrate für den i-ten Typ gleich

$$\lambda_{i0} = \frac{n\,\lambda_i}{1 + \lambda\, T} \qquad (2)$$

wird, wobei

$$\lambda = \sum_{i=1}^{e} \lambda_i \; ; \qquad T = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{e} \lambda_i\, T_i\,.$$

In den Zeitabschnitten, in denen der Vorrat ausgeschöpft ist, ist die Rate der in die Reparaturlinie gehenden Maschinen gleich Null. Schäden treten zwar weiterhin auf, aber die schadhaften Untergruppen kommen erst mit einer Verzögerung zur Reparatur, wenn instandgesetzte Maschinenteile zum Austausch zur Verfügung stehen. In der Werkstatt bildet sich dann eine Warteschlange. Aufgrund der Annahme 2 haben Wartezeiten vor dem Austausch keinen Einfluß auf die Arbeit der Reparaturlinie.

Zum Servicesystem kommt also ein Strom von reparaturbedürftigen Maschinenteilen, dessen Intensität (Schadensrate) aus Gl. (2) hervorgeht und *Poisson*-verteilt ist. Die Wartezeit einer Maschine bei einem Schaden vom i-ten Typ besteht aus:

- der Zeit für den Austausch des Maschinenteils,
- der Wartezeit wegen der Ausschöpfung des Vorrats.

Unter Beachtung der gemachten Annahmen werden diese beiden Anteile getrennt betrachtet.

Die durchschnittliche auf die Zeiteinheit bezogene Wartezeit, verursacht durch den Austausch einer Untergruppe vom i-ten Typ, ist gleich:

$$\lambda_{i0}\, T_i = \frac{n\, \lambda_i\, T_i}{1 + \lambda\, T} .$$

Die durch eine Ausschöpfung des Vorrats verursachten Wartezeiten haben keinen Einfluß auf die Austauschzeit. Schäden treten zwar nach wie vor auf, der Austausch erfolgt jedoch erst mit einer Verzögerung. Die Dauer der durch Mangel an Reserveteilen verursachten Wartezeiten wird wie folgt berechnet. Wenn ein Strom von schadhaften Maschinenteilen ohne Störungen zum Servicesystem kommt, so bezeichnen wir die stationäre Wahrscheinlichkeit, daß es in der i-ten Servicelinie gerade k Maschinenteile gibt, mit P_{ki}. Wenn $k > m_i$ ist, dann befinden sich gerade m_i Maschinenteile in der Reparaturwerkstatt, während $k - m_i$ Maschinen nicht arbeiten, weil sie auf ein instandgesetztes Teil für den Austausch warten. Die durchschnittliche Wartezeit wegen der Ausschöpfung des Vorrats für den i-ten Typ ist gleich

$$\sum_{k > m_i} (k - m_i)\, P_{ki} .$$

Die Verluste, die durch Schäden an der i-ten Untergruppe entstehen, berechnen sich nach der Formel

$$\Phi_i = C_0 \frac{n\, \lambda_i\, T_i}{1 + \lambda\, T} + C_0 \sum_{k > m_i} (k - m_i)\, P_{ki} + C_{1i}\, m_i + C_{2i}\, r_i .$$

Die Gesamtverluste, entstanden aus Schäden aller Art, werden gleich

$$\Phi = C_0 \frac{n\, \lambda\, T}{1 + \lambda\, T} + \sum_{i=1}^{l} \left[C_0 \sum_{k > m_i} (k - m_i)\, P_{ki} + C_{1i}\, m_i + C_{2i}\, r_i \right] \qquad (3).$$

Die Aufgabe kann jetzt exakt formuliert werden. Aufgrund der praxisnahen Annahmen liegt die Lösung des reellen Problems sehr nahe der Lösung des Modells.

Ein Servicesystem bestehe aus i Linien, i = 1, 2, ..., l. Jede Linie besteht aus r_i Arbeitsplätzen. Die Verteilung der Servicezeit $G_i(t)$ ist beliebig. Zur Linie kommt ein *Poisson*-Strom an Maschinenteilen mit der Intensität λ_{i0}. Für jeden Typ von Maschinenteilen existiert eine Zahl von m_i Reserveteilen.

