

Verwendete Formelzeichen

α	Neigungswinkel der geraden Rohrleitung
β	Winkel
Γ	Ladungsdichte
μ	dynamische Zähigkeit
ρ	Dichte der Flüssigkeit
σ	Leitfähigkeit der Flüssigkeit
τ	interne Schubspannung der Flüssigkeit
τ_0	Schubspannung der Flüssigkeit an der Leitungswand
$B(v)$	benetzter Umfang des Rohrquerschnittes
c	Reibungsbeiwert (Geschwindigkeitsbeiwert)
d_h	hydraulischer Durchmesser
F_N	Querschnitt der benetzenden Flüssigkeit
F_Q	Flüssigkeitsquerschnitt
$F(v)$	Querschnitt des Flüssigkeitsstromes
f	Frequenz
g	Schwerebeschleunigung
G_F	Leitwert der Versuchsanordnung
G_N	Leitwert der benetzenden Flüssigkeit
G_Q	Leitwert der stehenden Flüssigkeit
n	Normale zur Fließrichtung
N_{pos}	Anzahl positiver bzw. negativer Ladungsträger
N_{neg}	
q	Volumenstrom pro Zeiteinheit
r	halbe lichte Weite der Rohrleitung
Re	Reynoldszahl
s	Länge der Rohrleitung
t	Zeit
T	Periode
v	Durchschnittliche Fließgeschwindigkeit
v_0^+, v_0^-	Anfangsgeschwindigkeit der Ladungsträger
$v(t)$	Geschwindigkeit der Ladungsträger

Schrifttum

Bücher sind durch • gekennzeichnet

- [1] *Reuschenbach, H.*: Entwicklung milchflußgesteuerter Melkanlagen mit pneumatischen Systemen. Bericht über die Jahrestagung der Landtechnik Weihenstephan, Landtechnik Weihenstephan (1974) H. 8, S. 4/11.
- [2] *Schön, H. u. C.L. Pen*: Arbeitswirtschaftliche Verbesserungen bei Melkarbeiten. Landtechnik Bd. 24 (1969) H. 9, S. 289/94.
- [3] *Pen, C.L.*: Untersuchungen zur Steigerung der Arbeitsleistung beim Melken in Gruppenständen, insbesondere durch Verbesserung der Arbeitsorganisation und Automatisierung einiger Arbeitsverrichtungen. Diss. Gießen 1971.
- [4] *Pen, C.L., H. Schön u. H. Stanzel*: Erarbeitung von Grundlagen zur optimalen Gestaltung des maschinellen Milchentzuges durch programmgesteuerte Melkmaschinen. Unveröffentl. Arbeitsbericht über das DFG-Forschungsvorhaben We 519/3, Weihenstephan 1974.
- [5] • *Reinius, F.*: Steady uniform flow in open channels. Trans. Roy. Inst. Techn., Stockholm 1961.
- [6] • *Truckenbrodt, E.*: Strömungsmechanik. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag 1968.
- [7] *Charm, S.E.*: The Fundamentals of Food Engineering. z. Ed. AVF Publishing Co. Inc., Westport Conn. 1971.
- [8] • *Earle, R.L.*: Unit Operations in Food Processing. London, New York, Paris: Pergamon Press 1966.
- [9] *Stanzel, H. u. C.L. Pen*: Zur Entwicklung milchflußgesteuerter Melkanlagen mit elektronischer Steuerung. Bericht über die Jahrestagung der Landtechnik Weihenstephan, Landtechnik Weihenstephan (1974) H. 8, S. 12/19.

Neuere Grundlagen der Mechanik körniger Haufwerke

Von Otto-Horst Hoffmann, Braunschweig*)

DK 624.131:539.215.9

Die Mechanik körniger Haufwerke findet eine vielseitige Anwendung, z.B. in der Bodenmechanik, der Bodenbearbeitung und Silotechnik.

Grundlage der klassischen Haufwerksmechanik ist u.a. die Mohr-Coulombsche Bruchhypothese, die hier neueren Erkenntnissen gegenübergestellt wird:

Der Winkel der inneren Reibung ist nach Mohr-Coulomb konstant. Nach neueren Erkenntnissen muß jedoch zwischen einem konstanten Winkel des stationären Fließens und einem veränderlichen Winkel des beginnenden Fließens unterschieden werden, der von der Porenziffer und der Normalspannung abhängig ist.

Entgegen Mohr-Coulomb tritt Bruch bzw. Gleiten in einem Haufwerk in der Regel nicht in Schnittebenen auf, in denen die Bruchspannungen herrschen. Die Lage der Gleitebenen zu den Bruchspannungsebenen ist über den sogenannten Winkel der Dilatation bestimmbar.

Die Anwendung und Bedeutung der neueren Erkenntnisse wird an Beispielen gezeigt.

1. Einleitung

Die Mechanik körniger Haufwerke hat ihren Ursprung in der Bodenmechanik. Die hier gewonnenen theoretischen Auffassungen und experimentellen Methoden, die sich mit dem mechanischen Verhalten von Erdmassen beschäftigen, wurden in den letzten Jahrzehnten zunehmend auf eine Vielzahl anderer Güter und Anwendungsbereiche übertragen, wie z.B. auf die Verfahrenstechnik und die Fördertechnik, im Bereich der Landtechnik z.B. auf die landwirtschaftliche Bodenbearbeitung, die Probleme zwischen Schlepperrädern und Boden und die Silotechnik.

*) Dipl.-Ing. Otto-Horst Hoffmann ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Landmaschinen (Direktor: Prof. Dr.-Ing. H.J. Matthies) der Technischen Universität Braunschweig.

Wegen ihres breiten Anwendungsbereiches hat die Mechanik körniger Haufwerke große wirtschaftliche Bedeutung. Sie umfaßt feinkörnige pulverartige Materialien (z.B. Mehl, Zement), grobkörnige Güter (z.B. Futtermittelbriketts, Schotter), kohäsive Güter (z.B. feinkörnige Futtermittel, Lehm) und kohäsionslose Güter (z.B. Getreide, Sand).

Die Grundlage der Mechanik körniger Haufwerke bilden die Stoffeigenschaften und Stoffgesetze, speziell das Spannungs-Verformungsverhalten der Haufwerke. Auf ihnen basieren die theoretischen Vorstellungen, aus denen die Berechnungsverfahren entwickelt wurden. Die bedeutendste Grundlage der klassischen Bodenmechanik, wie sie in den Lehrbüchern von *Terzaghi u. Jelinek* [1] *Caquot u. Kerisel* [2] und *Hansen u. Lundgren* [3] dargestellt wird, ist das von *Coulomb* 1773 formulierte Reibungsgesetz [4], das zusammen mit der Mohrschen Spannungsdarstellung auch unter der Bezeichnung Mohr-Coulombsche Bruchbedingung bekannt ist. Die bisherigen Berechnungsverfahren für Stabilitätsprobleme körniger Haufwerke z.B. Stützwand-, Erdwiderstand-, Tragfähigkeits- und Standsicherheitsprobleme gehen von der uneingeschränkten Gültigkeit der Mohr-Coulombschen Bruchbedingung aus.

Intensive Grundlagenforschung in den letzten 25 Jahren hat jedoch gezeigt, daß das Spannungs-Verformungsverhalten körniger Haufwerke durch die Mohr-Coulombsche Bruchbedingung nicht hinreichend beschrieben werden kann. Die erheblichen Fehler, die bei der Anwendung der bisherigen Berechnungsverfahren entstehen, (siehe Abschnitt 3.1.2.1), werden langfristig dazu führen, daß auf der Basis der neuen Forschungsergebnisse eine neue theoretische Haufwerksmechanik mit entsprechenden Berechnungsverfahren entwickelt wird.

Ziel dieses Aufsatzes ist es, die Auffassungen der klassischen Haufwerksmechanik den neueren Vorstellungen des Spannungs-Verformungsverhaltens körniger Haufwerke gegenüberzustellen. Anhand von Beispielen sollen Anwendung und Bedeutung der neueren Forschungsergebnisse erläutert werden.

2. Grundlagen der klassischen Haufwerksmechanik

Die bedeutendste Grundlage der klassischen Haufwerksmechanik ist, wie schon erwähnt, die Mohr-Coulombsche Bruchbedingung, die eigentlich aus zwei Teilen besteht: der Behandlung der Bruchspannungen und der Behandlung der Gleitebenen. Die Mohr-Coulombsche Bruchbedingung läßt sich sowohl auf den ebenen als auch auf den räumlichen Spannungszustand anwenden.

2.1 Bruchspannungen

Das von *Coulomb* im Jahre 1773 formulierte Gesetz [4] setzt die Scherfestigkeit τ eines körnigen Haufwerkes in Beziehung zur Normalspannung σ , die senkrecht auf die Bruchebene wirkt.

$$\tau = \tan \varphi \cdot \sigma + c \quad (1)$$

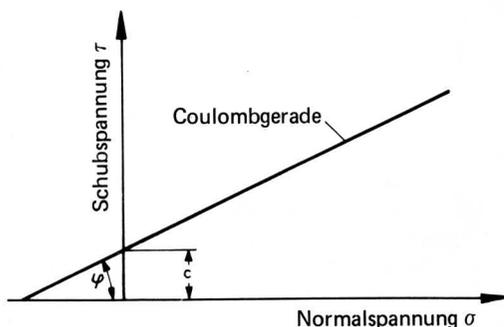


Bild 1. Die Mohr-Coulombsche Bruchbedingung.

Der Winkel der inneren Reibung φ und die Kohäsion c sind im Gegensatz zur heutigen Auffassung weder von der Porenziffer e des Gutes noch von der Normalspannung σ abhängig, sondern gutabhängige Konstanten. Der Winkel der inneren Reibung φ ist somit ein Maß für die Steigung der Coulombgeraden, die Kohäsion c bedeutet die maximal übertragbare Scherspannung im drucklosen Zustand ($\sigma = 0$), Bild 1. Spannungszustände in einem Haufwerk unterhalb der Coulombgeraden sind stabil, Spannungszustände auf der Coulombgeraden führen zum Bruch bzw. zum Fließen, Spannungszustände oberhalb der Coulombgeraden sind nicht möglich.

