Auswertung von stochastischen Signalen

Teil I: Beschreibung kontinuierlicher stochastischer Abläufe

Von W. Paul, Braunschweig-Völkenrode *)

DK 519.2

Bei vielen Messungen fallen stochastische Signale an. Sie lassen sich vollständig mit ihren Verteilungen der Amplituden und der Frequenzen beschreiben. In diesem Beitrag ist die Theorie der zur Beschreibung dieser Verteilungen geeigneten statistischen Mittel zusammengestellt. Besondere Beachtung finden dabei die Vorschriften für die meßtechnische Ermittlung der Kenngrößen und Funktionen.

1. Klassifizierung von Daten

Unter Messen versteht man die empirische Bestimmung von zahlenmäßig erfaßbaren Größen. Das Zuordnen der Zahlen kann stetig oder zeitlich diskret geschehen. Entsprechend erhält man kontinuierliche oder diskrete Meßwerte. Die Theorie der Signale und ihre praktische Anwendung unterscheiden sich für kontinuierliche und diskrete Meßwerte im Grundsatz nicht. Im folgenden werden nur kontinuierliche Signale betrachtet.

Die weitere Klassifizierung von Meßwerten erfolgt danach, ob es sich um deterministische oder nichtdeterministische Daten handelt. Die Unterscheidung läßt sich über den zeitlichen Verlauf der Meßgröße x (t) vornehmen. Deterministische Daten liegen dann vor, wenn sich das betrachtete Signal eindeutig durch Gesetzmäßigkeiten beschreiben läßt. Daher ist sein zukünftiges Verhalten auch vorhersagbar. Die Gesetzmäßigkeiten kann man oft durch periodische Funktionen, e-Funktionen oder Polynome ausdrücken, **Bild 1**.

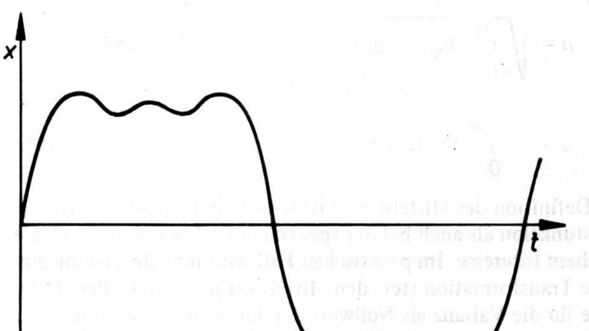

Bild 1. Periodisches Signal

**) Dr.-Ing. Wolfgang Paul ist wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für landtechnische Grundlagenforschung (Direktor: Prof.Dr.-Ing. W. Batel) der Forschungsanstalt für Landwirtschaft, Braunschweig-Völkenrode*

Nichtdeterministische Signale nennt man auch stochastisch oder zufällig. Beide Bezeichnungen sind gleichwertig, doch findet man die Bezeichnung stochastisch besonders häufig in Zusammenhang mit zeitlich veränderlichen Prozessen [1]. Bei stochastischen Signalen lassen sich keine sicheren Voraussagen über zukünftige Zahlenwerte machen. Man kann aber die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens bestimmter Zahlenwerte oder bestimmter Frequenzen voraussagen. Stochastische Signale lassen sich also nur durch statistische Kenngrößen beschreiben.

Für die praktische Behandlung von stochastischen Signalen ist es notwendig, weitere Unterscheidungen zu treffen. So ist zu prüfen, ob ein zufälliger Datensatz stationär oder nichtstationär ist, **Bild 2.** Als stationär bezeichnet man einen Datensatz im eingeschwungenen Zustand. Er ist durch einen konstanten Mittelwert und eine konstante Streuung gekennzeichnet. Nichtstationär werden z. B. stationäre Signale, die plötzlich auf ein Filter aufgeschaltet werden, solange das Filter noch nicht eingeschwungen ist.

