

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Führungsprobleme mit einem Beispiel aus der Kartoffelernte

Von **Rudolf Thaer** und **Karl-Heinz Weißbach**, Braunschweig-Völkenrode

Im Bereich der Landtechnik sind häufig Probleme anzutreffen, bei denen die für die Bewertung des Arbeitserfolges maßgebende Größe von der Differenz zweier Einflußgrößen abhängt, die beide zufälligen Schwankungen unterliegen. In diesem Beitrag wird deshalb eine Methode hergeleitet, mit der die Bewertungsgröße aus den Schwankungen zu berechnen ist. Sind die Schwankungen der beiden Einflußgrößen voneinander unabhängig und normalverteilt, so führt die Methode zu einer einfach auszuwertenden Formel. Als Beispiel wird für die Tiefenführung eines Kartoffelrodeschares gezeigt, wie sich die erforderliche Rodetiefe des Schares berechnen läßt und welche Fehler durch die dabei vorgenommenen Vereinfachungen entstehen.

Inhalt

- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Methodik
 - 2.1 Zweidimensionale Verteilungen und Flächenintegrale
 - 2.2 Zurückführung eines Flächenintegrals auf ein iteriertes (zweifaches) Integral
 - 2.3 Berechnung der iterierten Integrale im Falle unabhängiger normalverteilter zufälliger Veränderlicher
 - 2.4 Fehlerabschätzung bei Ersatz der Normalverteilungen durch empirische Verteilungen
 - 2.5 Berechnung des Mittenabstandes der Verteilungen bei gegebenem Wert des Integrals im Falle unabhängiger normalverteilter zufälliger Veränderlicher
- 3 Beispiel: Berechnung des Schartiefenganges beim Kartoffelroden
 - 3.1 Einführung
 - 3.2 Interpretation des Formelsatzes und Berechnung der Arbeitstiefe bei vorgegebener Verlustwahrscheinlichkeit
 - 3.3 Vergleich der Verluste bei Verwendung von empirischen und von Normalverteilungen
- 4 Zusammenfassung
- 5 Schrifttum

1 Einleitung

Im Bereich der Landtechnik sind häufig Probleme anzutreffen, bei denen der Erfolg einer Maßnahme von zwei Einflußgrößen abhängt, die beide zufälligen Schwankungen unterliegen. Diese Schwankungen können je nach Einsatzbedingungen, Maschinenkonstruktion und Reaktionsvermögen oder Können des Bedienungsmannes sehr verschieden sein. Eine solche Koppelung zweier schwankender Einflußgrößen tritt beispielsweise bei Führungsproblemen von Landmaschinen auf, die sich folgendermaßen charakterisieren lassen:

Eine Maschine soll ein Arbeitswerkzeug möglichst dicht an einem „Gut“ entlang führen, z. B. seitlich an einer Pflanzenreihe bei der Pflege oder unterhalb von ihr bei der Ernte oder in einem bestimmten Abstand über oder unter der Bodenoberfläche. Die Verteilung des Gutes quer zur Arbeitsrichtung sei zufällig. Dies kann durch unregelmäßige Anordnung der Einzelkörper des Gutes, z. B. von Pflanzen oder Kartoffelknollen, unregelmäßige Dichte oder unregelmäßige Berandung des Gutes hervorgerufen sein. Zugleich weise der Werkzeugweg zufällige Schwankungen quer zur Arbeitsrichtung auf. Um das Werkzeug nicht in zu großem mittleren Abstand vom Gut führen zu müssen, wird zugelassen, daß es gelegentlich in das Gut ein-

schneidet. Die dadurch entstehenden Beschädigungen, Verluste oder Verunreinigungen dürfen aber ein bestimmtes Maß nicht überschreiten. Zur Beurteilung der Führung des Werkzeuges ist nun zu klären, wie seine Einstellung von seinen Schwankungen und der Verteilung des Gutes abhängig ist.

Solche Fragen ergeben sich unter anderem bei der Bergung unter der Erdoberfläche wachsenden Erntegutes, z. B. bei der Ernte von Kartoffeln, wobei die Tiefenlage der Knollen die eine, der Tiefgang des Rodeorgans die andere zufällig schwankende Größe darstellt. Ähnliche Probleme können auch beim Mähen von Grüngetü oder beim Hacken von Pflanzenreihen unregelmäßiger Distanz auftreten.

In diesem Beitrag soll dargelegt werden, wie eine Überlagerung der Wirkungen zweier solcher Einflußgrößen mathematisch erfaßt werden kann. Insbesondere wird gezeigt, wie für den Fall, daß die Schwankungen stochastisch voneinander unabhängig sind, aus den getrennt ermittelten Schwankungen ihr resultierender Einfluß berechnet werden kann. Dieses Vorgehen macht es möglich, manchen komplexen Vorgang zu analysieren, in einfacheren Versuchen zu behandeln und die auftretenden Zusammenhänge klarer darzustellen.

Im Anschluß an die mathematischen Darlegungen sollen an einem Beispiel die Anwendung des Verfahrens und die Auswirkungen der vorgenommenen Vereinfachungen gezeigt werden.

2 Mathematische Methodik

2.1 Zweidimensionale Verteilungen und Flächenintegrale

Im folgenden werden zwei Größen, die zufälligen Schwankungen unterliegen, betrachtet. Mathematisch können diese Größen durch die zufälligen Veränderlichen X und Y mit der gemeinsamen Verteilungsdichte $g(x,y)$ beschrieben werden. Die Verteilungsdichte $g(x,y)$ sei über einer x,y -Ebene aufgetragen, **Bild 1**. Ein Punkt (x,y) dieser Ebene gibt also an, daß X den Wert x und Y den Wert y angenommen hat. Man nennt daher (X,Y) eine zweidimensionale zufällige Veränderliche und (x,y) eine Realisation von (X,Y) .

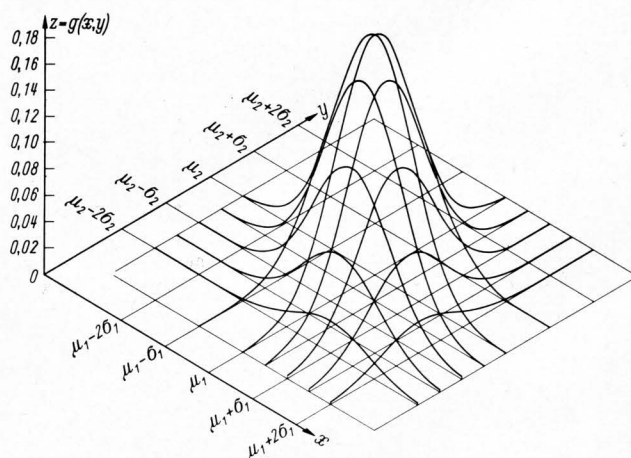


Bild 1. Gemeinsame Verteilungsdichte

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}$$

einer zweidimensionalen Normalverteilung mit den Mittelwerten μ_1 und μ_2 , den Standardabweichungen $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ und dem Korrelationskoeffizienten $\rho = 0,5$.