2.2 Gleitflächen

Herrscht in einem Haufwerk ein ebener Spannungszustand, so sind die Spannungen, die in einem Punkt wirken, vollständig durch die beiden Hauptspannungen σ_1 und σ_3 , Bild 2, beschrieben. Spannungen in beliebigen Schnittebenen durch das Gut lassen sich über den Mohrschen Spannungskreis ermitteln, der nichts anderes als eine anschauliche geometrische Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen ist und als bekannt vorausgesetzt wird. Nach *Mohr-Coulomb* tritt der Bruch bzw. das Fließen in einem Gutelement dann ein, wenn in einer Schnittebene des Gutelementes die Bruchbedingung herrscht, d.h. die Gleichung (1) erfüllt ist. Der Mohrsche Spannungskreis berührt dann die Coulombgerade, die Bruchspannungen sind σ_p und τ_p (Bild 2a). Nach *Mohr-Coulomb* wird weiterhin angenommen, daß diese Schnittebene gleichzeitig Gleitfläche ist. Die Richtung der Gleitfläche wird somit durch den Winkel der inneren Reibung vorgegeben. Der Winkel α zwischen der Ebene der größten Hauptspannung σ_1 und der Gleitfläche beträgt, Bild 2b rechts:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad (2)$$

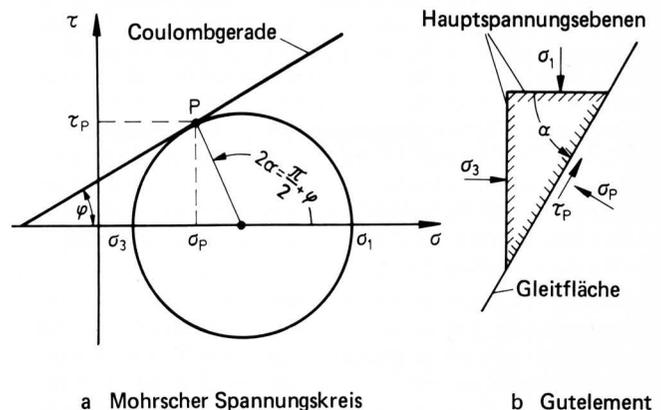


Bild 2. Bestimmung der Gleitfläche nach der Mohr-Coulombschen Bruchbedingung.

3. Neuere Grundlagen der Haufwerksmechanik

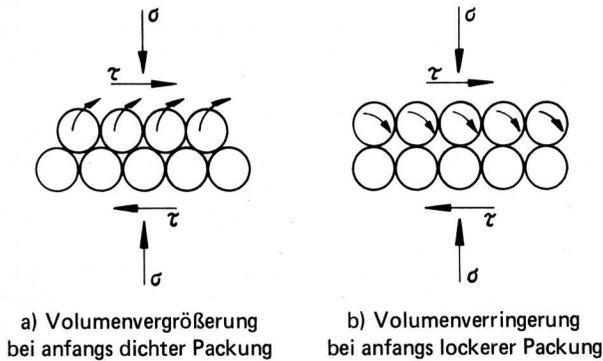
Eingehende Untersuchungen aus den dreißiger und fünfziger Jahren zeigen, daß körnige Haufwerke keine Coulombkörper sind, sondern daß folgende Abweichungen auftreten:

1. Beim Winkel der inneren Reibung φ ist zu unterscheiden zwischen einem Reibungswinkel φ_i des beginnenden Fließens und einem Reibungswinkel φ_s des stationären Fließens. Der Winkel φ_s des stationären Fließens ist konstant. Der Winkel φ_i des beginnenden Fließens ändert sich jedoch mit der Porenziffer e und der Normalspannung σ .
2. Die Schnittebenen, in denen die Bruchspannungen herrschen, fallen in der Regel nicht mit den Ebenen zusammen, in denen der Bruch bzw. das Gleiten eintritt.

3.1 Bruchspannungen

3.1.1 Einfluß von Porenziffer und Normalspannung auf das Scherverhalten

Schon *Reynolds* hat im Jahre 1885 [5] darauf hingewiesen, daß bei Erdstoffen und sonstigen körnigen Materialien durch Scherbeanspruchung normalerweise eine Volumenänderung eintritt. Diese Vorstellung sei an folgendem Beispiel erläutert: Eine bestimmte Anzahl gleichgroßer nicht zusammendrückbarer Kugeln werde einmal dicht, **Bild 3 links**, und einmal locker, **Bild 3 rechts**, gepackt. Verformt man die beiden Haufen durch Scherbeanspruchung, so wird sich bei der dichten Packung das Volumen und damit die Porenziffer vergrößern, im anderen Fall aber verkleinern.



a) Volumenvergrößerung bei anfangs dichter Packung

b) Volumenverringerung bei anfangs lockerer Packung

Bild 3. Volumenänderung bei der Scherverformung.

Erst in den Jahren zwischen 1930 und 1940 wurde das Verhalten von körnigen Materialien unter Scherbeanspruchung mit der Änderung der Porenziffer in Beziehung gebracht. *Hvorslev* stellte im Jahr 1937 [6] fest, daß die Schubfestigkeit eines bestimmten Haufwerkes zur Zeit des Bruches eine Funktion der Porenziffer in der Bruchebene und der Normalspannung auf die Bruchebene ist. *Rendulic* zeigte 1935 und 1936 [7, 8], daß zwischen den wirksamen Spannungen und den Volumenänderungen im Falle eines gesättigten Tones eindeutige Beziehungen bestehen, die nicht nur für den Bruchzustand, sondern auch für Spannungen unterhalb der Bruchgrenze gültig sind.

Ebenso wie die Arbeit von *Reynolds* fanden auch diese Arbeiten wenig Beachtung. Erst als *Gilbert* 1954 [9] und *Henkel* 1956 [10] die Ergebnisse von sehr sorgfältig durchgeführten Dreiaxialversuchen veröffentlichten, wurde das Interesse neu und dauerhaft geweckt, so daß in den folgenden Jahren eine Fülle von Arbeiten auf diesem Gebiet von einer Vielzahl von Forschern veröffentlicht wurde.

Das umfassendste Verständnis des Verformungsverhaltens körniger Haufwerke vermitteln die Untersuchungen und theoretischen Vorstellungen von *Roscoe* und seinen Mitarbeitern. Aus der großen Zahl von Veröffentlichungen sind hier insbesondere die von *Roscoe*, *Schofield* und *Wroth* (1958) [11] zu nennen und vor allem die umfassende Darstellung aller Forschungsergebnisse des Cambrider Institutes, die *Roscoe* 1970 [12] wenige Wochen vor seinem tragischen Unfalltod gab.

Das grundlegende Verhalten körniger Haufwerke stellt *Roscoe* in einem dreidimensionalen Zustandsdiagramm mit den Achsen Normalspannung σ , Schubspannung τ und Porenziffer e dar, **Bild 4**.

Eine Gutprobe mit großer Porenziffer e wird unter steigender Normalspannung σ , entlang der sogenannten Erstverdichtungslinie $N_1 N_4$ verdichtet. Die Erstverdichtungslinie stellt die Grenzlinie für mögliche Anfangszustände einer Probe dar, Gutzustände außerhalb dieser Linie sind nicht möglich. Wird eine Gutprobe entlang der Erstverdichtungslinie bis zum Punkt N_3 mit der Normalspannung σ_4 verdichtet und anschließend wieder entlastet, so erfolgt die Rückdehnung entlang der sogenannten Schwellinie $N_3 H_3 V$.

Bei erneuter Belastung wird die Schwellinie in umgekehrter Richtung durchlaufen VH_3N_3 . Wurde eine Probe bis zum Punkt N_3 verdichtet, so sind Spannungszustände außerhalb der Schwellinie nicht mehr möglich.

Wird eine Gutprobe mit der Normalspannung σ_3 bis zur Porenziffer e_3 verdichtet und anschließend bei konstanter Normalspannung σ_3 einer steigenden Schubspannung τ ausgesetzt, so wird die Probe unter zunehmender Verdichtung entlang der Linie $N_2 G K_5$ plastisch verformt. Im Punkt K_5 wird der Zustand des stationären Fließens erreicht, bei dem eine Steigerung der Schubspannung und eine Änderung der Porenziffer nicht mehr möglich sind. Wiederholt man den Versuch unter einer Normalspannung, die kleiner oder größer als σ_3 ist, so erreicht man weitere Punkte des stationären Fließens, die alle auf der Linie $K_1 K_3 K_5 K_6$ liegen, die von *Roscoe* als kritische Zustandslinie bezeichnet wird. Die kritische Zustandslinie kann man auch erreichen, indem man die Scherversuche nicht bei konstanter Normalspannung, sondern bei konstanter Porenziffer e durchführt. Wird eine Probe konstanter Porenziffer e_3 ausgehend vom Punkt N_2 auf der Erstverdichtungslinie einer steigenden Scherbeanspruchung unterworfen, so tritt Fließen bei sinkender Normalspannung entlang der Linie $N_2 K_3$ ein.

Von der Erstverdichtungslinie $N_1 N_4$ und der im Raum liegenden kritischen Zustandslinie $K_1 K_6$ wird eine Fließoberfläche aufgespannt, auf der z.B. die Kurven $N_2 G K_5$ und $N_2 K_3$ liegen. Spannungszustände außerhalb der Fließoberfläche sind nicht möglich, Spannungszustände unterhalb der Fließoberfläche führen zu rein elastischen Verformungen ohne Änderung der Porenziffer. Wird z.B. eine unter der Normalspannung σ_3 stehende Probe mit der Porenziffer e_2 einer Schubbeanspruchung unterworfen, so verformt sich die Probe elastisch bei konstantem Volumen entlang der Linie FG und erreicht im Punkt G die Fließoberfläche. Zustände auf der Fließoberfläche sind stabil, da ohne Steigerung der Spannung kein weiteres Fließen eintritt. Erst bei einer Steigerung der Schubbeanspruchung fließt die Probe entlang der Linie GK_5 . Da sich die Probe vor Erreichen des stationären Fließens verdichtet und hierdurch die übertragbare Schubspannung wächst, wird diese Fließoberfläche als Verfestigungsoberfläche bezeichnet.

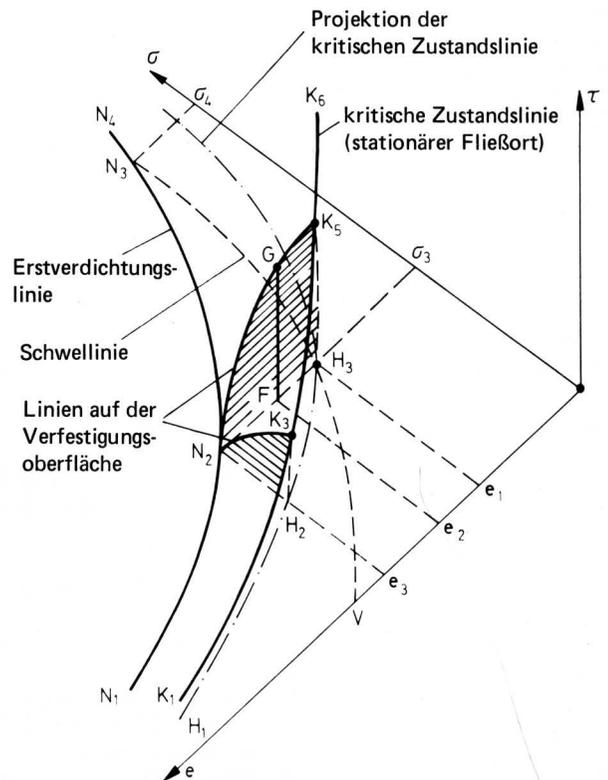


Bild 4. Zustandsdiagramm für körnige Haufwerke, Verfestigungsoberfläche.