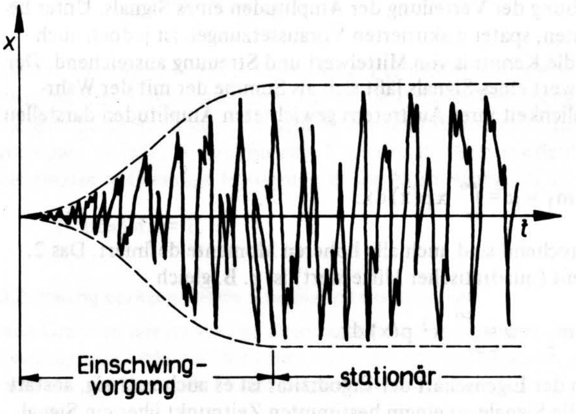

Bild 2. Stochastisches Signal

Eine weitere wichtige Unterscheidung von Signalen ist die nach der Eigenschaft homogen oder nicht homogen. Ein homogenes Signal zeichnet sich dadurch aus, daß sein Erwartungswert gleich seinem zeitlichen Mittelwert ist. Oder anders ausgedrückt: bei einer großen Zahl von gleichen homogenen Signalen muß der Mittelwert über alle Signale zu einem bestimmten Zeitpunkt gleich dem Mittelwert eines Signals über einen beliebigen hinreichend großen Zeitabschnitt sein. Die Forderung der Homogenität ist bei in der Praxis vorkommenden Signalen fast immer erfüllt. Sie ist eine "mathematische" Forderung, die in der Praxis nur schwer nachprüfbar ist.

Wenn ein Signal stationär und homogen ist, nennt man es ergodisch. Nur für ergodische Signale gibt es eine ausgereifte Theorie. Für alle folgenden Betrachtungen ist deshalb vorausgesetzt, daß es sich um ergodische Signale handelt. Ob die Eigenschaft "ergodisch" für das betrachtete Signal auch zutrifft, muß stets geprüft werden.

2. Grundsätzliche Beschreibungsmöglichkeiten stochastischer Signale

Die vollständige Beschreibung eines stochastischen Signals ist durch seine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und durch eine seiner Korrelationsfunktionen möglich. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der das Signal zu einem bestimmten Zeitpunkt einen bestimmten Wert annimmt. Jede der Korrelationsfunktionen beschreibt die Abhängigkeit des Signals zu einem bestimmten Zeitpunkt von den Werten des Signal zu früheren Zeitpunkten, d. h. nach welchen Gesetzen der Wahrscheinlichkeit eine Änderung des Signales eintritt. Es geben also an: die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion die Verteilung der A m p l i t u d e n des Signals, die Korrelationsfunktionen die Verteilung der F r e q u e n z e n.

2.1 Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist definiert als der auf die Bereichsbreite Δx bezogene Grenzwert der Wahrscheinlichkeit, mit der das Signal $x(t)$ im Bereich $(x, x + \Delta x)$ liegt:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{Prob}[x \leqslant x(t) \leqslant x + \Delta x]}{\Delta x} \qquad (1).$$

Aus der Definition (1) ergibt sich unmittelbar eine Meßvorschrift für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Weiter ergibt sich aus Gleichung (1) auch die Wahrscheinlichkeit, mit der das Signal gerade im Bereich (x_1, x_2) liegt:

$$\mathrm{Prob}[x_1 \leqslant x(t) \leqslant x_2] = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist die vollständige Beschreibung der Verteilung der Amplituden eines Signals. Unter bestimmten, später diskutierten Voraussetzungen ist jedoch auch allein die Kenntnis von Mittelwert und Streuung ausreichend. Der Mittelwert eines Signals läßt sich als Summe der mit der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens gewichteten Amplituden darstellen:

$$m_1 = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx.$$

Entsprechend sind auch alle höheren Momente definiert. Das 2. Moment (quadratischer Mittelwert) ist z. B. gleich

$$m_2 = \psi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,p(x)\,dx.$$

Wegen der Eigenschaft der Ergodizität ist es auch zulässig, anstatt über alle Signale zu einem bestimmten Zeitpunkt über ein Signal in hinreichend großer Zeitspanne zu bilanzieren. Der Mittelwert ist dann definiert als

$$m_1 = \mu = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt \qquad (2),$$

der quadratische Mittelwert als

$$m_2 = \psi = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)\,dt \qquad (3).$$

Die entsprechenden höheren Momente errechnen sich analog. Die Gleichungen (2) und (3) liefern direkte Hinweise für die Meßwertverarbeitung zur Bestimmung dieser Kenngrößen.