Es gilt, nun die Parameter m_i und r_i so zu finden, daß die Verluste nach Gl. (3) minimal werden.

Da $\min \Phi = \sum_{i=1}^{e} \min \Phi_i$ ist, wird das Problem auf eine Verlustminimierung in jeder Linie des Servicesystems zurückgeführt. Daher lassen wir in den folgenden Ausführungen den ersten Teil des Ausdruckes (3) weg, da er von m_i und r_i nicht abhängt. In der Formel für Φ_i wird gesetzt:

$$\Phi_i = \Phi_0$$
$$m_i = m \,;\; r_i = r \,;$$
$$G_i(t) = G(t) \;;\; C_{1i} = C_1 \;;\; C_{2i} = C_2 .$$

Endgültig ist also die Aufgabe darauf zurückgeführt, das Funktionsminimum folgender Funktion zu finden:

$$\Phi_0(m, r) = C_0 \sum_{k > m} (k - m)\, P_k + C_1\, m + C_2\, r \qquad (4),$$

wobei P_k die stationären Wahrscheinlichkeiten der Anwesenheit von k Maschinenteilen im Servicesystem bezeichnen.

Das Funktionsminimum von Gl. (4) kann man z.B. wie folgt berechnen. Zunächst wird bei festgelegtem r das Funktionsminimum gesucht. Dieses Minimum sei für $m = m_0(r)$ erreicht. Anschließend wird das Minimum von

$$\Phi_0 \left[m_0(r), r \right]$$

gesucht. Die Differenz

$$\Phi_0(m + 1, r) - \Phi_0(m, r) = C_1 - C_0 \sum_{k > m} P_k$$

läßt erkennen, daß sie monoton mit dem Anstieg von m wächst. Den Minimumspunkt $m_0 = m_0(r)$ kann man mit der Bedingung

$$\sum_{m_0 + 1}^{\infty} P_k < C_1/C_0 < \sum_{m_0}^{\infty} P_k$$

festlegen. Für großes m_0 gilt annähernd

$$\sum_{m_0}^{\infty} P_k = C_1/C_0 \qquad (5).$$

4. Der Fall r = 1 (jede Reparaturlinie besteht aus nur einem Arbeitsplatz)

In diesem Fall wird die bildende Funktion der stationären Wahrscheinlichkeiten P_k mit der *Polatschek-Kchintschyn*'schen Formel (s. z.B. [1]) ausgedrückt.

$$p(z) = \sum_{0}^{\infty} P_k\, z^k = \frac{(1 - \rho)\,(1 - z)\, \varphi(\lambda_0 - \lambda_0\, z)}{\varphi(\lambda_0 - \lambda_0\, z) - z} \qquad (6),$$

wobei

$$\rho = \lambda_0\, T_0 \;; \qquad T_0 = \int_0^{\infty} t\, dG(t) ;$$

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt}\, dG(t).$$

Aus Gl. (6) lassen sich nur in Ausnahmefällen geschlossene Formeln für die Wahrscheinlichkeiten P_k errechnen, z.B. wenn $G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$ ist.

Die Wahrscheinlichkeiten P_k werden jedoch benötigt, um das Funktionsminimum Φ_0 zu finden. In Gl. (4) treten nur Wahrscheinlichkeiten P_k für $k > m$ auf. Wir haben jedoch früher angenommen, daß es zu einer Ausschöpfung der Vorräte nur selten kommt. Deshalb sind die P_k Wahrscheinlichkeiten für $k > m$ sehr klein. Für die angenäherte Lösung der Aufgabe reicht also eine asymptotische Abschätzung der Wahrscheinlichkeiten P_k für k gegen ∞. Es wird angenommen, daß $\varphi(\lambda_0 - \lambda_0\, z)$ eine analytische Funktion im Kreis $|z| \leqslant R$ ist, innerhalb dessen (ohne den Punkt z = 1 mitzurechnen) nur eine Wurzel der Gleichung:

$$\varphi(\lambda_0 - \lambda_0 z) = z \tag{7}$$

vorhanden ist.