Eine Probe, deren Porenziffer bei der Normalspannung σ_3 den Wert e_1 hat, **Bild 5**, wird bei konstanter Normalspannung σ_3 einer steigenden Schubbeanspruchung ausgesetzt. Die Probe verformt sich hierbei elastisch entlang der Linie H_3K_5 , wobei die Porenziffer e_1 konstant bleibt. Im Punkt K_5 wird direkt der Punkt des stationären Fließens erreicht.

Liegt der Spannungszustand eines Gutes unter der kritischen Zustandslinie, so wird es als kritisch verfestigt, liegt er unter der Verfestigungsoberfläche, so wird es als unterverfestigt bezeichnet. Demzufolge müssen Haufwerke, deren Gutzustand im Gebiet rechts von der kritischen Zustandslinie K_1K_6 bzw. rechts von deren Projektion auf der σ, e -Ebene H_1H_3 liegt, überverfestigt sein. Gutproben, die bei konstanter Normalspannung gesichert werden, müssen sich daher ausdehnen, bevor sie Punkte des stationären Fließens auf der kritischen Zustandslinie erreichen. Eine derartige Zustandsänderung unter der Normalspannung σ_1 zeigt die Kurve $SRTK_2$ in **Bild 5**. Bis zum Punkt R verformt sich die Probe bei konstanter Porenziffer e_2 . Zwischen R und T beginnt die Probe sich auszudehnen, die Gutzustände sind jedoch stabil, da ohne weitere Steigerung der Schubspannung τ keine weitere Verformung der Probe möglich ist. Im Punkt T wird die maximal übertragbare Schubspannung erreicht, danach dehnt sich die Probe aus, so daß die übertragbare Schubspannung sinkt, bis im Punkt K_2 ein Punkt des stationären Fließens auf der kritischen Zustandslinie erreicht wird.

Verändert man bei diesem Versuch die Anfangsnormalspannung σ und die Anfangsporenziffer e , so erreicht man andere Punkte R , die auf einer Fläche liegen, die zwischen der kritischen Zustandslinie K_1K_6 und der Linie A_1A_3 , die in der e, τ -Ebene liegt, aufgespannt wird. Diese Oberfläche bezeichnet *Roscoe* als "undrainierte Fließoberfläche", da sie in der Bodenmechanik aus Versuchen an nicht entwässerten Proben bei konstantem Volumen gewonnen wird. Die Linie A_2RK_4 auf der undrainierten Fließoberfläche ist annähernd eine Gerade und wird durchlaufen, wenn eine Probe bei konstanter Porenziffer e_2 einer steigenden Normal- und Schubspannung ausgesetzt wird.

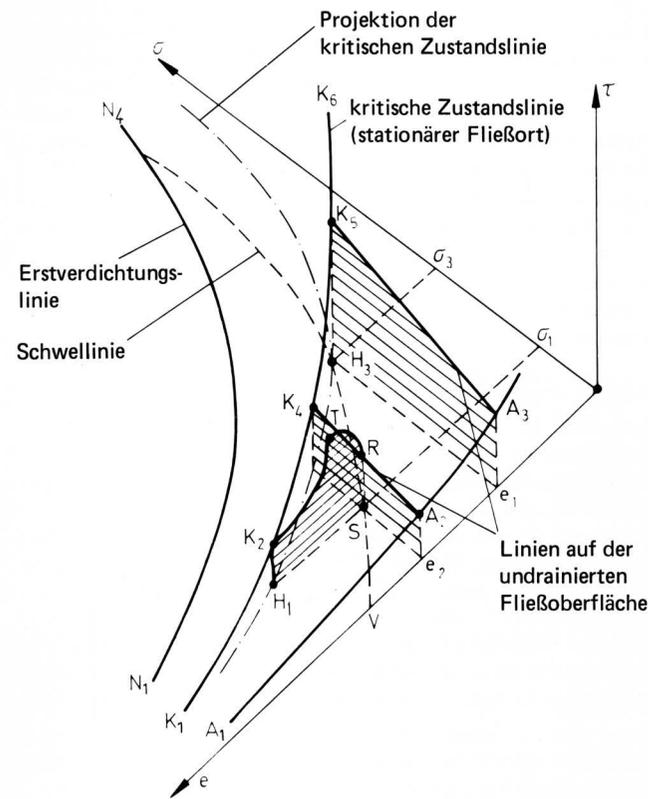


Bild 5. Zustandsdiagramm für körnige Haufwerke, undrainierte Fließoberfläche.

Die eigentliche Fließoberfläche, außerhalb der analog zur Verfestigungsoberfläche keine Gutzustände mehr möglich sind, liegt oberhalb der undrainierten Fließoberfläche und wird aufgespannt zwischen der kritischen Verfestigungslinie K_1K_6 und der in der e, τ -Ebene liegenden Kurve C_1C_3 , **Bild 6**. In dieser Fließoberfläche liegen alle Punkte T . Die senkrechte Projektion der Schwellenlinie N_3H_3SV auf die Verfestigungsoberfläche schneidet aus dieser die Linie N_3K_5 und auf der undrainierten Fließoberfläche die Linie K_5RA_2 aus. Die Linie $N_3K_5RA_2$ wird als elastische Grenzkurve, die senkrechte Fläche zwischen den Linien $N_3K_5RA_2$ und N_3H_3SV als elastische Wand bezeichnet. Durch die elastische Wand und die kritische Zustandslinie werden im dreidimensionalen Schaubild erreichbare Gutzustände vorgegeben: Wurde eine anfangs locker gelagerte Probe bis zum Punkt N_3 auf der Erstverdichtungsline belastet, so sind elastische Spannungszustände nur innerhalb der elastischen Wand möglich. Bei plastischen Verformungen muß unterschieden werden, ob der Ausgangszustand auf der Linie N_3H_3 oder auf der Linie H_3SV liegt. Im ersteren Fall ist die Probe unterverfestigt, so daß nur Gutzustände auf oder unterhalb der Verfestigungsoberfläche $N_4N_3K_5K_6$ möglich sind. Im zweiten Fall ist die Probe überverfestigt, so daß bei Schubbeanspruchung eine Ausdehnung des Gutes erfolgt und Zustände nur im Bereich $K_1K_2K_5RA_2$ möglich sind. Das in den Bildern 4 bis 6 dargestellte Zustandsdiagramm gilt für kohäsive Güter. Bei kohäsionslosen Gütern fallen die Linien C_1C_3 und A_1A_3 in der e, τ -Ebene mit der e -Achse zusammen.

Obwohl *Roscoe* seine Untersuchungen nur an wenigen Gütern wie kohäsiven, feuchten Tonen, kohäsionslosen, grobkörnigen Sanden und monodispersen Stahlkugeln durchführte, hat das dreidimensionale Zustandsdiagramm jedoch grundsätzliche Bedeutung für alle körnigen Haufwerke.

Etwa zur gleichen Zeit wie *Roscoe* führten *Jenike* u.a. [13] im Rahmen von Arbeiten zur Dimensionierung von Silos Untersuchungen über das Spannungs-Verformungs-Verhalten von Schüttgütern durch. Die Erkenntnisse von *Jenike*, die für die Lagerung körniger Haufwerke in Silos grundlegende Bedeutung haben, wurden erstmals von

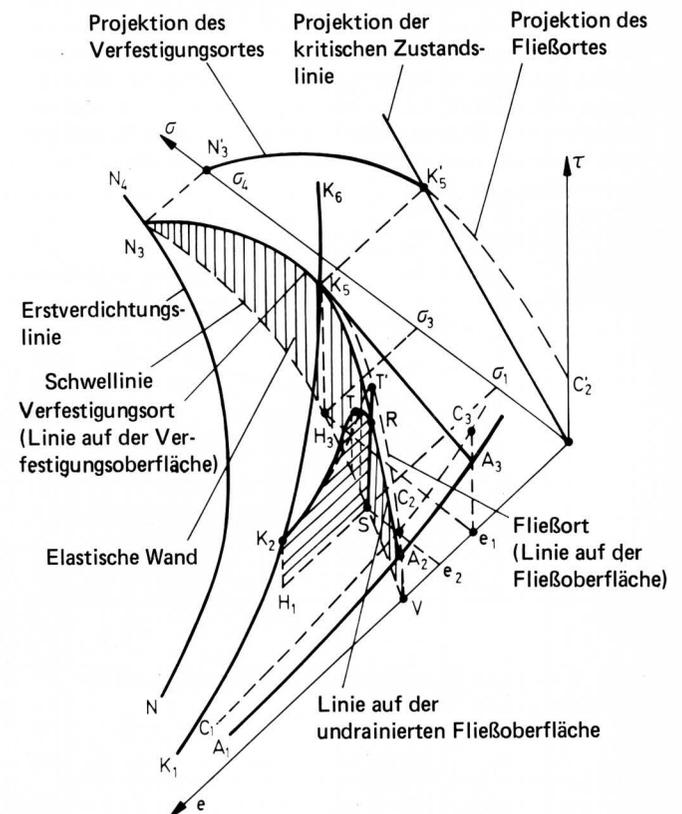


Bild 6. Zustandsdiagramm für körnige Haufwerke, elastische Wand, Fließort.

Ashton u.a. [14] und Williams und Birks [15] im Zustandsschaubild von Roscoe dargestellt. Die Übereinstimmung der Ergebnisse läßt eine grundsätzliche Anwendbarkeit des Zustandsdiagramms für alle körnigen Haufwerke vermuten.

Die bei der Lagerung von Schüttgütern auftretenden Spannungen betragen max. 1 bar. Sie sind damit nur ein Bruchteil der üblicherweise in der Bodenmechanik auftretenden Spannungen. Insbesondere aus diesem Grunde zeigte es sich, daß das Zustandsschaubild für Schüttgüter gegenüber dem Zustandsschaubild für Güter der Bodenmechanik, also dem allgemeineren Zustandsschaubild für körnige Haufwerke, vereinfacht werden kann: Beim Scheren einer überverfestigten Probe mit der Normalspannung σ_1 und der Porenziffer e_2 , Bild 6, erfolgt die elastische Verformung des Gutes bei konstanter Porenziffer nicht nur bis zum Punkt R auf der undrainierten Fließoberfläche, sondern erstreckt sich weiter, bis zur eigentlichen Fließoberfläche, d.h. der Punkt T liegt bei Schüttgütern direkt über dem Punkt R, in Bild 6 mit T' bezeichnet. Für Schüttgüter reicht somit im überverfestigten Bereich die elastische Wand bis an die Fließoberfläche und schneidet dort die Linie $K_5 T' C_2$ aus.