Dipl.-Ing. Rudolf Thaer ist wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Landmaschinenforschung (Direktor: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Baader) der Forschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode; Dipl.-Math. Karl-Heinz Weißbach ist Leiter der Datenverarbeitungsstelle derselben Forschungsanstalt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Realisationen von (X, Y) in einem vorgegebenen Bereich \mathfrak{B} der x, y -Ebene liegen, erhält man durch Integration der Verteilungsdichte $g(x, y)$ über diesen Bereich. Man schreibt dafür [1]:

$$P[(X, Y) \in \mathfrak{B}] = \iint_{\mathfrak{B}} g(x, y) dx dy \quad (1).$$

Für die in der Einleitung skizzierten Fragen interessiert entweder die Wahrscheinlichkeit, daß $y > x$ oder $y < x$ ist; denn dies sind die Kriterien für das Auftreten von Verlusten. Die Bereiche \mathfrak{B} sind also die Halbebenen oberhalb oder unterhalb der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten; wir bezeichnen sie mit \mathfrak{B}_0 bzw. \mathfrak{B}_u . Im Bereich \mathfrak{B}_0 sind die Realisationen von Y durchweg größer als die von X , im Bereich \mathfrak{B}_u durchweg kleiner.

Ein Punkt (x, y) befindet sich entweder in der oberen oder in der unteren „Schräghalbebene“. Die Summe der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beträgt also eins:

$$\iint_{\mathfrak{B}_0} g(x, y) dx dy + \iint_{\mathfrak{B}_u} g(x, y) dx dy = 1 \quad (2).$$

Es wird hier immer vorausgesetzt, daß die auftretenden Integrale existieren. Die Angabe der allgemeinen Bedingungen über die Dichte $g(x, y)$, unter denen die Integrale in Gl. (1) bzw. (2) existieren, ist nicht Zweck dieser Arbeit. In dem in Abschnitt 3 dargestellten Anwendungsbeispiel existieren sie.

2.2 Zurückführung eines Flächenintegrals auf ein iteriertes (zweifaches) Integral

Die Berechnung eines Flächenintegrals geschieht meist in der Weise, daß man zunächst in Richtung der x -Achse (y -Achse) integriert und diese noch von y (bzw. x) abhängende Funktion in Richtung der y -Achse (x -Achse) integriert. Wir erhalten daher für Gl. (1) mit dem Bereich $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_u$:

$$V = \iint_{\mathfrak{B}_u} g(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_y^{+\infty} g(x, y) dx \right] dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^x g(x, y) dy \right] dx \quad (3).$$

Die Berechnung der Integrale in Gl. (3) wird im allgemeinen numerisch erfolgen müssen. Zur numerischen Integration über

einen unbeschränkten Bereich muß man diesen zunächst durch einen beschränkten Bereich ersetzen. Der beschränkte Bereich muß dabei hinreichend groß gewählt werden, damit der vernachlässigte Anteil des Integrals genügend klein bleibt. Für den Bereich \mathfrak{B}_u erhält man z. B. eine einfache Begrenzung, indem man im Abstand $-a$ eine parallele Gerade zur x -Achse und im Abstand $+b$ eine parallele Gerade zur y -Achse zieht; der beschränkte Bereich \mathfrak{B}_u^* kann dann durch die Ungleichungen $-a \leq y, y \leq x, x \leq b$ charakterisiert werden. Die Integration über die untere „Schräghalbebene“ \mathfrak{B}_u wird also ersetzt durch die Integration über ein hinreichend großes Dreieck \mathfrak{B}_u^* mit den Eckpunkten $(-a, -a), (b, -a), (b, b)$.

Das Flächenintegral $\iint_{\mathfrak{B}_u^*} g(x, y) dx dy$ stellt geometrisch das

Volumen eines von der Fläche $z = g(x, y)$ begrenzten Prismas mit der Grundfläche \mathfrak{B}_u^* dar. Zur numerischen Integration von $\iint_{\mathfrak{B}_u^*} g(x, y) dx dy$ zerlegt man den Bereich \mathfrak{B}_u^* z. B. in kleine

Quadrate $\mathfrak{R}_{\nu\mu}$ mit den Seiten Δx und Δy (oder in andere Flächenstücke, die den Bereich \mathfrak{B}_u^* möglichst voll überdecken). Für jedes Quadrat $\mathfrak{R}_{\nu\mu}$ berechnet man aus den zu den Eckpunkten von $\mathfrak{R}_{\nu\mu}$ gehörenden Werten z der Fläche $g(x, y)$ einen Mittelwert \bar{z} und betrachtet \bar{z} als Höhe einer Säule über $\mathfrak{R}_{\nu\mu}$. Die Summe der Volumina dieser Säulen ergibt einen Näherungswert für das Flächenintegral.

Die Berechnungen wiederholt man mit einer feineren Unterteilung — im einfachsten Fall halbiert man die Quadratseiten — bis aufeinanderfolgende Näherungswerte genügend genau übereinstimmen.

Der Rechenaufwand steigt nun bei Vergrößerung des Bereiches \mathfrak{B}_u^* und bei feinerer Unterteilung des Bereiches \mathfrak{B}_u^* sehr stark an. Bei zu kleiner Unterteilung besteht darüber hinaus die Gefahr, daß durch das Rechnen mit begrenzter Stellenzahl eine Akkumulation der Rundungsfehler eintritt und man damit völlig falsche Ergebnisse erhält. Die näherungsweise Berechnung des Flächenintegrals erfordert also erhebliche numerische Erfahrungen und eine genaue Kenntnis der Fläche $g(x, y)$.

Zur Umgehung der angedeuteten Schwierigkeiten kann man folgenden Weg einschlagen: Man versucht durch geeignete Annahmen über die Verteilungsdichten eine geschlossene Auswertung zu ermöglichen und prüft nach, ob die empirischen Häufigkeitsverteilungen wenigstens approximativ diese Voraussetzungen erfüllen. Durch eine Fehlerabschätzung wird man dann entscheiden, ob das Ersetzen der empirischen Verteilungen durch die vorgegebenen Verteilungen vertretbar ist. Dieser Weg soll auch hier besprochen werden.

2.3 Berechnung der iterierten Integrale im Falle unabhängiger, normalverteilter zufälliger Veränderlicher

In vielen praktischen Fällen werden die beiden zufälligen Veränderlichen X und Y voneinander unabhängig sein; oder es lassen sich von diesen Anteile abspalten, die auf beide in gleicher Weise einwirken, so daß die zufälligen Veränderlichen nach Abspaltung dieser Anteile voneinander unabhängig sind.

Es wird also vorausgesetzt, daß die beiden zufälligen Veränderlichen X und Y stochastisch unabhängig sind. Die Verteilungsdichte $g(x, y)$ läßt sich dann als Produkt $f(x) \varphi(y)$ schreiben, wobei $f(x)$ die Verteilungsdichte von X und $\varphi(y)$ die Verteilungsdichte von Y ist [1]. Dementsprechend vereinfacht sich Gl. (3) zu:

$$V = \iint_{\mathfrak{B}_u} g(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int_y^{+\infty} f(x) dx \right] dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^x \varphi(y) dy \right] dx \quad (4).$$

Die Auswertung dieser Integrale muß im allgemeinen ebenfalls numerisch erfolgen. Die Zahl der Rechenoperationen ist aber gegenüber der Berechnung von Gl. (3) verringert.

Die Auswertung läßt sich weiter vereinfachen, wenn man annimmt, daß X und Y unabhängige normalverteilte zufällige Veränderliche mit den Mittelwerten μ_1 bzw. μ_2 und den Varianzen σ_1^2 bzw. σ_2^2 sind, **Bild 2**.