Es sei dies die Wurzel

$$z = a, \quad |a| < R .$$

Aus dem Lehrsatz von *Pringsheim* (s. z.B. [2]) und der Ungleichung $p_n \geqslant 0$ läßt sich $a > 1$ schließen. Aus der Konvergenz der Funktion $\varphi(\lambda_0 - \lambda_0 z)$ folgt, daß die Wurzel $z = a$ einfach ist und deshalb ist auch die Funktion $p(z)$ im Kreis $|z| \leqslant R$ überall analytisch, mit Ausnahme im Punkt $z = a$, wo sie einen einfachen Pol hat. Dann ist:

$$P_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{p(z)}{z^{k+1}} dz = - \operatorname*{res}_{z=d} \frac{p(z)}{z^{k+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{p(z)}{z^{k+1}} dz.$$

Indem das Residuum berechnet und das letzte Integral abgeschätzt wird, erhält man:

$$P_k = \frac{(1-\rho)(1-a)}{a^k [1 + \lambda_0 \varphi'(\lambda_0 - \lambda_0 a)]} + 0(R^{-k}) .$$

Für großes k berechnet sich

$$P_k \approx A/a^k \tag{8},$$

wobei

$$A = \frac{(1-\rho)(1-a)}{1 + \lambda_0 \varphi'(\lambda_0 - \lambda_0 a)} .$$

Es sei angemerkt, daß die für die Funktion $\varphi(z)$ angenommenen Festlegungen für fast alle bekannten Verteilungen erfüllt sind. Für exponentielle Verteilung $G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$ wird die asymptotische Abschätzung (Gl. (8)) zur exakten Gleichung, wobei

$$a = 1/\rho ; \quad A = 1 - \rho ; \quad P_k = (1-\rho)\rho^k .$$

Im Fall $r = 1$ muß man also das Funktionsminimum Φ_0 nur im Hinblick auf m finden. Setzt man in Gl. (4) $r = 1$ und die Abschätzung nach Gl. (8) ein, so erhält man:

$$\Phi_0(m, 1) = \frac{C_0 A}{a^{m-1}(a-1)^2} + C_1 m + C_2 .$$

Aus Gl. (5) ist zu schließen, daß das Minimum sich aus der Gleichung:

$$\frac{A}{a^m (1 - 1/a)} = \frac{C_1}{C_0}$$

errechnet, wobei

$$m_0 = \frac{\ln \dfrac{C_0 A a}{C_1 (a-1)}}{\ln a} \quad \text{ist.}$$

Die Funktion Φ_0 nimmt im Punkt m_0 den Minimalwert an:

$$\min \Phi_0 = \frac{C_1}{a-1} + C_1 m_0 + C_2 .$$

Um den von uns bei der Annahme der Exponentialverteilung für die Servicezeiten gemachten Fehler (weil in Wirklichkeit diese Verteilung nicht vorkommt) abzuschätzen, vergleichen wir die beiden Verteilungen

$$G_1(t) = 1 - e^{-t} ; \qquad G_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t \leqslant 1 \\ 1 \text{ für } t > 1 \end{cases} .$$

Es sei

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} = \rho .$$

Für die Exponentialverteilung ist die Wurzel der Gl. (7):

$$a_1 = 0{,}5 ; \quad A_1 = 0{,}5 .$$

Für die zweite deterministische Verteilung finden wir die Wurzel a_2 aus der Gleichung:

$$\exp\left(\frac{1}{2}(z-1)\right) = z ,$$

für die dann

$$a_2 \sim 3{,}5 ; \quad A_2 = 5/3$$

wird. Bei großem k haben die stationären Wahrscheinlichkeiten für beide Verteilungen folgende asymptotische Näherungen (im ersten Fall exakte Gleichung):

$$P_k^{(1)} = 1/2^{k+1} ; \quad P_k^{(2)} \approx \frac{5/3}{(3{,}5)^k} .$$

Der Unterschied ist beträchtlich und das hat zur Folge, daß auch die Minimalwerte der Funktion Φ_0 sich wesentlich unterscheiden.