Die Linie $N_3 K_5$ nennt man Verfestigungsort, die Linie $K_5 C_2$ nach Jenike Fließort. Die Projektionen des Verfestigungs- und Fließortes auf die σ, τ -Ebene ergeben gekrümmte Kurven, Bild 6, die Projektion der kritischen Zustandslinie nach Roscoe und Jenike annähernd eine Gerade durch den Ursprung der σ, τ -Ebene.

Betrachtet man eine elastische Wand auf einer Schwellinie, deren größter Normalspannungswert kleiner ist als σ_4 , so schneidet diese Wand aus der Verfestigungs- und der Fließoberfläche einen Verfestigungs- und einen Fließort aus, die unterhalb der in der σ, τ -Ebene dargestellten Kurven $N_3 K_5$ und $K_5 C_2$ liegen. Ist die größte Normalspannung einer Schwellinie größer als σ_4 , so schneidet die auf dieser Schwellinie stehende elastische Wand Verfestigungs- und Fließorte auf der Verfestigungs- und Fließfläche aus, die oberhalb der in der σ, τ -Ebene eingezeichneten Kurven liegen, Bild 6.

Die Darstellung von Fließorten in der σ, τ -Ebene, wie sie von Jenike verwandt wird, zeigt Bild 7. Die Endpunkte der Fließorte $K' K'' K'''$ liegen auf der kritischen Zustandslinie, nach Jenike auch stationärer Fließort genannt. Der Reibungswinkel φ_s des Gutes beim stationären Fließen ist der Steigungswinkel der kritischen Zustandslinie im σ, τ -Diagramm. Den Reibungswinkel φ_i für das beginnende Fließen erhält man als Steigungswinkel des jeweiligen Fließortes. Hierbei wird deutlich, daß der Reibungswinkel φ_i für das beginnende Fließen nicht allein abhängig ist von der jeweiligen Normalspannung, sondern in starkem Maße auch von der Verfestigung bzw. der Porenziffer des Gutes.

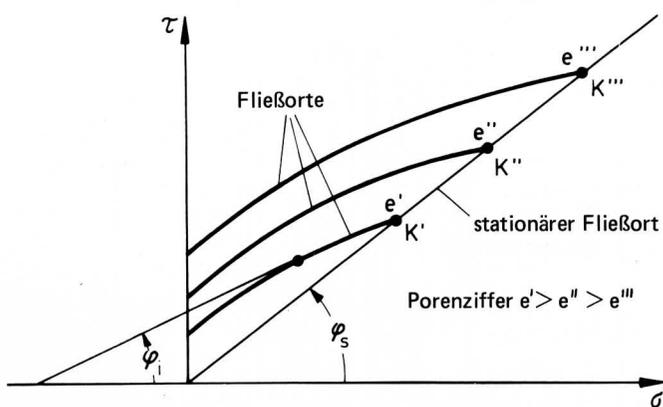


Bild 7. Einfluß von Normalspannung und Porenziffer auf den Winkel der inneren Reibung.

Wie eingangs erwähnt, befaßten sich in den vergangenen Jahren zahlreiche Forschungsarbeiten mit der Untersuchung des Einflusses von Normalspannung und Porenziffer auf den Winkel der inneren Reibung von körnigen Haufwerken. Aus der Vielzahl der zur Verfügung stehenden Untersuchungen wurden in Tafel 1 nur diejeni-

gen herausgegriffen, die zu einer formelmäßigen Darstellung der Zusammenhänge gelangen. Hierbei ist zwischen drei Formeltypen zu unterscheiden: Es wurden entweder ausschließlich der Einfluß der Normalspannung oder ausschließlich der Einfluß der Porenziffer oder aber beide Einflüsse berücksichtigt. Im Rahmen dieses Aufsatzes ist es nicht möglich, eine kritische Betrachtung der angegebenen Formeln vorzunehmen. Allgemein kann jedoch gesagt werden, daß nach der eingehenden Beschreibung des Zustandsdiagramms körniger Haufwerke deutlich ist, daß sowohl die Normalspannung als auch die Porenziffer einen Einfluß auf den Winkel der inneren Reibung haben, so daß die alleinige Berücksichtigung nur eines der beiden Einflüsse in jedem Fall zu einer mehr oder weniger großen Vereinfachung führen muß, ausgenommen sind undrainierte Versuche im überverfestigten Bereich, bei denen Fließen auf der undrainierten Fließoberfläche stattfindet, deren Schnitte parallel zur σ, τ -Ebene Geraden darstellen, Bild 5.

3.1.2 Anwendung der neueren Erkenntnisse über das Scherverhalten

Die neueren Erkenntnisse über das Scherverhalten sind einmal interessant für alle die Fachgebiete, in denen der Bruch- bzw. Fließzustand körniger Haufwerke nicht erreicht werden soll. Dies betrifft insbesondere Fragen der Bodenmechanik, wie z.B. die Standfestigkeit von Baugrund oder Erdbebenprobleme. Darüber hinaus sind sie jedoch auch von Bedeutung für alle Gebiete, in denen das Erreichen des Bruch- bzw. Fließzustandes angestrebt wird. Hier sind insbesondere die Silotechnik und die landwirtschaftliche Bodenbearbeitung zu nennen. Anhand der Bodenmechanik und der Silotechnik soll die Bedeutung der neueren Erkenntnisse verdeutlicht werden.

3.1.2.1 Anwendung in der Bodenmechanik

Die heute üblichen Berechnungsverfahren der Bodenmechanik setzen die Richtigkeit der Mohr-Coulombschen Bruchhypothese voraus. Die Einfachheit der Bruchhypothese und die gute Zugänglichkeit der auf ihr aufbauenden Berechnungsverfahren für den Einsatz von Datenverarbeitungsanlagen haben zu einer weiten Verbreitung dieser Berechnungsverfahren geführt, Schultze [29], Roscoe [30]. Da der Winkel der inneren Reibung φ jedoch nicht, wie bei diesem Rechenverfahren angenommen, konstant ist, sondern abhängig ist von Porenziffer e und der Höhe der Normalspannung σ (Abschnitt 3.1.1), treten für den Winkel der inneren Reibung Abweichungen von 25 ÷ 35 % zwischen Berechnungsverfahren und tatsächlichen Werten auf, Schultze [29]. Aus diesen Gründen sind die Rechenergebnisse im allgemeinen mit Vorsicht zu behandeln.

Die erforderliche Berücksichtigung der neueren Erkenntnisse über das Scherverhalten wird zwangsläufig zu neuen Berechnungsverfahren der Bodenmechanik führen, Roscoe [30]. Da diese in absehbarer Zeit jedoch noch nicht verfügbar sind, wird man zumindestens versuchen müssen, die neuen Erkenntnisse qualitativ in Form von höheren Sicherheitsfaktoren zu berücksichtigen, Schultze [29].

3.1.2.2 Anwendung in der Silotechnik

Ausgehend von seinen neuen Erkenntnissen über das Scherverhalten feinkörniger Güter der Verfahrenstechnik (Abschnitt 3.1.1), entwickelte Jenike mit seinen Mitarbeitern unter Verwendung der Bodenmechanik, der Kontinuumsmechanik und der Plastizitätstheorie ein Berechnungsverfahren, das zur funktionsgerechten Dimensionierung von Silos führt [13, 31, 32]. Konnte in der Vergangenheit ein störungsfreies Ausfließen schwerfließender Güter aus Silos nur erreicht werden, indem die Werte für die Konstruktion auf experimentellem Wege ermittelt wurden, so steht jetzt ein Verfahren bereit, mit dem nach Festlegung bestimmter Stoffkennwerte eine gezielte funktionsgerechte Gestaltung von Silos möglich ist.

Das Jenike-Verfahren ist in den vergangenen 10 Jahren zu einem Standardverfahren der mechanischen Verfahrenstechnik geworden. Das Verfahren hat auch für die Landtechnik Bedeutung im Hinblick auf die Gestaltung von Silos für schwerfließende landtechnische Güter, wie z.B. Mehl, Schrot oder Futtermittel. Über das Jenike-Verfahren wird in einem später erscheinenden Aufsatz noch berichtet werden.

Autor	Jahr	Gleichung	Art des Haufwerks	Bemerkung										
I Gleichungen, die den Einfluß der Normalspannung berücksichtigen														
Torre [16]	1947	$\tan \varphi = \sqrt{\frac{C_1}{2\sigma}}$	Erdkörper	Theoretische Herleitung in Analogie zur techn. Bruchtheorie fester Körper (z.B. Stahl, Beton)										
Schubert [17]	1958	$\tau = A(\sigma) \cdot \sigma \cdot \tan \varphi$ <table border="1" style="margin: 5px auto;"> <tr> <td>σ</td> <td>0,5</td> <td>1,0</td> <td>2,0</td> <td>3,0</td> </tr> <tr> <td>$A(\sigma)$</td> <td>1,01</td> <td>1,00</td> <td>0,93</td> <td>0,90</td> </tr> </table>	σ	0,5	1,0	2,0	3,0	$A(\sigma)$	1,01	1,00	0,93	0,90	Sand	Empirische Formel
σ	0,5	1,0	2,0	3,0										
$A(\sigma)$	1,01	1,00	0,93	0,90										
Berezantev [18]	1967	$\varphi = C_2 + 3 \cdot 15 \ln \frac{1}{\sigma}$	Sand	Empirische Formel										
II Gleichungen, die den Einfluß der Porenziffer e berücksichtigen														
Caquot u. Kerisel [2]	1956/67	$\tan \varphi = \frac{C_3}{e}; C_3 = 0,5 - 0,6$	Sand, Kies	Empirische Formel										
Hansen u. Lundgren [3]	1960	$\varphi + C_4 \cdot \log e = C_5$	Sand, Kies	Empirische Formel										
Idel [19]	1960	$\tan \varphi = C_6 \frac{e_a}{1 + e_a} + C_7$	rollige Erdstoffe	Theoretische Herleitung, experimentell überprüft										
Winterkorn [20]	1960	$\tan \varphi = \frac{C_8}{e - e_{\min}}$	rollige Erdstoffe	Theoretische Herleitung über Analogie zu makrometrischer Flüssigkeit, experimentell überprüft										
Feda u. Kamerov [21]	1963	$\varphi = C_9 + C_{10} \frac{e_a}{1 + e_a}$	Sand	Empirische Formel										
Kézdi [22]	1964	$\tan \varphi = C \frac{\sqrt{e - e_{\min}}}{\frac{e - e_{\min}}{e_n} - 1}$	Sand	Theoretische Herleitung an Kugelpackungen, experimentell überprüft										
Herbst [26]	1964	$\tan \varphi = \tan \varphi_s \cdot \frac{(e_{\text{krit}} - e_{\min})}{(e - e_{\min})}$	rollige Erdstoffe	Weiterentwicklung der Gleichung v. Winterkorn [20]										
Mogami [23]	1964	$\sin \varphi = \frac{C_{12}}{1 + e}$		Theoretische Herleitung										
Helenelund [24]	1966	$\varphi = C_{13} \cdot \frac{\rho_s}{1 + e}$	Sand, Kies	Empirische Formel										
Schultze [25]	1966	$\cot \varphi = C_{14} \cdot e_a + c_{15}$	Sand, Kies	Benutzt umgeformte Gleichung von Winterkorn [20]										
III Gleichungen, die den Einfluß der Porenziffer e und Normalspannung berücksichtigen														
Herbst [26] [28]	1964	$\tan \varphi = D - E\sigma$ $D = \frac{e_{\text{krit}} - e_{\min}}{e - e_{\min}} \cdot \tan \varphi_s$ $E = \frac{C_{16}}{e - e_{\min}} \cdot \tan \varphi_s$	rollige Erdstoffe	Baut auf Gleichung von Winterkorn [20] auf, experimentell überprüft										
Brinch Hansen [27]	1967	$\sin \varphi = \left[1 - \frac{0,05}{1 + \frac{6}{(\sigma_1 + \sigma_3)}} \right] \cdot \left[\frac{1,14}{(1,04 + e^2)(\sigma_1 + \sigma_3 + 6)0,05} \right]$	Molsand	Empirische Gleichung, gilt nur für Molsand										
Moussa [28]	1967	$\tan \varphi = F(Dr) \cdot G(Dr) \cdot \sigma G(Dr) - 1$ $F(Dr), G(Dr)$ tabelliert	Sand	Empirische Formel										

Tafel 1. Einfluß von Porenziffer e und Normalspannung σ auf den Winkel der inneren Reibung φ .