Verwendete Formelzeichen

a	Abstand auf der x -Achse
b	Abstand auf der y -Achse
\mathfrak{B}	Bereich der x, y -Ebene
$\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_u$	Halbebene oberhalb bzw. unterhalb der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten in einem zweidimensionalen Koordinatensystem
$f(x), f^*(x)$	Verteilungsdichten der eindimensionalen zufälligen Veränderlichen X
$g(x, y)$	Verteilungsdichte einer zweidimensionalen zufälligen Veränderlichen
P	Wahrscheinlichkeit
$\mathfrak{R}_{\nu\mu}$	Quadrat
r	Hilfsveränderliche
s	Schätzwert von σ
t	Variable der standardisierten Normalverteilung
V	Flächenintegral oder Verluste
V_e	Integral oder Verluste bei einer empirischen Verteilung
$V_N, V_R, V_{R_1}, V_{R_2}$	Restintegrale oder Fehler der Verlustberechnung
X, Y, Z	zufällige Veränderliche
x, y, z	Realisationen von X, Y, Z
\bar{x}	Schätzwert von μ
z	Werte einer zweidimensionalen Verteilungsdichte
\in	Abkürzung für: Element einer Menge
$\varepsilon(x), \varepsilon^*(x)$	Fehlerfunktion (Differenz zweier Verteilungsdichten)
μ	Mittelwert einer Normalverteilung
ξ, η	Hilfsveränderliche
σ	Standardabweichung einer Normalverteilung
$\varphi(y)$	Verteilungsdichte der eindimensionalen zufälligen Veränderlichen Y
$\Phi(t)$	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung

Für die betreffenden Verteilungsdichten gilt dann:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}$$

und

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}$$

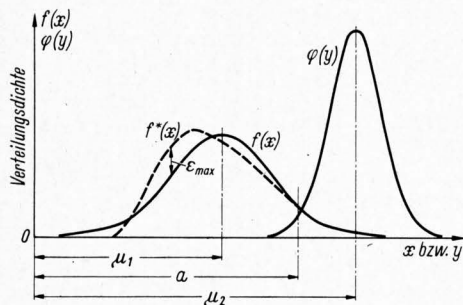


Bild 2. Verteilungsdichten zweier unabhängiger normalverteilter zufälliger Veränderlicher.

Aus Gl. (4) folgt damit:

$$V = \iint_{\Sigma_u} g(x,y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \left(\int_y^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} dx \right) dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} \left(\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} dy \right) dx \quad (5).$$

Die in Gl. (5) rechts aufgeführten iterierten Integrale lassen sich nun nach einem mündlichen Hinweis von *Hammelrath* (vergl. auch [2]) durch geeignete Substitutionen auf die standardisierte Normalverteilung zurückführen.

Für das erste Integral

$$V = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \left(\int_y^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} dx \right) dy \quad (6)$$

sollen diese Umformungen skizziert werden.

Setzt man in Gl. (6) $x = \xi + y + \mu_1$, so erhält man:

$$V = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \left(\int_{-\mu_1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\xi+y)^2}{\sigma_1^2}} d\xi \right) dy \quad (6')$$

und durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge

$$V = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\mu_1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\xi^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\mu_2^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(2\xi y - y^2) - \frac{1}{2\sigma_2^2}(y^2 - 2\mu_2 y)} dy \right) d\xi \quad (6'')$$

Zur Berechnung des inneren Integrals macht man den Ansatz $y = \eta + c\xi$, wobei c so bestimmt wird, daß der Koeffizient vor $\xi\eta$ verschwindet. Als Bestimmungsgleichung für c ergibt sich

$$\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right) c + \frac{1}{\sigma_1^2} = 0$$

und hieraus

$$c = -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Nach einer elementaren, aber umständlichen Rechnung erhält man für das innere Integral V_i von Gl. (6'') mit dem Ansatz

$$y = \eta - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \xi$$

die folgenden Beziehungen:

$$V_i = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(2\xi y + y^2) - \frac{1}{2\sigma_2^2}(y^2 - 2\mu_2 y)} dy = e^{\frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \xi^2 - \frac{\mu_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \xi + \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \frac{\mu_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \left(\eta - \mu_2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2} d\eta = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{\frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \xi^2 - \frac{\mu_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \xi + \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \frac{\mu_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}.$$

Die Gl. (6'') geht damit über in:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \int_{-\mu_1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} (\xi + \mu_2)^2} d\xi \quad (7).$$

Dieses Integral kann aber durch die Substitution

$$t = -\frac{\xi + \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

auf die standardisierte Normalverteilung zurückgeführt werden:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = \Phi \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \quad (8).$$

Da die standardisierte Normalverteilung ausreichend tabelliert vorliegt [3], ist hiermit die Berechnung des Flächenintegrals in Gl. (5) wesentlich vereinfacht.

2.4 Fehlerabschätzung bei Ersatz der Normalverteilungen durch empirische Verteilungen

In den praktischen Anwendungen werden sich die empirischen Verteilungen mehr oder weniger gut durch Normalverteilungen ersetzen lassen. In diesem Abschnitt soll für den Fall, daß die Verteilungsdichte $f(x)$ nur für $x > a$ durch eine Normalverteilung angenähert werden kann, eine Fehlerabschätzung hergeleitet werden.

Für das Folgende seien also X und Y stochastisch unabhängige zufällige Veränderliche; Y sei normalverteilt mit der Verteilungsdichte $\varphi(y)$, während X die Verteilungsdichte $f^*(x)$ besitze, Bild 2. Es ist daher das folgende Integral zu berechnen [Gl. (4)]:

$$V_e = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int_y^{+\infty} f^*(x) dx \right] dy \quad (9).$$

Ersetzt man die empirische Verteilung mit der Dichte $f^*(x)$ durch eine Normalverteilung mit der Dichte $f(x)$, so muß man eine Fehlerfunktion $\varepsilon(x)$ einführen. Da sich $f^*(x)$ für $x > a$ nicht von $f(x)$ unterscheiden soll, gilt:

$$f(x) = f^*(x) + \varepsilon(x), \text{ wobei } \varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^*(x) & \text{für } -\infty < x < a \\ 0 & \text{für } a < x < +\infty \text{ ist.} \end{cases}$$

Aus Gl. (9) erhält man mit diesem Ansatz:

$$V_e = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int_y^{+\infty} [f(x) - \varepsilon(x)] dx \right] dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int_y^{+\infty} f(x) dx \right] dy - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int_y^{+\infty} \varepsilon(x) dx \right] dy = V - V_R;$$

wobei $V = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int_y^{+\infty} f(x) dx \right] dy$ und

$$V_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int_y^{+\infty} \varepsilon(x) dx \right] dy = \int_{-\infty}^a \varphi(y) \left[\int_y^a \varepsilon^*(x) dx \right] dy$$

bedeuten.

Die Größe $|V_R| = |V_e - V|$ gibt damit den Betrag des Fehlers an, den man bei der Berechnung des Integrals begeht, wenn man eine Verteilung mit der Dichte $f^*(x)$ durch die Normalverteilung mit der Dichte $f(x)$ ersetzt. Um den Maximalwert dieses Fehlers zu bestimmen, ist $|V_R|$ nach oben abzuschätzen.

Wir erhalten:

$$|V_R| = \left| \int_{-\infty}^a \varphi(y) \left[\int_y^a \varepsilon^*(x) dx \right] dy \right| \leq \int_{-\infty}^a \varphi(y) \left| \int_y^a \varepsilon^*(x) dx \right| dy \leq$$

$$\leq \varepsilon_{\max} \int_{-\infty}^a (a-y) \varphi(y) dy =$$

$$= \varepsilon_{\max} a \int_{-\infty}^a \varphi(y) dy - \varepsilon_{\max} \int_{-\infty}^a y \varphi(y) dy =$$

$$= \varepsilon_{\max} (V_{R_1} + V_{R_2});$$

dabei ist $V_{R_1} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} dy$

$$V_{R_2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \int_{-\infty}^a y e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} dy.$$

Die beiden Integrale V_{R_1} und V_{R_2} lassen sich weiter vereinfachen. Aus V_{R_2} erhält man durch die Substitution $\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} = t$:

$$V_{R_2} = -\frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu_2}{\sigma_2}} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - \frac{\mu_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu_2}{\sigma_2}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt =$$

$$= \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} - \mu_2 \Phi\left(\frac{a-\mu_2}{\sigma_2}\right),$$

da das zweite Integral der standardisierten Normalverteilung entspricht und für das erste Integral die Stammfunktion $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ angegeben werden kann.