In der Praxis läßt sich die wirkliche Verteilung G(t) mit einer Gammaverteilung bequem approximieren:

$$g(t) = G'(t) \approx \frac{\mu^p t^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-\mu t} .$$

Die Parameter p und μ lassen sich leicht aufgrund der zwei ersten Momente abschätzen:

$$p = \frac{(E\eta)^2}{D\eta} ; \qquad \mu = \frac{E\eta}{D\eta} .$$

Die Gleichung (7) nimmt für eine Gammaverteilung die Gestalt an:

$$\left[1 + \frac{\lambda}{\mu}(1-z)\right]^{-p} = z .$$

5. Der Fall r > 1 (mehrere Arbeitsplätze in jeder Reparaturlinie)

Für den Fall $r > 1$ nehmen wir die exponentielle Verteilung der Servicezeit an:

$$G(t) = 1 - e^{-\mu t} .$$

Die stationären Wahrscheinlichkeiten werden für $k \geqslant r$ nach [2]:

$$P_k = \frac{\rho^k}{r!\, r^{k-r}} \left[\sum_{s=0}^{r} \frac{\rho^s}{s!} + \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)}\right]^{-1} .$$

Das Minimum der Funktion $\Phi_0(m, r)$ ist im Punkt $m = m_0(r)$, der Gl. (5) erfüllt, erreicht. Diese Gleichung nimmt für $m \geqslant r$ die Gestalt an:

$$B(r) \left(\frac{\rho}{r}\right)^m = \frac{C_1}{C_0} ,$$

wobei

$$B(r) = \frac{r^r}{r!\,(r-\rho) \sum\limits_{k=0}^{r} \dfrac{\rho^k}{k!} + \dfrac{\rho^{r+1}}{r!}} .$$

Daraus errechnet sich

$$m_0 = \ln \frac{C_0 B(r)}{C_1} \Big/ \ln \frac{r}{\rho}$$

und

$$\Phi_0(m_0, r) = C_1 \left[\frac{r}{r-\rho} + \ln \frac{C_0 B(r)}{C_1} \Big/ \ln \frac{r}{\rho}\right] + C_2 r \tag{9}.$$

Das Minimum von (9) läßt sich als Funktion von r nicht geschlossen ausdrücken. Man kann es numerisch errechnen, indem man für r die Werte 1, 2, ... einsetzt und nachher die Funktionswerte Φ_0

$(m_0(r), r)$ nacheinander errechnet. Es läßt sich beweisen, daß die Funktion nur ein lokales Minimum hat. Die Berechnungen können also in dem Augenblick abgeschlossen werden, in dem zum ersten Mal

$$\Phi_0(m_0(r_0+1), r_0+1) > \Phi_0(m_0(r_0), r_0)$$

ist. Im Punkt $(m_0(r_0), r_0)$ liegt dann das Funktionsmimimum von Φ_0.

6. Der Fall einer Schnellreparatur

In der Praxis kommt es häufig vor, daß die durchschnittliche Reparaturzeit sehr viel kürzer ist als die durchschnittliche störungslose Arbeitszeit der Maschinen. In diesem Fall muß die Anzahl der Reserveteile nicht groß sein.

Indem wir uns auf den Fall $r = 1$ beschränken, beweisen wir im folgenden die Feststellung, daß, wenn für die festgesetzte Verteilung $G(t)$ endliche Momente vorhanden sind:

$$\mu_k = \int_0^\infty t^k \, dG(t) < \infty$$

und

$$\lambda_0 \to 0 ,$$

dann gilt

$$P_k \approx \frac{\mu_k \lambda_0{}^k}{k!} \qquad (10).$$

Für den Beweis von Gl. (10) betrachten wir die erzeugende Funktion Gl. (6):

$$\varphi(\lambda_0 - \lambda_0 z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mu_s(\lambda_0)}{s!} \lambda_0{}^s z^s ,$$

mit

$$\mu_s(\lambda_0) = \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t} t^s \, dG(t) .$$