3.2 Gleitflächen

3.2.1 Einfluß der Volumenänderung auf die Lage der Gleitlinien

Aufgrund theoretischer Überlegungen kam *Bent Hansen* 1958 [33] zu der Erkenntnis, daß die Gleitflächen in körnigen Haufwerken nicht durch die Bruchspannungsebenen bestimmt sind (s.a. Abschnitt 2.1), sondern im Gegensatz zu der bisherigen Auffassung durch die Bedingung definiert werden, daß die Gleitflächen keine Dehnung erleiden, d.h., die Gleitflächen sind Null-Dehnungsflächen. Da bei körnigen Haufwerken bei plastischer Verformung Dilatation, d.h. Volumenänderung eintritt, ist die Lage der Gleitflächen daher nicht konstant, sondern abhängig von der Dilatation.

Die theoretischen Überlegungen *Bent Hansens* wurden 1965 von *James*, einem Mitarbeiter *Roscoes*, zum erstenmal experimentell bestätigt [34].

Die neuen Erkenntnisse über die Ausbildung von Gleitflächen in körnigen Haufwerken lassen sich am anschaulichsten mit Hilfe von Mohrschen Spannungs- und Dehnungsgeschwindigkeitskreisen darstellen. Die Bedeutung der Dehnungsgeschwindigkeitskreise sei zuerst erläutert:

Wird ein Gutelement in den Schnittebenen mit der Normalspannung σ und der Schubspannung τ belastet, so bedingt diese Beanspruchung eine Dehnung ϵ und Gleitungen $\gamma/2$. Erfolgen die Beanspruchungen im elastischen Bereich des Gutes, so sind die Spannungen und die Verformungen über das Hookesche Gesetz miteinander verknüpft. Im plastischen Bereich dagegen gilt das Hooke'sche Gesetz nicht mehr. Hier besteht eine Zuordnung zwischen der Normalspannung σ und einer Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ und der Schubspannung τ und einer Gleitungsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}/2$, *Lippmann u. Mahrenholtz* [35]. Der Mohrsche Spannungskreis stellt geometrisch den Spannungszustand in den verschiedenen Schnitten des Gutes dar. Analog hierzu ist der Mohrsche Dehnungsgeschwindigkeitskreis, der in einem Koordinatenkreuz mit den Achsen Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ und Gleitungsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}/2$ aufgetragen wird, die Darstellung der Verformungsverhältnisse in verschiedenen Schnittebenen des Gutes. Setzt man Isotropie voraus, d.h. die Hauptspannungsrichtungen stimmen mit den Hauptdehnungsrichtungen überein, so entspricht der größten Hauptspannung σ_1 im Spannungskreis die größte Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_1$ im Dehnungsgeschwindigkeitskreis, die kleinste Spannung σ_3 der kleinsten Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_3$, die größte Schubspannung τ_{\max} der größten Gleitungsgeschwindigkeit $(\dot{\gamma}/2)_{\max}$, **Bild 8**.

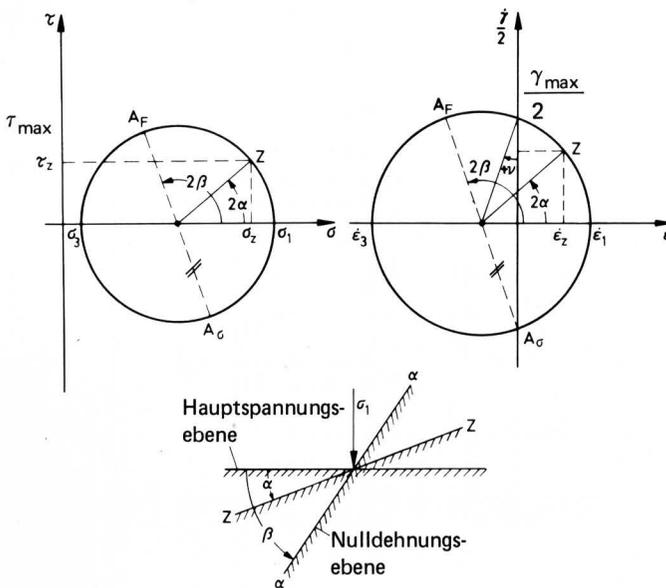


Bild 8. Mohrscher Spannungskreis a, Dehnungsgeschwindigkeitskreis b und Lage der Schnittebenen im Gutelement c.

Liegen die σ -Achse und die $\dot{\epsilon}$ -Achse in Richtung der Hauptspannungsebene, auf der die größte Hauptspannung σ_1 senkrecht steht, so wird ein Schnitt ZZ durch das Gutelement, der von der Hauptspannungsebene um den Winkel α gedreht ist, im Spannungs- und Dehnungsgeschwindigkeitskreis durch den Punkt Z dargestellt, der gegenüber der σ - bzw. $\dot{\epsilon}$ -Achse um den Winkel 2α gedreht ist, **Bild 8**. Dem Mohrschen Spannungskreis ist zu entnehmen, daß senkrecht zur Schnittebene ZZ die Spannung σ_z wirkt, die die Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_z$ hervorruft, und daß parallel zur Schnittrichtung ZZ die Schubspannung τ_z wirkt, die die Gleitungsgeschwindigkeit $(\dot{\gamma}/2)_z$ hervorruft. Senkrecht zu der Schnittebene, die im Dehnungsgeschwindigkeitskreis durch den Punkt A_σ dargestellt wird, ist die Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 0$. Diejenige Schnittebene, innerhalb der keine Dehnungsgeschwindigkeit herrscht und somit auch keine Dehnung stattfindet, ist im Gut um 90° und im Dehnungsgeschwindigkeitskreis um 180° gedreht und wird durch den Punkt A_F symbolisiert. Eine Null-Dehnungsebene, die nach *Bent Hansen* eine Gleitebene ist, liegt somit zu der Hauptspannungsebene im Gut um den Winkel β gedreht. Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß die zweite Null-Dehnungsebene um den Winkel β in umgekehrter Richtung zur Hauptspannungsebene gedreht liegt.

Volumenänderungen werden durch Dehnungen bzw. Dehnungsgeschwindigkeiten hervorgerufen. Ist die Summe der Hauptdehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$ negativ — der Mittelpunkt des Kreises liegt dann links vom Koordinatenkreuz wie in unserem Fall, **Bild 8** — so liegt Volumenvergrößerung vor. Liegt der Mittelpunkt des Dehnungsgeschwindigkeitskreises im Koordinatensprung, herrscht Volumenkonstanz, liegt er rechts davon, herrscht Volumenverkleinerung. *Bent Hansen* definiert nun einen Winkel der Dilatation v als Maß für die Volumenänderung [33]:

$$\sin v = -\frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3} \quad (3)$$

Der Winkel v ist definitionsgemäß positiv für Volumenvergrößerung.

Die drei Fälle der Volumenänderung, nämlich Volumenvergrößerung, -verkleinerung und -konstanz sind für ein Gutelement, in dem entsprechend einer vorgegebenen Bruchbedingung die Bruchspannung herrscht, in **Bild 9** dargestellt. Bei Volumenvergrößerung, **Bild 9**, liegen die Null-Dehnungsebenen aa und $\beta\beta$ um $\pi/4 + v/2$ und die Bruchspannungsebenen cc und dd um $\pi/4 + \varphi/2$ zur Hauptspannungsebene gedreht. Dem entspricht eine Lage zur Richtung der größten Hauptspannung σ_1 von $\pi/4 - v/2$ bzw. $\pi/4 - \varphi/2$.

Bei Volumenverkleinerung, **Bild 10**, vergrößert sich der Winkel zwischen Richtung der Hauptspannung σ_1 und der Null-Dehnungsebene. Der Winkel beträgt hier $\pi/4 + v/2$. Da definitionsgemäß bei Volumenverkleinerung der Winkel v negativ ist, ist dies gleichbedeutend mit $\pi/4 - v/2$.

Im dritten Fall bei Volumenkonstanz, **Bild 11**, ist der Dilatationswinkel $v = 0$ und die Null-Dehnungslinien liegen um den Winkel $\pi/4$ von der größten Hauptspannung σ_1 entfernt. Die Lage der Gleitflächen zur Richtung der größten Hauptspannung σ_1 ist somit bei körnigen Haufwerken, die bei Volumenkonstanz plastisch verformt werden, die gleiche, wie beim plastischen Fließen von Metallen. Metalle werden insbesondere bei größeren plastischen Verformungen als starr idealplastisch angesehen, d.h., die Verformung erfolgt bei konstantem Volumen und die Bruchbedingung wird im σ, τ -Diagramm durch eine Gerade parallel zur σ -Achse dargestellt. Aus diesen Gründen fallen hier, wie leicht einzusehen ist, die Bruchspannungsebenen mit den Gleitebenen zusammen.

Den Darstellungen in **Bild 9 bis 11** ist zu entnehmen, daß die Gleitebenen in der Regel nicht mit den Bruchspannungsebenen zusammenfallen, sondern daß sie in einem Winkel von $\varphi/2 - v/2$ zueinander gedreht liegen. Dementsprechend schließen die Gleitebenen nicht, wie in der klassischen Haufwerksmechanik angenommen, mit der Richtung der größten Hauptspannung einen Winkel von $\pi/4 - \varphi/2$ ein, sondern der Winkel bestimmt sich ebenfalls unter Verwendung des Winkels der Dilatation zu $\pi/4 - v/2$.