Für V_{R_1} ergibt sich mit der obigen Substitution

$$V_{R_1} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu_2}{\sigma_2}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = a \Phi\left(\frac{a-\mu_2}{\sigma_2}\right).$$

Damit haben wir schließlich die folgende Abschätzung erhalten:

$$|V_R| \leq \varepsilon_{\max} \left[(a-\mu_2) \Phi\left(\frac{a-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} \right] = A \quad (10).$$

Für den Spezialfall $\mu_2 = a$ vereinfacht sich diese Abschätzung zu:

$$|V_R| \leq \varepsilon_{\max} \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Entsprechende Abschätzungen für den Fall, daß sich $\varphi(y)$ nur für $y < a$ durch eine Normalverteilung annähern läßt, kann man aus dem dritten Integral der Gl. (4) ableiten. Bei Anwendung dieser Abschätzung A auf praktische Beispiele kann A

natürlich unzulässig große Werte annehmen. Zur Entscheidung, ob diese Werte tatsächlich berechtigt sind oder durch eine zu grobe Abschätzung nach oben bedingt sind, muß man auf die Gl. (3) zurückgreifen und diese numerisch auswerten. Die Anwendung der Abschätzung auf das unten angeführte Beispiel war jedoch zufriedenstellend. Die betreffenden Ergebnisse sind im Abschnitt 3.3 dargestellt.

2.5 Berechnung des Mittenabstandes der Verteilung bei gegebenem Wert des Integrals im Falle unabhängiger normalverteilter zufälliger Veränderlicher

Bei landtechnischen Problemen liegt im allgemeinen eine Umkehrung der Fragestellung vor. In diesem Falle ist der Wert des Integrals, beispielsweise als zulässige Verlustquote, gegeben; gesucht wird aber der einzustellende Werkzeugabstand. Er kann gleich dem Mittenabstand der Verteilungen $\mu_2 - \mu_1$ sein oder ist durch Addition oder Subtraktion aus ihm zu berechnen. Die Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 hingegen seien bekannt.

Führt man die Hilfsveränderliche $r = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$ ein, so kann man wegen

$$V = \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) = \Phi(-r)$$

aus den Tafeln der standardisierten Normalverteilung zu V zunächst den zugehörigen Wert r ermitteln. Man erhält z. B. für

V in %	0,1	0,25	0,5	1	2	5	10
r	3,1	2,81	2,58	2,32	2,05	1,65	1,28

Anschließend kann der gesuchte Mittenabstand $\mu_2 - \mu_1 = r\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ berechnet werden.

Zur Erleichterung dieser Rechnung dient das Kurvenblatt **Bild 3**. Es gibt eine allgemein anwendbare Darstellung von $(\mu_2 - \mu_1)/\sigma_1$ über σ_2/σ_1 mit V als Parameter. Wegen der speziellen Form des Ausdruckes r kann man die Darstellung auch für $(\mu_2 - \mu_1)/\sigma_2$ über σ_1/σ_2 verwenden.

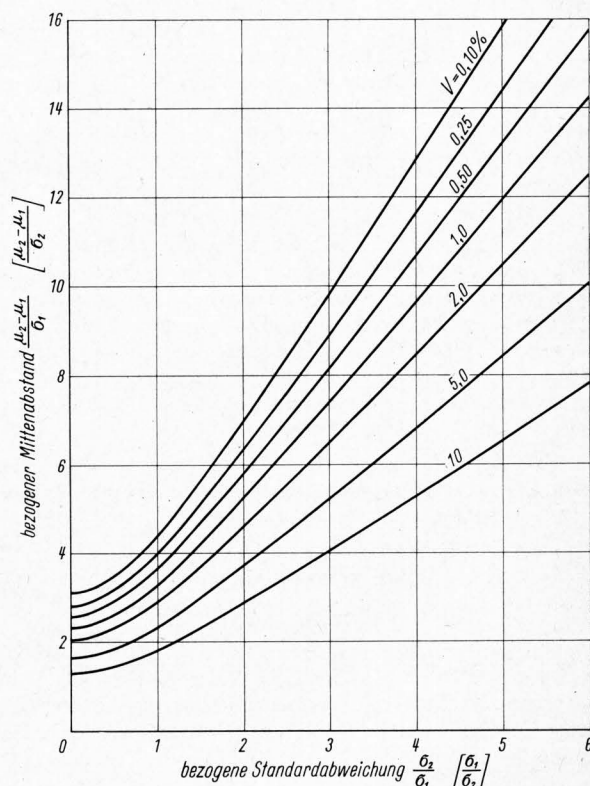


Bild 3. Dimensionslose Darstellung des Mittenabstandes zweier unabhängiger Normalverteilungen bei vorgegebenem Wert des Fehlerintegrals und vorgegebenen Standardabweichungen.

3 Beispiel: Berechnung des Schariefganges beim Kartoffelroden

3.1 Einführung

Das Rodeschar einer Kartoffelerntemaschine soll in seinem Tiefgang so geführt werden, daß einerseits möglichst alle Kartoffeln unbeschädigt geerntet werden, andererseits die aufgenommene Bodenmenge möglichst klein bleibt. Deshalb ist anzustreben, daß sich der Weg des Rodeschares der unteren Grenze des Knollenbehanges möglichst gut anschmiegt.

Aus zwei Gründen läßt sich dies aber nur unvollkommen erreichen. Erstens kann die Knollengrenze während des Rodens nicht gemessen, das Schar also nicht unmittelbar nach ihr geführt werden. Daher müssen charakteristische Linien auf der Ackeroberfläche — z. B. Dammfrst oder Furchensohle — an ihrer Statt zur Führung verwendet werden. Diese weisen aber Schwankungen gegenüber der Knollengrenze auf. Zweitens folgt das Schar der gewählten Führungslinie nicht exakt, es treten Schariefenschwankungen auf. Beide Arten von Schwankungen machen eine Vergrößerung der mittleren Rodetiefe notwendig, wenn die Verluste in zulässigen Grenzen bleiben sollen.

Es seien nun verschiedene Scharführungssysteme miteinander zu vergleichen, wobei auch die gewählte Führungslinie und die Bauart der Scharführung zu beurteilen sind. Als Beurteilungsmaßstab steht für den Vergleich die erforderliche Rodetiefe in ihrer Abhängigkeit von den Verlusten zur Verfügung.

Zur Lösung dieser Aufgabe kann man experimentell folgendermaßen vorgehen. Die zu vergleichenden Scharführungen werden nebeneinander auf dem Feld unter Variation der Rodetiefe eingesetzt und die auftretenden Verluste jeweils bestimmt. Damit man zuverlässige Aussagen gewinnt, müssen diese Versuche in mehreren Wiederholungen und auf verschiedenen Kartoffeläckern durchgeführt werden. Es ist also eine große Zahl aufwendiger Versuche notwendig. Trotzdem werden sich aus ihnen der Einfluß der Schwankungen der Knollentiefe und damit auch der Führungslinie und der Einfluß der Schariefenschwankungen, also der Bauart, jeweils für sich nur schwer und ungenau ermitteln lassen. Außerdem ist der Gültigkeitsbereich der Aussagen beschränkt.