Die ersten k Glieder der *Taylor*-Entwicklung von p(z) unterliegen keiner Veränderung, wenn wir anstelle von $\varphi(\lambda_0 - \lambda_0 z)$

$$\varphi_k(z, \lambda_0) = \sum_{s=0}^{k} \frac{\mu_s(\lambda_0)}{s!} \lambda_0{}^s z^s$$

einsetzen. Wir erhalten dann

$$P_k(z,\lambda_0) = \sum_{s=0}^{k} p_s z^s + \sum_{s=k+1}^{\infty} \overline{p}_s z^s = \frac{(1-\rho)(1-z)\varphi_k(z,\lambda_0)}{\varphi_k(z,\lambda_0) - z} .$$

Weiterhin gilt

$$P_k\left(\frac{z}{\lambda_0}, \lambda_0\right) = \sum_{s=0}^{k} \frac{p_s}{\lambda_0{}^s} z^s + \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{\overline{p}_s}{\lambda_0{}^s} =$$

$$= \frac{(1-\rho)(z-\lambda_0)\varphi_k \, \frac{z}{\lambda_0{}^s}, \lambda_0}{z - \lambda_0 \varphi_k \, \frac{z}{\lambda_0}, \lambda_0} \xrightarrow[\lambda_0 \to 0]{} \sum_{s=0}^{k} \frac{\mu_s(0)}{s!} = \sum_{s=0}^{k} \frac{\mu_s}{s!} z^s .$$

Daraus folgt

$$P_s \approx \frac{\mu_s \lambda_0{}^s}{s!} \qquad \text{für } \lambda_0 \to 0 \text{ und } s \leq k ,$$

womit der Beweis von (10) erbracht ist.

Der Verlust hat in diesem Fall die Gestalt

$$\Phi_0(m, 1) = C_0 \sum_{k>m} (k-m) P_k + C_1 m + C_2 \approx$$

$$\approx C_0 \frac{\mu_{m+1} + \lambda_0{}^{m+1}}{(m+1)!} + C_1 m + C_2$$

und das Minimum findet man aus der Bedingung

$$\frac{\mu_{m0} \lambda_0{}^{m0}}{m_0!} = \frac{C_1}{C_0} .$$

Ähnliche asymptotische Abschätzungen lassen sich auch für $r > 1$ entwickeln, jedoch hat in diesem Fall die Näherung für P_k eine recht komplizierte Gestalt. Das macht die Näherung ungeeignet zum Finden des Verlustminimums.

Zusammenfassung

Die hier dargestellten Gleichungen zur Lösung des Problems kann man ohne wesentliche Veränderung auch in solchen Fällen anwenden, in denen man es mit Maschinen von verschiedenem Typ zu tun hat. Man muß dann natürlich verschiedene Intensitätswerte (Schadensraten) λ_{i0} annehmen. Darüber hinaus muß berücksichtigt werden, daß die Wartezeiten bei den verschiedenen Maschinen unterschiedliche Kosten verursachen. Im Prinzip ist die Lösung der Aufgabe jedoch ähnlich.

Die Aufgabe wird aber sofort komplizierter, wenn wir annehmen, daß schadhafte Maschinenteile verschiedener Typen einer Reparaturwerkstatt mit begrenzter Zahl von allgemein zugänglichen Serviceplätzen zugewiesen werden. In diesem Fall lassen sich die Verluste nicht getrennt für jeden Schadenstyp berechnen. Eine Lösung läßt sich nur durch Simulation erreichen. Außerdem stellt sich damit die neue Frage, wie die Prioritäten der verschiedenen Reparaturen optimal zu setzen sind.

Schrifttum

[1]● *Saaty, T.L.:* Elements of queuing theory with applications. New York: 1962

[2]● *Markuschewitsch, A.I.:* Tieoria analititscheskych funkci. Moskau 1950.