Für viele Fälle ist die Varianz, die als mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert definiert ist, von besonderer Bedeutung:

$$\mathrm{Var} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu]^2\,dt.$$

Die positive Wurzel der Varianz heißt Standardabweichung (Streuung):

$$\sigma = +\sqrt{\mathrm{Var}}\,.$$

Aus der Definition der Varianz ergibt sich die häufig gebrauchte Berechnungsformel:

$$\mathrm{Var} = \psi - \mu^2 \qquad (4).$$

Neben den klassischen Maßen Mittelwert (arithmetischer Mittelwert) und Varianz (quadratischer Mittelwert bei $\mu = 0$) haben auch der häufigste Wert, der Zentralwert und der geometrische Mittelwert als Maße für die Lage einer Verteilung, die Spannweite und die durchschnittliche Abweichung als Maße für die Streuung Bedeutung [2].

2.2 Korrelationsfunktionen

Die Korrelationsfunktionen beschreiben die statistischen Gesetzmäßigkeiten des betrachteten Signals im Zeit- oder Frequenzbereich. Die Autokorrelationsfunktion ist eine Beziehung, die die Abhängigkeit der zukünftigen Werte des Signals von den bisherigen Werten angibt:

$$R_X(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,x(t + \tau)\,dt \qquad (5).$$

Die Autokorrelationsfunktion ist stets symmetrisch. Sie hat ihr Maximum bei $\tau = 0$. Aus der Definitionsgleichung (5) leitet man sofort die Beziehung für den quadratischen Mittelwert ab:

$$\psi = R_X(0).$$

Für nicht streng periodische Signale erhält man den Mittelwert aus:

$$\mu = \sqrt{R_X(\infty)}.$$

Statt der Autokorrelationsfunktion wird oft auch die Leistungsdichtefunktion verwendet. Besonders bei der Betrachtung linearer Prozesse bringt diese Beschreibung Vorteile, weil man mit ihr direkt an die ausgereifte Theorie linearer Systeme anknüpfen kann. Die Leistungsdichtefunktion (auch spektrale Dichte, Leistungsdichte-Spektrum oder Power-Spektrum genannt) ist die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion:

$$\Phi_X(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos\omega\tau\,d\tau.$$

Die Leistungsdichtefunktion beschreibt die Verteilung der Frequenzanteile des Signals. Alle Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion werden entsprechend der Transformation auch in den Frequenzbereich abgebildet. Insbesondere gilt:

$$\mu = \sqrt{\int_{-0}^{0} \Phi_X(\omega)\,d\omega} \qquad \text{und}$$

$$\psi = \int_0^{\infty} \Phi_X(\omega)\,d\omega \qquad (6).$$

Die Definition des Mittelwertes ist sowohl bei der Autokorrelationsfunktion als auch bei der spektralen Dichte von mehr akademischem Interesse. Im praktischen Fall wird man durch eine einfache Transformation stets den Mittelwert $\mu = 0$ einstellen. Die Maße für die Varianz als Nullwert der Autokorrelation oder als Fläche der spektralen Dichte sind jedoch von praktischem Interesse.

Die Funktion der spektralen Dichte ist auch darstellbar als Grenzwert des quadratischen Mittelwertes eines Frequenzbandes $(\omega, \omega + \Delta\omega)$:

$$\Phi_X(\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{1}{\Delta\omega} \left[\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, \omega, \omega + \Delta\omega)\,dt \right] \qquad (7).$$

Gleichung (7) kann ebenso der Deutung wie der Messung der spektralen Dichte dienen. Danach nimmt man ein scharf begrenztes, enges Filter mit der Bandbreite $\Delta\omega$. Durch das Filter wird das Quadrat des stochastischen Signals $x(t)$ geschickt. Der durchgehende Anteil liegt im Frequenzbereich $(\omega, \omega + \Delta\omega)$. Die spektrale Dichte ist so ein Maß für den quadratischen Mittelwert des im betrachteten Frequenzbereich liegenden Anteil des Signals. Wegen des zweifachen Grenzübergangs ist jedoch eine Messung einzelner Punkte der spektralen Dichte nach Gleichung (7) meist problematisch.