Demgegenüber erlaubt die im Abschnitt 2 hergeleitete Berechnungsmethode eine günstigere Versuchsanstellung. Die Verteilung der Kartoffeln relativ zu den betrachteten Führungslinien und die Schwankungen des Scharweges können getrennt voneinander festgestellt werden. Dieses Vorgehen bietet wesentliche Vorteile. Die Versuche sind einfacher und brauchen nicht in so großer Zahl ausgeführt zu werden, der Einfluß der Tiefenlageschwankungen der Kartoffeln und der Schariefenschwankungen werden einzeln erkennbar, und es läßt sich ein klares Bild darüber gewinnen, wie sich deren Änderungen auswirken.

Die Berechnung der Schariefe aus Knollenverteilung, Schariefenschwankung und zulässigen Verlusten stellt somit eine Anwendung der hergeleiteten Gleichungen dar. Sie war zunächst der Ausgangspunkt der in Abschnitt 2 dargestellten Berechnungsmethode. Die für die Rodetiefenberechnung erhaltene mathematische Formulierung wurde verallgemeinert, weil sie auch auf andere Probleme anwendbar ist. Einige dieser Probleme wurden in der Einleitung angedeutet.

3.2 Interpretation des Formalsatzes und Berechnung der Arbeitstiefe bei vorgegebener Verlustwahrscheinlichkeit

Entsprechend Bild 4 können

- die Tiefenlage einer Kartoffelknolle durch eine zufällige Veränderliche X mit der Verteilungsdichte $f(x)$ und
- die Tiefenlage der Scharspitze eines Kartoffelroders durch eine zufällige Veränderliche Y mit der Verteilungsdichte $\varphi(y)$ beschrieben werden, wobei zunächst noch keine weiteren Annahmen über die Verteilungsdichten $f(x)$ und $\varphi(y)$ getroffen werden sollen.

Rodeverluste treten immer dann auf, wenn sich die Schneide des Rodeschares oberhalb des tiefsten Punktes einer Kartoffelknolle befindet, d. h. $Y \leq X$ ist, also die Realisationen von (X, Y) im Bereich \mathfrak{B}_u liegen. Wenn die Tiefenlage der Knollen und die

Tiefe der Scharspitze stochastisch unabhängig sind, erhalten wir nach Abschnitt 2 Gl. (4) für die Rodeverluste V :

$$V = \iint_{\mathfrak{B}_u} f(x) \varphi(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int_y^{+\infty} f(x) dx \right] dy.$$

Die einzelnen Glieder des zweiten Integrals können nun wie folgt interpretiert werden:

$f(x) dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich Kartoffelknollen in dem infinitesimalen Streifen dx in der Tiefe x befinden;

$\int_y^{+\infty} f(x) dx$ ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Kartoffeln unterhalb y .

Läuft das Schar in der Tiefe y , so geht der dem obigen Integral entsprechende Anteil der Kartoffeln verloren. Wegen der Tiefgangschwankungen des Schars befindet es sich nur zeitweilig in der Tiefe y , es ist

$\varphi(y) dy$ die Wahrscheinlichkeit, daß sich das Schar in dem infinitesimalen Streifen dy in der Tiefe y befindet.

Demnach ist

$\left[\int_y^{+\infty} f(x) dx \right] \varphi(y) dy$ die Wahrscheinlichkeit der Kartoffelverluste, hervorgerufen durch Aufenthalt des Schars in dem infinitesimalen Streifen dy in der Tiefe y .

Die insgesamt zu erwartenden Verluste ergeben sich durch Summation, sie betragen:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_y^{+\infty} f(x) dx \right] \varphi(y) dy.$$

Der obige Ansatz hätte damit unmittelbar zur mathematischen Formulierung der Rodeverluste verwendet werden können. Der allgemeine Ansatz in Abschnitt 2 ist aber aus methodischen Gründen vorzuziehen.

Die Schwankungen der Scharschneide hängen von der Funktion des Führungssystems und von den Ungleichmäßigkeiten des Ackers ab. Langwellige Unebenheiten des Ackers brauchen hierbei nicht berücksichtigt werden, weil sich ihnen sowohl die Knollenverteilung als auch der Weg des Roders anpaßt. Im übrigen ist in [4] aufgrund von Messungen gezeigt, daß die Schwankungen der Scharschneide im allgemeinen durch Normalverteilungen angenähert werden können.

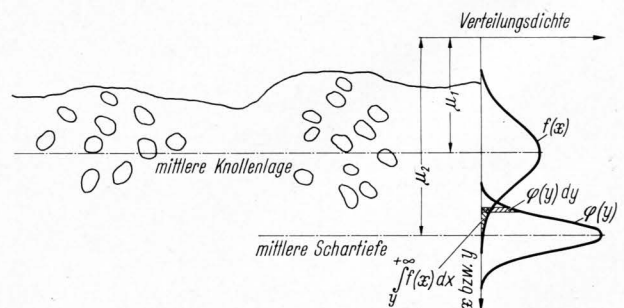


Bild 4. Knollenverteilung und Schwankung der Schariefe.

Von der vertikalen Knollenverteilung sei ebenfalls angenommen, daß sie sich in erster Näherung durch Normalverteilungen ersetzen läßt. Die Berechtigung dieser Annahme und die Auswirkungen von Abweichungen werden im Abschnitt 3.3 anhand praktischer Messungen untersucht. Falls $f(x)$ und $\varphi(y)$ die Dichten einer Normalverteilung sind, erhalten wir nach Abschnitt 2 für die Rodeverluste V :

$$V = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \left(\int_y^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} dx \right) dy = \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right).$$

Zu vorheriger Formel gelangt man auch durch folgende Überlegungen: Falls X und Y normalverteilt sind mit den Mittelwerten μ_1 bzw. μ_2 und den Varianzen σ_1^2 bzw. σ_2^2 , dann ist nach [5, 6] die zufällige Veränderliche $Z = Y - X$ normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu_2 - \mu_1$ und der Varianz $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Die Rodeverluste (vgl. Bild 4) ergeben sich für $Z = Y - X \leq 0$ und man erhält:

$$P(Z = Y - X \leq 0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2} \frac{[z - (\mu_2 - \mu_1)]^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} dz = \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right).$$

Zur Berechnung der Arbeitstiefe bei vorgegebener Verlustquote kann das Kurvenblatt Bild 3 dienen. Ein einfacheres Ablesen erlaubt aber das Kurvenblatt Bild 5. Es wurde speziell für die bei Rodeverlusten von Kartoffeln interessierenden Parameterbereiche unter Verwendung dimensionsbehalteter Größen aufgestellt, wobei ebenfalls die Beziehung

$$\mu_2 - \mu_1 = r \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

benutzt wurde. Der Mittenabstand $\mu_2 - \mu_1$ kann für vorgegebene Werte der Standardabweichung der Schartiefe σ_2 und der Knollenverteilung σ_1 für die Verlustquoten $V = 0,25, 0,5$ und 1% unmittelbar abgelesen werden. Die mittlere Schartiefe beträgt dann $\mu_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)$. Nehmen wir als Beispiel eine Streuung der Kartoffellage (σ_1) von $2,5$ cm und der Schartiefe (σ_2) von $1,0$ cm an bei einem vom Dammfirst aus gemessenen $\mu_1 = 9,8$ cm, so beträgt der Mittenabstand $\mu_2 - \mu_1$ bei $V = 1\%$ $6,3$ cm, bei $V = 0,25\%$ $7,5$ cm; daraus folgen die Tiefgänge $16,1$ cm bzw. $17,3$ cm.