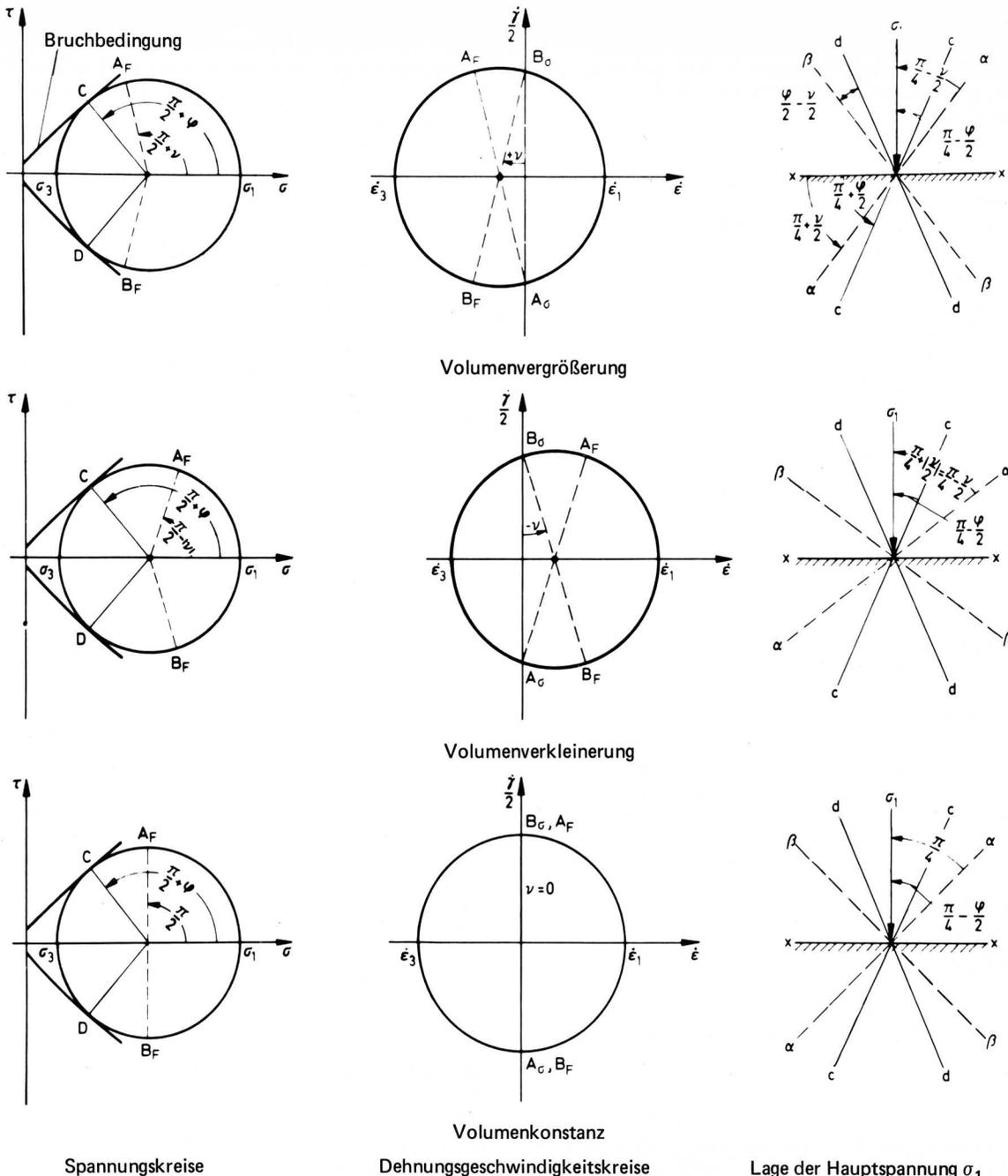


Bild 9 bis 11. Bestimmung der Lage der Bruchspannungs- und Null-Dehnungsebenen mit Hilfe der Mohrschen Spannungs- und Dehnungsgeschwindigkeitskreise.

Bild 9. Volumenvergrößerung
 Bild 10. Volumenverkleinerung
 Bild 11. Volumenkonstanz

Lage der Hauptspannung σ_1 zu den Nulldehnungsebenen $\alpha - \alpha$ und $\beta - \beta$ und den Bruchspannungsebenen $C - C$ und $d - d$ in einem Gutelement

Um Aussagen über die Form des Bruchkörpers in einem körnigen Haufwerk machen zu können, ist es daher erforderlich, zuerst die Lage der Bruchspannungsebenen oder der Richtung der größten Hauptspannung σ_1 zu bestimmen, um dann unter Verwendung des Winkels der Dilatation ν die Lage der Gleitebenen festzulegen.

3.2.2 Anwendung der neueren Erkenntnisse über die Lage der Gleitebenen

Die neueren Erkenntnisse über die Lage der Gleitebenen sind in all den Fällen in der Haufwerksmechanik von Bedeutung, in denen als Voraussetzung für eine weitergehende Berechnung die Form des Bruchkörpers ermittelt werden muß.

3.2.2.1 Anwendung in der Bodenmechanik

Von James [34], Lord [36], Bransby [37] – Mitarbeitern Roscoes – wurden Versuche zur Bestimmung des Spannungs- und Verformungszustandes an und hinter einer ebenen, sich drehenden Wand durchgeführt, Roscoe [12]. Die hier behandelten Erddruckprobleme haben in der Bodenmechanik Bedeutung bei der Berechnung von mit Erdrich hinterfüllten Wänden, wie z.B. Stützmauern, Kaimauern usw. Auch in der Landtechnik haben sie eine gewisse Bedeutung, z.B. bei der Berechnung der Stützmauern von Flachsilos, die mit Sand hinterfüllt sind, Stoppel [38].

Die Messung der auf die Wand wirkenden Spannungen erfolgte mit Spannungsmesszellen [34, 36, 37], die in die Wand eingelassen waren, **Bild 12**. Die Verformungen des Sandes wurden über Bleikugeln ermittelt, die beim Befüllen in den Sand eingelegt worden waren und deren Verschiebungen beim Versuch mit Hilfe von Röntgenstrahlen festgestellt wurden.

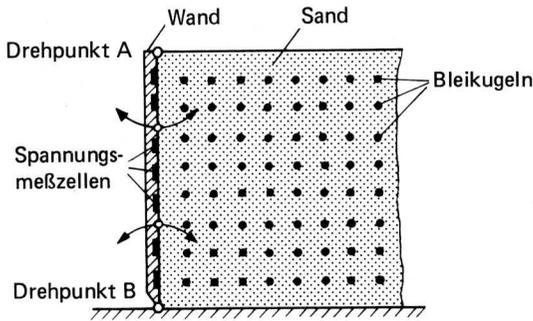


Bild 12. Versuchseinrichtung zur Bestimmung des Spannungs- und Verformungszustandes in Sand hinter einer ebenen sich drehenden Wand.

Die Meßergebnisse zeigen, daß die Null-Dehnungsflächen β in Wandnähe fast parallel zur Wand verlaufen, **Bild 13 oben**. Hieraus kann geschlossen werden, daß die Wand rauh ist und kein Gleiten entlang der Wand stattfindet. Da senkrecht zur Oberfläche des Gutes keine Spannungen wirken können, ist die Oberfläche zugleich die Richtung der größten Hauptspannung σ_1 . Die Null-Dehnungsflächen α schneiden diese entsprechend den Überlegungen *Bent Hansens* [33] unter dem Winkel $\pi/4 - \nu/2$. Die Richtung der größten Dehnungsgeschwindigkeit wird durch die Linien ξ angegeben.

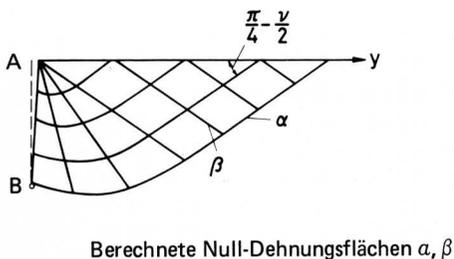
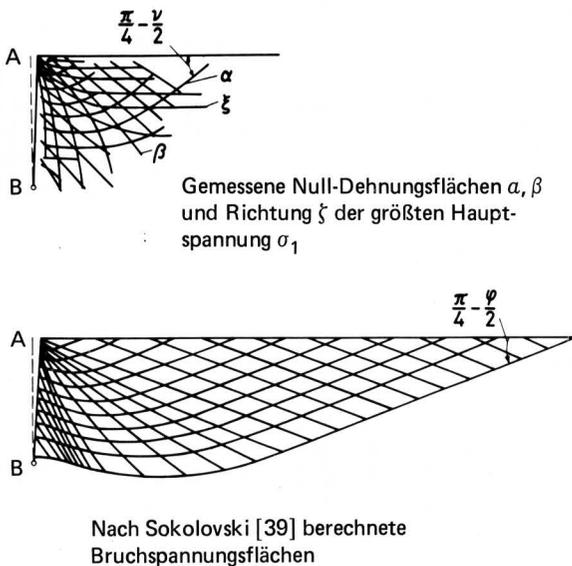


Bild 13. Spannungs- und Verformungszustand in Sand hinter einer ebenen sich drehenden Wand, nach *Roscoe* [12].

Da die Versuche zeigten, daß die Bedingung der Isotropie erfüllt ist, geben damit die Linien ξ gleichzeitig die Richtung der größten Dehnungen ϵ_1 und der größten Hauptspannung σ_1 an. Erwartungsgemäß verlaufen die Linien ξ unmittelbar unterhalb der Gutoberfläche parallel zu dieser und schneiden auch im übrigen Bereich die Null-Dehnungsflächen α und β unter einem Winkel $\pi/4 - \nu/2$.

Unter Berücksichtigung der an der Wand gemessenen Normal- und Schubspannungswerte und unter Verwendung gemessener Werte für den inneren Reibungswinkel wurden nach *Sokolowski* [39] die Bruchspannungsflächen berechnet, **Bild 13 mitte**. Weiterhin berechnete man die Null-Dehnungsflächen α und β , **Bild 13 unten**. Hierbei zeigte sich eine gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und den gemessenen Werten.

3.2.2.2 Anwendung bei Scherversuchen

Zur Bestimmung des Winkels der inneren Reibung haben Kasten- oder Ringschergeräte, **Bild 14 oben**, eine besondere Bedeutung, *Schulte u. Muhs* [40], *Roscoe* [30]. Bei diesen Schergeräten wird angenommen, daß die Gleitlinie konstruktionsbedingt mit der Trennfuge zwischen den beiden Kastenhälften zusammenfällt. Die Normalkraft N bewirkt dann eine Normalspannung σ_N senkrecht zur Gleitlinie und die Scherkraft S die Schubspannung τ_S in der Gleitfläche.