Gleichung (7) gibt gleichzeitig auch eine Erklärung für die Bezeichnung Leistungsdichtefunktion. Die Leistung ist in vielen physikalischen Beziehungen proportional dem Quadrat der Zustandsgröße. Ein Beispiel aus der Elektrotechnik: Wenn eine stochastische Spannung $x(t)$ an einem Widerstand von 1 Ohm liegt, dann ist $x^2(t)$ die Gesamtleistung am Widerstand. $\Phi_x(\omega)$ ist nach Gleichung (7) dann der Leistungsanteil im Frequenzbereich $(\omega, \omega + \Delta\omega)$.
Neben der Autokorrelation eines Signals gewinnt man auch aus der Kreuzkorrelation von zwei Signalen Informationen. Die Kreuzkorrelationsfunktion ist definiert als:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)d\tau.$$

Die Fourier-Transformierte der Kreuzkorrelationsfunktion heißt Kreuzdichtefunktion.

3. Einige wichtige Klassen von Signalen

Signale kann man nach ihrer Wahrscheinlichkeitsdichte (Verteilung der Amplituden) oder nach ihren Zeit- oder Frequenzeigenschaften (Korrelationsfunktionen) charakterisieren.

3.1 Häufig vorkommende Wahrscheinlichkeitsdichten

3.1.1 Die Gleichverteilung (oder auch Rechteckverteilung), **Bild 3**, nach der die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten aller zulässigen Amplituden gleich ist, wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{für } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{im übrigen Bereich} \end{cases}$$

beschrieben. Der Mittelwert eines gleichverteilten Signals ist danach gleich

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\,dx = \frac{b+a}{2},$$

das 2. Moment errechnet sich zu

$$\psi = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\,dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Aus der Gleichverteilung läßt sich durch Transformation jede andere Verteilung gewinnen.

3.1.2 Die Gaußverteilung (Normalverteilung) ist eine sehr oft vorkommende Verteilung. Sie ist durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp\left[-2\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]$$

gegeben. Der Mittelwert eines normalverteilten Signals ist

$$\mu = a,$$

seine Streuung gleich

$$\sigma = b.$$

Diese einfachen Beziehungen erlauben es, allein mit der Kenntnis von Mittelwert und Streuung eines gaußverteilten Signals die vollständige Verteilung der Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Die Gaußverteilung ist auch für die praktische Klassifizierung von Signalen geeignet. Nach dem zentralen Grenzwertsatz stellt sich nämlich immer dann eine Gaußverteilung ein, wenn eine große Summe von unabhängigen, zufälligen Ereignissen auf das Signal einwirkt [1]. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der einzelnen Einflüsse können dabei beliebig sein.