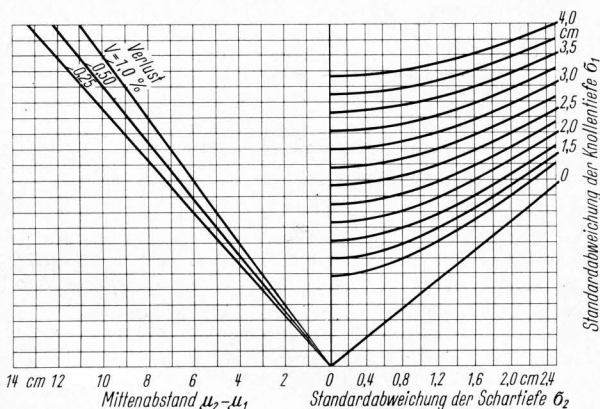


Bild 5. Ermittlung des mittleren Abstandes normalverteilter Knollenlagen und Schartiefen aus Standardabweichungen und Verlusten.

Dem Kurvenblatt ist generell zu entnehmen, daß bei kleinen Schartiefenstreuungen deren Einfluß auf den Mittenabstand gering ist, dann aber progressiv zunimmt.

3.3 Vergleich der Verluste bei Verwendung von empirischen und von Normalverteilungen

Nachdem im vorigen Abschnitt dargelegt wurde, wie unter Zugrundelegung von Normalverteilungen der Rodetiefgang bestimmt werden kann, soll nun anhand vorliegender Messungen gezeigt werden, welche Fehler infolge der vorgenommenen Vereinfachungen zu erwarten sind.

In [4] weisen die Normalverteilungen, mit denen sich die Schwankungen des Rodescharbes wiedergeben lassen, je nach Güte der Rodescharführung Standardabweichungen s_s von $0,5$ bis $1,0$ cm, in einem Fall auch $1,7$ cm, auf. Unter Benutzung dieser Standardabweichungen ist für empirische Knollenverteilungen zu prüfen, ob und wie diese durch Normalverteilungen ersetzt werden können.

Knollenverteilungen von vier verschiedenen Sorten an einem Ort hat Bialojan [7] vollständig gemessen und in einer für diese Prüfung geeigneten Form wiedergegeben. Leider ist das entsprechende Diagramm in der Veröffentlichung nur in kleinem

Maßstab gedruckt. Die Umzeichnung in Bild 6 kann deshalb mit Ungenauigkeiten behaftet sein, die aber für die Darlegungen dieses Beitrages ohne Belang sind. Außerdem stehen eigene Messungen [4] zur Verfügung, in denen aber nur das untere Drittel des Knollenbehanges erfaßt wurde.

Die Linienzüge in Bild 6 lassen sich in ihrer ganzen Länge nur sehr grob durch Geraden wiedergeben, d. h., die Knollenverteilungen unterscheiden sich beträchtlich von Normalverteilungen.

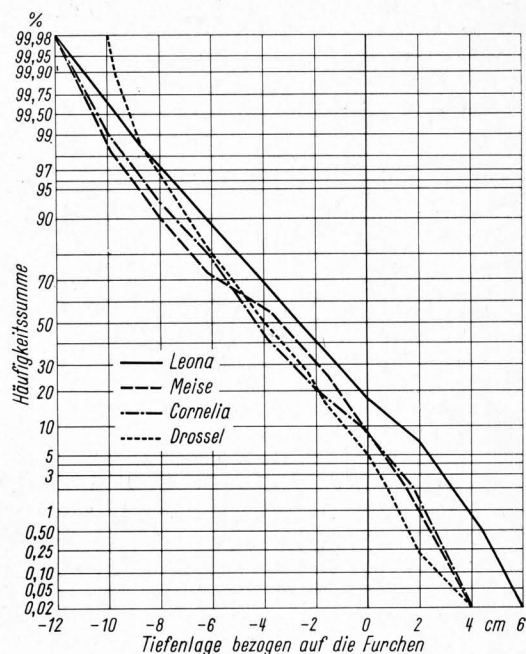


Bild 6. Vertikale Knollenverteilung von vier Sorten nach Bialojan [7].

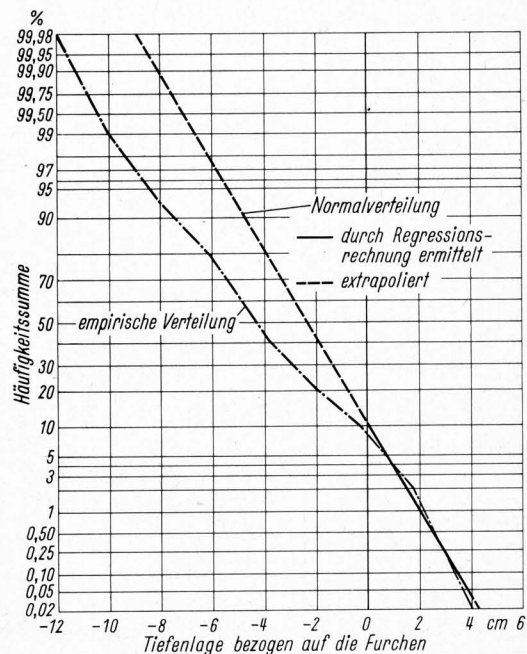


Bild 7. Knollenverteilung der Sorte Cornelia nach Bialojan [7] und die sie ersetzende Normalverteilung.

Besser gelingt die Annäherung offensichtlich, wenn man sich auf die unteren Äste der Linienzüge beschränkt. Deshalb wurden für diesen Teil die Ausgleichsgeraden durch Regressionsrechnungen ermittelt, wobei jeweils die Häufigkeitssummen der unteren 4 cm benutzt wurden. Bild 7 bringt die Ausgleichsgerade für die Sorte Cornelia, bei der die Unterschiede zwischen der Kurve und der Geraden am größten sind.

Nach [8] erhält man aus Geraden im Wahrscheinlichkeitsnetz die Schätzwerte für die Parameter σ_1 und μ_1 der Normalverteilungen nach den Formeln

$$s = \left| \frac{x_{84\%} - x_{16\%}}{2} \right| \text{ und } \bar{x} = x_{50\%}.$$

In **Tafel 1** sind die Schätzwerte aufgeführt, außerdem die maximalen Abweichungen ϵ_{\max} . Diese in Abschnitt 2.4 eingeführten Abweichungen wurden durch Aufzeichnung der Verteilungsdichten ermittelt.

Tafel 1. Schätzwerte für die Parameter der Normalverteilungen und deren maximalen Differenzen gegenüber den empirischen Verteilungen nach Messungen von *Bialojan*.

Sorte	\bar{x}	s	ϵ_{\max}
Leona	-2,65	1,93	12,2%
Cornelia	-2,32	1,86	13,8%
Meise	-2,40	1,84	9,2%
Drossel	-3,66	2,10	4,9%

In **Bild 8** sind über dem Schartiefgang die Verluste aufgetragen, die sich für die Sorte *Cornelia* bei einer Standardabweichung der Schartiefe σ_2 von 1 cm einmal nach der empirischen Verteilung, zum anderen mit den Parametern der **Tafel 1** ergeben. Bei Schartiefgängen zwischen 0 und 2 cm unter den Furchensohlen treten beträchtliche Unterschiede auf, unterhalb 2 cm aber nicht mehr. Wichtig sind aber nur die Tiefgänge, bei denen die Verluste unter 1% höchstens 2% bleiben.