Nach neueren Untersuchungen verformt sich die Probe im Kastenscherschergerät jedoch nicht gleichmäßig, sondern die Scherung erfolgt in einem linsenförmigen Bereich um die angenommene Gleitfläche herum (**Bild 14 oben**), *Schwedes* [41]. In einem Scherkasten können konstruktionsbedingt keine horizontalen, sondern nur vertikale Dehnungen auftreten. Eine Messung der vertikalen Dehnungen bzw. Dehnungsgeschwindigkeiten anhand der Bewegung des Scherkastendeckels ist jedoch nicht sinnvoll, da man so nur die mittleren Dehnungen, nicht aber die in der Scherverformungszone herrschenden Dehnungen ermittelt.

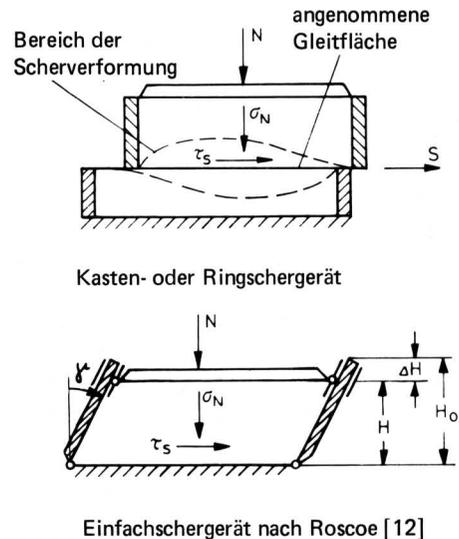


Bild 14. Schergeräte.

Im Abschnitt 3.2.1 war zur Bestimmung des Mohrschen Spannungskreises für einen Scherversuch die Kenntnis der Lage der Gleitfläche zur Richtung der größten Hauptspannung und die auf sie wirkende Normal- und Schubspannung erforderlich. Die Lage der Gleitebene konnte nur über eine Messung des Winkels der Dilatation ν bestimmt werden. Da diese Möglichkeiten beim Kastenscherschergerät aus obengenannten Gründen nicht gegeben sind, ist eine Bestimmung des Winkels der inneren Reibung mit dem Kastenscherschergerät nur für den Fall der Scherung unter Volumenkonstanz möglich, **Bild 11**. Die Bruchbedingung ist die Einhüllende der bei verschiedenen Scherversuchen gewonnenen Mohrschen Spannungskreise.

Die Bestimmung der Bruchbedingung bei Volumenkonstanz zeigt **Bild 15**. Die Gleitfläche ist hier entsprechend Bild 11 um den Winkel $\pi/2$ zur Ebene der größten Hauptspannung σ_1 gedreht. Auf sie wirken die Spannungen σ_N und τ_S .

Der Auswertung des Scherversuchs liegt die Annahme zugrunde, daß die Gleitfläche entlang der Trennlinie zwischen den beiden Kastenhälften auftritt. Da jedoch die Probe ungleichmäßig verformt wird, ist anzunehmen, daß die Verformung bewirkende Spannungszustand ebenfalls ungleichmäßig über die Probe verteilt ist, so daß die Annahme naheliegt, daß die bisher angenommene Lage der Gleitfläche nicht mit der tatsächlichen Lage übereinstimmt. Die Annahme wird bestätigt durch die Versuchsergebnisse von *Schwedes* [41]. Der Scherkasten kann aus den beschriebenen Gründen daher selbst zur Bestimmung von Schervorgängen, die unter Volumenkonstanz stattfinden, nur dann eingesetzt werden, wenn es von vornherein auf exakte Meßergebnisse nicht ankommt. Der Scherkasten bzw. das Ringschergerät sind damit z.B. nur zur angenäherten Bestimmung von stationären Fließorten (siehe Abschnitt 3.1.1) geeignet.

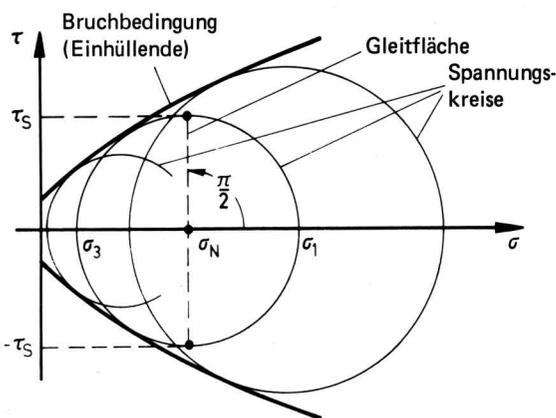


Bild 15. Bestimmung der Bruchbedingung bei Volumenkonstanz mit dem Kastenscherversuch.

Eine genauere Bestimmung des Scherverhaltens körniger Haufwerke ist mit dem von *Roscoe* entwickelten sog. Einfach-Schergerät möglich, das in einer Prinzipskizze in Bild 14 unten dargestellt ist. Wie Untersuchungen mit eingelegten Bleikugeln und Röntgenstrahlen gezeigt haben, verformt sich die Probe einigermaßen gleichmäßig. Statt der Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ und der Gleitungsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}/2$ können vereinfachend deren Inkremente eingesetzt werden, so daß sich ergibt,

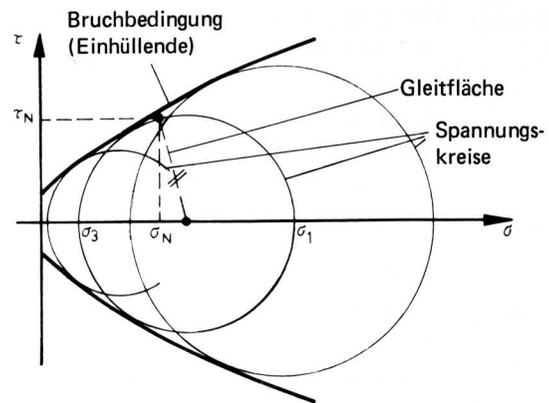
$$\dot{\epsilon} \approx \frac{\Delta H}{H_0} \quad (4)$$

$$\frac{\dot{\gamma}}{2} \approx \frac{\gamma}{2} \quad (5)$$

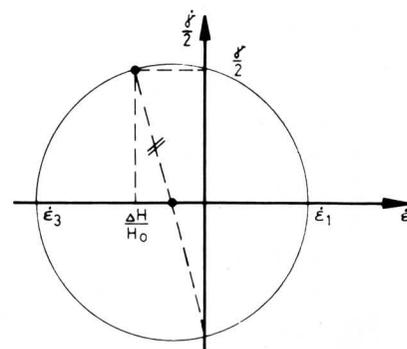
mit dem Gleitungswinkel $\gamma/2$, der Anfangshöhe der Probe H_0 und dem Höhenunterschied ΔH , Bild 14.

Aufgrund der Geometrie des Einzelschergeräts liegen die Gleitflächen horizontal, dies wurde durch die Röntgenuntersuchung bestätigt. Die auf die Gleitfläche wirkende Normalspannung ist damit σ_N , die Schubspannung τ_S . Mißt man bei einem Scherversuch die Normalspannung σ_N , die Schubspannung τ_S , den Gleitungswinkel $\gamma/2$, die Anfangshöhe H_0 und den Höhenunterschied ΔH , so kann man bei jeder Art von Volumenänderung, die die Probe bei der Scherbeanspruchung erfährt, den Spannungszustand, d.h. den Mohr'schen Spannungskreis, bestimmen. In **Bild 16** ist dieses für einen Schervorgang mit Volumenvergrößerung durchgeführt worden. Der Mohr'sche Dehnungsgeschwindigkeitskreis wird durch die Formänderungsgrößen H/H_0 und $\gamma/2$ festgelegt. Gleichzeitig

ergibt sich aus ihm die Richtung der Gleitfläche, die wiederum unter Verwendung der Spannungsgrößen σ_N und τ_N die Bestimmung des Mittelpunktes des Mohr'schen Spannungskreises und damit des Mohr'schen Spannungskreises selbst ermöglicht.



Mohr'scher Spannungskreis



Mohr'scher Dehnungsgeschwindigkeitskreis

Bild 16. Bestimmung der Bruchbedingung bei Volumenvergrößerung mit dem Einzelschergerät.

4. Zusammenfassung

Die klassischen und die neueren Grundlagen der Mechanik körniger Haufwerke wurden gegenübergestellt und Unterschiede und daraus sich ergebende Konsequenzen deutlich gemacht.

Der Winkel der inneren Reibung φ ist nicht, wie nach der Mohr-Coulomb'schen Bruchhypothese angenommen, konstant, sondern ändert sich mit der Porenziffer und der Normalspannung. Das grundlegende Scherverhalten körniger Haufwerke wird in einem von *Roscoe* entworfenen Zustandsdiagramm dargestellt. Es wird gezeigt, daß das Scherverhalten feinkörniger Güter der Verfahrenstechnik, wie es von *Jenike* im Hinblick auf die Lagerung dieser Güter in Silos ermittelt wurde, zu Vereinfachungen des Zustandschaubilds führt.

Von gleicher grundsätzlicher Bedeutung ist die Erkenntnis, daß die Gleitflächen in der Regel nicht mit den Flächen zusammenfallen, in denen die Bruchspannung herrscht. Werden die Bruchspannungsflächen durch die gutabhängige Bruchbedingung festgelegt, so sind die Gleitflächen durch die Bedingung definiert, daß in ihnen keine Dehnung stattfindet, d.h. daß sie Null-Dehnungsflächen sind. Der Winkel der Dilatation wird eingeführt und es wird gezeigt, daß Gleitflächen und Bruchspannungsflächen um den Winkel $\varphi/2 - v/2$ zueinander gedreht sind.

Die Bedeutung der neueren Grundlagen der Mechanik körniger Haufwerke und ihre Anwendung wird am Beispiel der Bodenmechanik, der Silotechnik und der Versuchstechnik gezeigt.