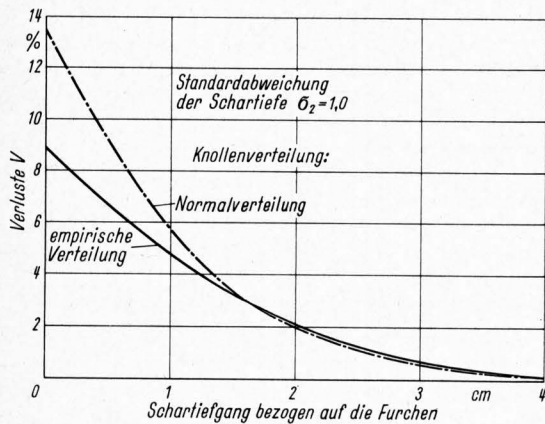


Bild 8. Verluste in Abhängigkeit von der Schartiefe für empirische und für Normalverteilung bei der Sorte *Cornelia* nach Messungen von *Bialojan*.

Obwohl nach diesem Diagramm der Vergleich für niedrige Verluste ein recht befriedigendes Bild ergibt, soll dieser Verlustbereich anhand des ganzen verfügbaren Materials noch genauer untersucht werden. Zu diesem Zweck sind in **Bild 9** im halb-logarithmischen Feld die relativen, d. h. die auf die theoretischen Verluste bezogenen Fehler über diesen Verlusten aufgetragen. Für den Bereich unterhalb $V = 2\%$, der allein interessiert, zeigt die dem **Bild 8** entsprechende Linie der Sorte *Cornelia* relative Fehlerbeträge bis etwa -20% , während die Mittelwerte aller vier Sorten nur relative Fehler zwischen $+10$ und -10% aufweisen.

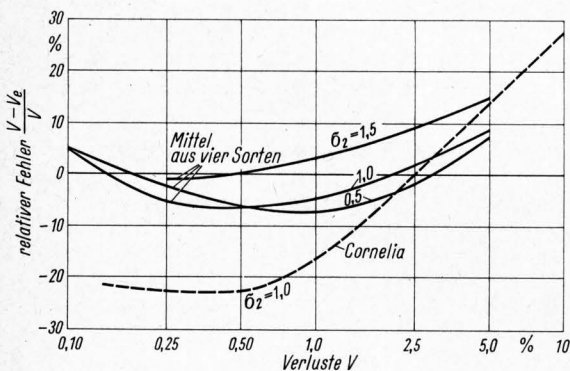


Bild 9. Relativer Fehler bei Ersatz der empirischen Verteilungen nach *Bialojan* durch Normalverteilungen. Mittelwerte aus den vier Sorten und Werte für *Cornelia*.

Diese Fehler seien noch auf ihre Herkunft analysiert. Zum Teil rühren sie daher, daß die Näherung des unteren Teiles der empirischen Verteilung durch Normalverteilungen unvollkommen ist („Näherungsfehler“ V_N), zum Teil beruhen sie auf der Extrapolation der unteren auf die restliche Verteilung („Extrapolationsfehler“ V_R), also ist hier $V - V_e = V_R + V_N$.

Der Extrapolationsfehler ist, wiederum bezogen auf die theoretischen Verluste, in **Bild 10 und 11** dargestellt. Für $\sigma_2 = 0,5$ und 1 cm ist er in beiden Diagrammen bis $V = 2\%$ unbedeutend, für $\sigma_2 = 1,5$ cm bleibt er bis $V = 1\%$ unter 5% und bei $V = 2\%$ immer noch unter 10%. Die im Bereich niedriger Verluste auftretenden Fehler sind also überwiegend Näherungsfehler. Auf den gleichen Bildern sind außerdem die Ergebnisse der Fehlerabschätzungen nach Gl. (10) eingetragen. Die Abschätzungen führen hier auf etwa die doppelten Werte der wirklichen Fehler.

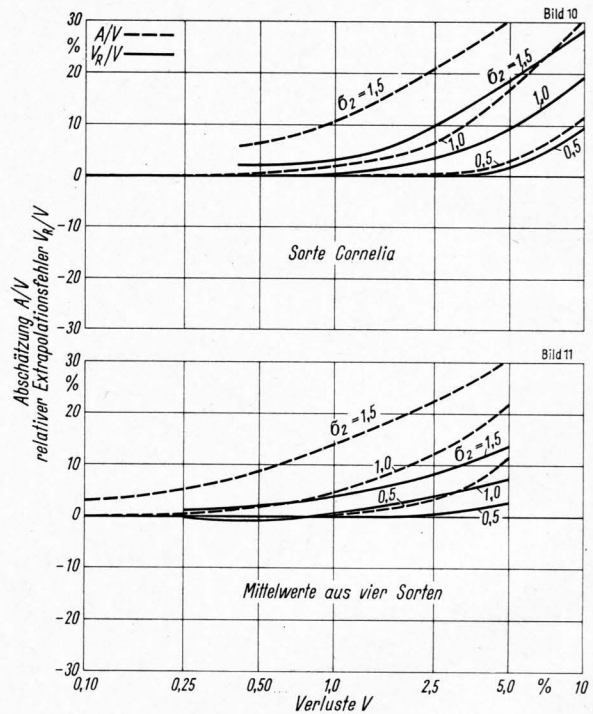


Bild 10 und 11. Relativer Extrapolationsfehler (relativer Fehler, der durch Extrapolation derjenigen Normalverteilung entsteht, mit der der untere Abschnitt der empirischen Knollenverteilung angenähert wurde) und seine Abschätzung nach Messungen von *Bialojan*.

Da demnach durch die Extrapolation bei der Berechnung von Verlusten, die in dem praktisch interessierenden Bereich liegen, keine großen Fehler entstehen, ist es berechtigt, sich bei Knollenlagemessungen auf die tiefliegenden Knollen zu beschränken, wie es in [4] geschehen ist. Der Ersatz dieser auf sechs Feldern gemessenen empirischen Verteilungen durch Normalverteilungen ist mit dem auf **Bild 12** wiedergegebenen mittleren Fehler behaftet. Die relativen Fehler für die einzelnen Felder liegen

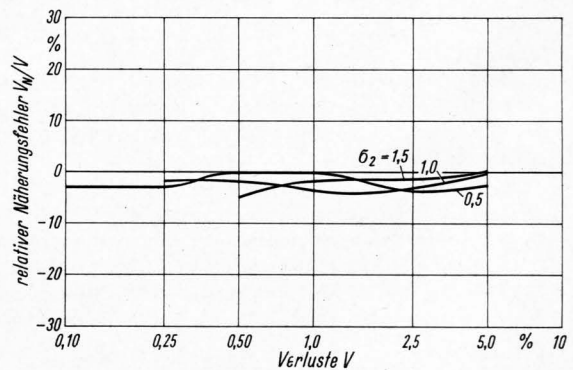


Bild 12. Relativer Fehler beim Ersatz der empirischen Knollenverteilungen durch Normalverteilungen. Mittelwerte aus sechs Feldern, auf denen nur der untere Teil der Knollenverteilung gemessen wurde (nach [4]).

innerhalb $\pm 5\%$. Im ganzen lassen sich die Ergebnisse dieser Messungen noch besser als die der Messungen in [7] durch Normalverteilungen wiedergeben.

Aufgrund der Fehlerrechnungen kommt man also zu dem Schluß, daß für Verlustrechnungen beim Kartoffelroden passend gewählte Normalverteilungen einen guten Ersatz der empirischen Knollenverteilungen darstellen. Sie müssen nur den Knollenverteilungen im unteren Teil des Dammes approximiert werden. Die Benutzung von Normalverteilungen bringt eine bedeutende Vereinfachung der Rechnung und erleichtert das Erkennen von Zusammenhängen wesentlich. Durch Benutzung des Nomogramms in Bild 5 kann die Rechnung noch weiter vereinfacht werden.

4 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Berechnungsmethode für landtechnische Probleme der folgenden Art angegeben: Gegeben ist ein Pflanzenbestand (Gut), der bearbeitet oder geerntet werden soll. Zu diesem Zweck ist ein Werkzeug entlang den Pflanzen oder Pflanzenteilen oder in bestimmter Höhe über den Pflanzen zu führen. Die Abmessungen oder die Lage des Gutes, kurz seine Verteilung quer zum Werkzeugweg ist unregelmäßig, so daß sie nur statistisch erfaßt werden kann. Auch der Werkzeugweg weist infolge wechselnder Einsatz- und Betriebsbedingungen zufällige Schwankungen auf. Der mittlere Abstand zwischen Gut und Werkzeug soll möglichst klein gehalten werden, es dürfen dabei am Gut sogar Beschädigungen oder Verluste vorgegebener Größe auftreten. Zur Beurteilung von Führungssystemen soll die Abhängigkeit der am Gut auftretenden Beschädigungen oder Verluste vom mittleren Abstand zwischen Gut und Werkzeug, von dessen Schwankungen und der Gutsverteilung ermittelt werden, um danach den optimalen Abstand festzulegen.

Die Berechnung der Verluste führt auf ein zweidimensionales Flächenintegral, dessen Auswertung im allgemeinen numerisch erfolgen muß und umständlich ist. Unter der Voraussetzung, daß sich die Verteilung des Gutes und die Schwankungen des Werkzeugweges durch zwei voneinander unabhängige Normalverteilungen wiedergeben lassen, konnte das Flächenintegral auf die standardisierte Normalverteilung zurückgeführt werden. Die Auswertung dieser Formeln wurde durch Kurvenblätter, die ein unmittelbares Ablesen der interessierenden Parameterwerte gestatten, dann noch weiter vereinfacht. Für den Fall, daß eine

der beiden Verteilungen nur zum Teil durch eine Normalverteilung angenähert werden kann, wurde eine Fehlerabschätzung durchgeführt.

Zur Prüfung auf ihre praktische Verwendbarkeit wurde die Methode dann auf die Tiefenführung des Rodeschars beim Kartoffelroden angewendet. Auf die Fehler, die dadurch entstehen, daß bei praktischen Problemen die theoretischen Voraussetzungen nicht exakt, sondern nur mehr oder weniger angenähert erfüllt sind, wurde ausführlich eingegangen. Dabei konnte gezeigt werden, daß man sich bei der Berechnung der Rodeverluste auf die Verteilung der tiefliegenden Knollen beschränken kann. Diese ließen sich aber — im Gegensatz zur Verteilung der Knollen über die gesamte Tiefe — gut durch Normalverteilungen annähern.

In der Landtechnik treten neben Problemen, die sich mit der hier beschriebenen Methode lösen lassen, auch Probleme verwandter Art auf, bei denen die Methode nicht unmittelbar anwendbar ist. Als Beispiele seien die Randüberdeckung beim Ausbringen von Stalldung mit hin- und hergehenden Streuwerken und beim Verteilen von Spritzmitteln von einem schwankenden Fahrzeug aus genannt. In diesen Fällen können ähnliche Ansätze unter Benutzung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ebenfalls zum Ziele führen.

5 Schrifttum

- [1] *Heinhold, J.*, und *K.-W. Gaede*: Ingenieur-Statistik. München/Wien: Oldenbourg-Verlag 1964.
- [2] *Hammelrath, F.*: Begegnungswahrscheinlichkeiten zwischen bewegten Objekten. Dt. Luft- und Raumfahrt, Forsch.-Ber. 65—42.
- [3] *Weber, E.*: Grundriß der biologischen Statistik. 4. Aufl. Jena: Fischer-Verlag 1961.
- [4] *Thaer, R.*: Tiefenlage der Kartoffeln im Damm und Tiefenführung des Rodeschars. Landtechn. Forsch. **17** (1967) H. 1.
- [5] *Schmetterer, L.*: Einführung in die mathematische Statistik. Wien: Springer-Verlag 1956.
- [6] *Pfanzagl, J.*: Allgemeine Methodenlehre der Statistik II. Berlin: Verlag Walter de Gruyter & Co. 1962.
- [7] *Bialojan, G.*: Ein Verfahren zur Ermittlung der Lage rodefähiger Kartoffeln im Dammquerschnitt. Dt. Agrartechn. **10** (1960) S. 427/28.
- [8] *Daeves, K.*, und *A. Beckel*: Großzahl-Methodik und Häufigkeits-Analyse. 2. Aufl. Weinheim: Verlag Chemie GmbH 1958.

DK 531.7:631.372-58

Die Entwicklung einer hydrostatischen Leistungsbremse zur Prüfung von Fahrzeug- und Schleppergetrieben

Von **Manfred Kahrs**, Braunschweig

Mit den bisher verwendeten Prüfständen für Fahrzeug- und Schleppergetriebe ist es nur unter Schwierigkeiten möglich, die Prüflinge bei kleinen Abtriebsdrehzahlen mit hohen Momenten zu belasten, wie es ihrem Einsatz entspricht. Nach einem Überblick der bekannten Prüfstände und Leistungsbremsen sowie deren Arbeitskennlinien und -grenzen werden die Möglichkeiten auf öhydrostatischer Basis arbeitender Leistungsbremsen dargestellt. Mit dieser Bauart ist nämlich das maximale Bremsmoment in jedem Punkt des Drehzahlbereichs einstellbar, und außerdem besteht die günstige Möglichkeit, stoßförmige Betriebsbelastungen aufzubringen. Wegen dieser und weiterer Vorzüge wurde eine öhydrostatische Leistungsbremse entwickelt und gebaut, deren Wirkungsweise, Konstruktion, Arbeitskennlinien und Herstellungskosten ausführlich beschrieben werden.

Dipl.-Ing. Manfred Kahrs ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Landmaschinen (Direktor: Prof. Dr.-Ing. H. J. Matthies) der Technischen Hochschule Braunschweig.

1. Einleitung

Bei der Entwicklung von Fahrzeugen, Landmaschinen und Schleppern hat die Erprobung der Bauteile hinsichtlich ihrer Funktion und Haltbarkeit in den letzten Jahren infolge der gestiegenen Anforderungen und der größeren Produktionszahlen eine immer größere Bedeutung gewonnen. Dabei hat es sich herausgestellt, daß es zweckmäßig und vielfach sogar unumgänglich ist, die Erprobung hauptsächlich im Laborversuch durchzuführen und den Betriebsversuch auf der Straße oder auf dem Acker nur noch in wenigen notwendigen Fällen vorzunehmen.

Die für die Laboruntersuchungen benötigten Prüfeinrichtungen sind daher ihrer Verwendung entsprechend sehr vielfältig. Hier sollen jedoch nur die für die Entwicklung von Fahrzeuggetrieben — oder besser Wandlern — benötigten Prüfstände behandelt werden. Schon seit langer Zeit sind verschiedene Bauarten von Prüfständen für Getriebe bekannt, über die im nächsten Abschnitt zunächst ein kurzer Überblick gegeben wird. Für die in