Verwendete Formelzeichen

$A(\sigma)$	Funktion
C_1, C_{16}	Konstanten
c	Kohäsion
D_r	bezogene Dichte
D, E	Funktionen
e	Porenziffer
e_a	Anfangsporenziffer
e_{krit}	kritische Porenziffer
e_{min}	theoretische Grenzsporenziffer, Materialkonstante
e_n	Zahl e
$F(D_r), G(D_r)$	Funktionen
N	Normalkraft
S	Scherkraft
α, β	Winkel
$\gamma/2$	Gleitwinkel
$\dot{\gamma}/2$	Gleitgeschwindigkeit
ϵ	Dehnung
$\dot{\epsilon}$	Dehnungsgeschwindigkeit
$\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2$	Hauptdehnungsgeschwindigkeiten
ν	Winkel der Dilatation
ρ_s	Schüttdichte
σ, σ_N	Normalspannung
σ_1, σ_2	Hauptspannungen
σ_m	mittlere Normalspannung
τ, τ_s	Schubspannung
φ	Winkel der inneren Reibung
φ_i	Winkel der inneren Reibung bei beginnendem Fließen
φ_s	Winkel der inneren Reibung bei stationärem Fließen

Schrifttum

Bücher sind durch • gekennzeichnet

- [1] • *Terzaghi, K. u. R. Jelinek*: Theoretische Bodenmechanik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1954.
- [2] • *Caquot, A. u. J. Kérisel*: Grundlagen der Bodenmechanik. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1967.
- [3] • *Hansen, J. Brinch u. H. Lundgren*: Hauptprobleme der Bodenmechanik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1960.
- [4] • *Coulomb, C.A.*: Essai sur une application des règles des maximis et minimis a quelques problèmes de statique relatifs a l'architecture. Mem. Acad. Roy. Pres. divers savants 7 (1776).
- [5] *Reynolds, O.*: On the dilatancy media composed of rigid particles in contact. Philos. Mag. 19 (1885) S. 469/81.
- [6] • *Hvorslev, M.J.*: Über die Festigkeitseigenschaften gestörter bindiger Böden. Ingeniørvidenskabelige Skrifter, A Nr. 45, Kopenhagen 1937.
- [7] *Rendulic, L.*: Der hydrodynamische Spannungsausgleich in zentral entwässerten Tonzylindern. Wasserwirtsch. u. Techn. Bd. 2 (1935) S. 250/53 u. 269/73.
- [8] *Rendulic, L.*: Porenziffer und Porenwasserdruck in Tonen. Bauing. Bd. 17 (1936) S. 559/64.
- [9] • *Gilbert, G.D.*: Shear strength properties of weald clay. Ph. D. Thesis, London 1954.
- [10] *Henkel, D.J.*: The effect of overconsolidation on the shavior of clays during shear. Géotechnique Bd. 6 (1956) S. 139/50.
- [11] *Roscoe, K.H., A.N. Schofield u. C.P. Wroth*: On the yielding of soils. Géotechnique Bd. 8 (1958) S. 22/52.
- [12] *Roscoe, K.H.*: The influence of strains in soil mechanics, Tenth Rankine Lecture Géotechnique Bd. 20 (1970) S. 129/70.
- [13] *Jenike, A.N., P.J. Elsey u. R.H. Wooley*: Flow properties of bulk solids. Univ. Utah, Engng. Exp. Station, Bull. Nr. 95, 1959.
- [14] *Ashton, M.D., R. Farley u. F.H.H. Valentin*: Some investigations into the strength and flow properties of powders. Rheol. Acta 4 (1965) S. 206/18.
- [15] *Williams, A.H. u. A.H. Birks*: The preparation of powder specimens for shear cell testing. Rheol. Acta 4 (1965) S. 170/80.
- [16] *Torre, C.*: Der Spannungszustand in einem schweren Erdkörper. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss., Wien; Math.-Naturwiss. Klasse, Abtlg. IIa; Bd. 156 (1947) S. 583/92.
- [17] *Schubert, K.*: Einfluß von Lagerungsdichte und Normalspannung auf die Scherfestigkeit von Sand. Wiss. Zeitschr. Hochsch. f. Bauwesen, Cottbus, 2 (1958) S. 149/56.
- [18] *Berezantev, V.G.*: Certain results of investigations on the shear strength of sands. Proc. Géot. Conf. Oslo 1967, S. 167/69.
- [19] *Idel, K.-H.*: Die Scherfestigkeit rolliger Erdstoffe. Veröff. Inst. Bodenmechanik und Grundbau TH Karlsruhe 2, 1960.
- [20] *Winterkorn, H.F.*: Neuere Erkenntnisse über den Scherwiderstand rolliger Böden und ihre praktische Bedeutung. Int. Soc. of Soil Mech. a Found, Engng., Austrian Nat. Committee, Wien 1964, S. 1/8.
- [21] *Feda, J. u. B. Kameronov*: Shear strength of granular soils under plane strain conditions. Stavebnicky Casopis 11 (1963) S. 397/417, 417/27.
- [22] *Kézdi, A.*: Contributions to the investigation of granular systems. Rheology a. Soil Mech. Symp., Grenoble 1964, S. 164/78.
- [23] *Mogami, T.*: A statistical approach to the mechanics of granular materials. Soil and Foundation, Tokio 1964; 5, 2, S. 26/36.
- [24] *Heleneund, K.V.*: On the bearing capacity of frictional soils. The State Institute for Research, Finnland, 1966, III/97.
- [25] *Schultze, E.*: Lockere und dichte Böden. Mitt. Inst. Bau- u. Baubetr. Aachen 1966, IX, S. 107/23.
- [26] *Herbst, T.F.*: Shear phenomena in granular random packings. Ph. D. Thesis, Princeton Univ. 1964.
- [27] *Hansen, J. Brinch*: Some empirical formulae for the shear strength of Molsand. Proc. Geot. Conf. Oslo 1967, S. 175/77.
- [28] *Moussa, A.*: Untersuchungen über die Scherfestigkeit und die Durchlässigkeit von Sanden. Mitt. Inst. Verkehrswasserb., Grundb. u. Bodenmech. TH Aachen (VUB) 39, 1967.
- [29] *Schultze, E.*: Der Reibungswinkel nichtbindiger Böden. Der Bauing. 43 (1969) S. 313/20.
- [30] *Roscoe, K.H.*: Behandlung bodenmechanischer Probleme auf der Grundlage neuer Forschungsergebnisse. Bergb.-Wiss. Teil 1: 14 (1967) S. 464/72
Teil 2: 15 (1968) S. 8/15.
- [31] *Jenike, A.W.*: Gravity flow of solids. Univ. Utah, Engng. Exp. Station, Bull. Nr. 108, 1961.
- [32] *Jenike, A.W.*: Storage and flow of solids. Univ. Utah, Engng. Exp. Station, Bull. Nr. 123, 1964.
- [33] *Hansen, Bent*: Line ruptures regarded as narrow rupture zones. Basic equations based on kinematic considerations. Soil mech. a found. Engng.: Conf. on earth pressure problems, Brussel 1958, S. 1/4, S. 39/48.
- [34] *James, R.G.*: Stress and strain Fields in sand. Ph. D. Thesis, Univ. Cambridge 1965.

- [35] ●Lippmann, H. u. O. Mahrenholtz: Plastomechanik der Umformung metallischer Werkstoffe. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1967.
- [36] Lord, J.A.: Stresses and strains in earth pressure problems. Ph. D. thesis, Univ. Cambridge 1969.
- [37] Bransby, P.L.: Stress and strain in sand caused by rotation of a modell wall. Ph. D. thesis, Univ. Cambridge 1968.
- [38] ●Stroppel, A.: Spannungszustände in lagernden körnigen Haufwerken in der Nähe einer ebenen Wand. VDI-Forschungsh. 525, Düsseldorf VDI-Verlag 1968.
- [39] ●Sokolovski, V.V.: Statics of granular media. Oxford, Pergamon Press 1965.
- [40] ●Schultze, E. u. H. Muhs: Bodenuntersuchungen für Ingenieurbauten. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1967.
- [41] Schwedes, H.J.: Scherverhalten leicht verdichteter kohäsiver Schüttgüter. Diss. Univ. Karlsruhe 1971.

Zur Auswertung dynamischer Belastungsverläufe

Mitteilung aus dem Institut für Betriebstechnik der Forschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode

Von R.H. Biller, Gh. Peres und H. Steinkampf*)

DK 631.372:539.43

Für die Dimensionierung von Maschinenteilen ist die Kenntnis der im Betrieb auftretenden Belastungen von großer Bedeutung. Oft ist die Erprobung einzelner Bauteile nur durch den praktischen Einsatz von Versuchsmaschinen [1] möglich, der sehr zeit- und kostenaufwendig ist. Sind jedoch Lastkollektive vorhanden, so können auf ihrer Grundlage Nachfahrversuche auf dem Prüfstand durchgeführt werden. Zur Erfassung des gesamten Beanspruchungsspektrums sind Lastkollektive für alle auftretenden Betriebsbedingungen aufzunehmen und als Dimensionierungsgrundlage zu verwenden.

Aufgabenstellung und Ziel der Arbeit

Für die aufgenommenen Belastungen bieten sich unterschiedliche Auswertemöglichkeiten an. Die verwendeten Auswertegeräte arbeiten oft noch auf mechanischer Basis. Ziel der Arbeit ist es, auf Magnetband aufgenommene Beanspruchungsverläufe über den Prozeßrechner mit Hilfe eines Rechnerprogramms nach bestimmten Kriterien auszuwerten.

*) Dipl.-Ing. R.H. Biller und Dipl.-Ing. H. Steinkampf sind wissenschaftliche Mitarbeiter im Institut für Betriebstechnik (Direktor: Prof. Dr. S. Rosegger) der Forschungsanstalt für Landwirtschaft, Braunschweig-Völkenrode.
Dr.-Ing. Gh. Peres ist Oberassistent am Lehrstuhl für Kfz.-Technik, Schlepperbau und Landmaschinen der Universität Brasov (Rumänien) und war als Gastwissenschaftler am Institut für Landmaschinen (Direktor: Prof. Dr.-Ing. H.J. Matthies) der TU Braunschweig.

Zur Methode der Auswertung dynamischer Belastungsvorgänge

Für die Auswertung dynamischer Belastungsverläufe kommen verschiedene Verfahren zur Anwendung, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Diese Verfahren sind in DIN 45 667 [2] festgelegt und werden u.a. von Horstmann [3] kritisch betrachtet und erläutert. Als bekannteste und für diesen Zweck z.Zt. am häufigsten verwendete Auswertverfahren können die Ermittlung der Überschreitungs- und der Spitzenwerthäufigkeit angesehen werden, die auch hier zur Anwendung kommen. Bevor auf die Auswertemethode näher eingegangen wird, soll kurz die Aufnahme, Speicherung und Verarbeitung der Meßwerte erläutert werden.

Aufnahme, Speicherung und Verarbeitung der Meßwerte

Die an den einzelnen Meßstellen auftretenden Beanspruchungen werden mit Dehnungsmeißstreifen gemessen und die abgegebenen Meßspannungen auf Magnetband gespeichert, Bild 1. Vom Prozeßrechner werden, durch das Klassierprogramm gesteuert, die gespeicherten Analogwerte in konstanten zeitlichen Abständen von $\Delta t \leq 20$ ms von den auszuwertenden Magnetbandspuren parallel abgefragt und in der zur Verfügung stehenden Zeit nacheinander vom Rechner verarbeitet. Für die auftretenden Belastungsverläufe ist die Abfragefrequenz von 50 Hz ausreichend. Da jeder anstehende Wert sofort verarbeitet wird, wird nur eine geringe Zahl von Speicherplätzen benötigt, so daß die Versuchsdauer und daraus die Anzahl der Werte keine Begrenzung darstellen. Anfang und Ende des zu klassierenden Versuchs sind durch ein auf eine freie Spur aufgespieltes Signal gekennzeichnet.