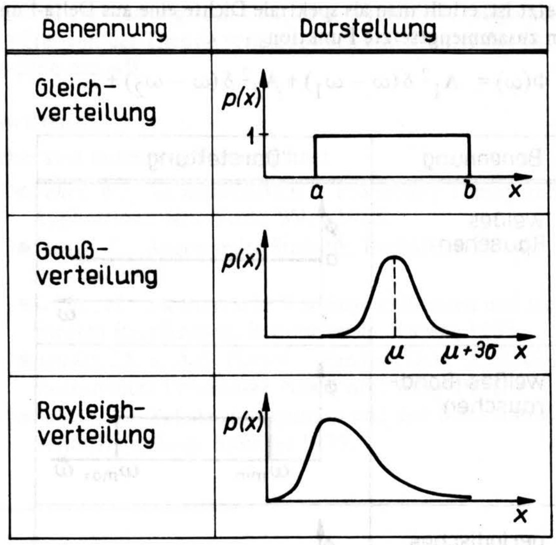

Bild 3. Einige Wahrscheinlichkeitsdichten

3.1.3 Als ein Beispiel für eine schiefe Verteilung wird die Rayleigh-Verteilung gewählt:

$$p(x) = \frac{x}{c^2} \exp\left[-\frac{x^2}{2c^2}\right].$$

Sie hat nur eingeschränkte Bedeutung. Für nichtkontinuierliche Prozesse und Schaltfunktionen haben die Poisson-Verteilung und die Binomialverteilung einen großen Anwendungsbereich. Im allgemeinen ist jeder Ansatz für eine Verteilungsfunktion erlaubt, die einzige notwendige Forderung ist die Normierung auf 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1.$$

3.2 Häufig vorkommende Korrelationsfunktionen

Aus Gründen der leichteren Deutbarkeit und der besseren Verarbeitungsmöglichkeiten wird hier nicht die Autokorrelation, sondern nur die spektrale Dichte betrachtet.

3.2.1 Wenn alle Frequenzen im stochastischen Signal gleichmäßig vorhanden sind, spricht man von weißem Rauschen, **Bild 4**,

$$\Phi(\omega) = a.$$

Weißes Rauschen ist streng genommen ein Idealfall. Gleichwohl ist die Annahme eines weißen Rauschens für viele physikalische Signale gerechtfertigt. Die Abstrahlung der Sonne im sichtbaren Teil ist z. B. "weiß". Ebenso trifft diese Annahme auch häufig für akustisches oder thermisches Rauschen zu.

3.2.2 Im Normalfall wird das weiße Rauschen jedoch frequenzbeschränkt sein. Man spricht so z. B. von einem weißen Tiefpaß-Rauschen

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} a \text{ für } 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_{grenz} \\ 0 \text{ für } \omega > \omega_{grenz} \end{cases}$$

oder einem weißen Bandpaß-Rauschen

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ für } \omega < \omega_{min} \\ a \text{ für } \omega_{min} \leqslant \omega \leqslant \omega_{max} \\ 0 \text{ für } \omega > \omega_{max} \end{cases}.$$

3.2.3 Beliebige andere Funktionen sind ebenfalls als spektrale Dichte denkbar. Das Maximum dieser Funktion zeigt an, welche Frequenzanteile am häufigsten im Signal vorkommen. Als Grenzfall ist die Betrachtung einer Reihenentwicklung eines periodischen Signals von Interesse. Wenn

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t) + ...$$

angesetzt ist, erhält man als spektrale Dichte eine aus Delta-Funktionen zusammengesetzte Funktion

$$\Phi(\omega) = A_1^2\, \delta(\omega - \omega_1) + A_2^2\, \delta(\omega - \omega_2) + ... \;.$$

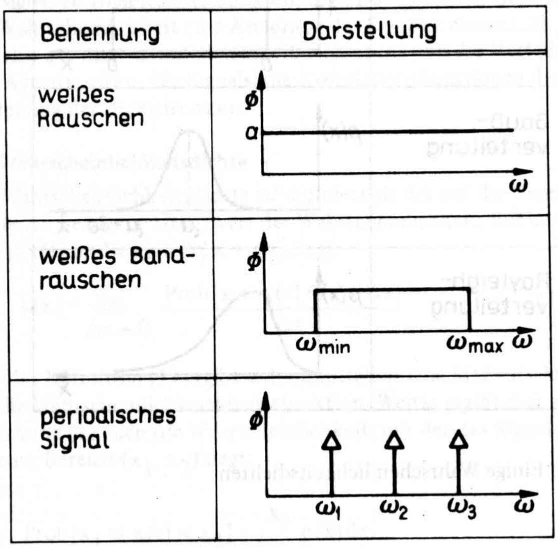

Bild 4. Einige Leistungsdichten

4. Eingangs-Ausgangsbeziehungen

Ein stochastisches Signal ist stets mit einem physikalischen Vorgang verbunden. Es ist Eingangs- oder Ausgangsgröße. Die Gesetzmäßigkeiten stochastischer Signale bei der Transformation durch physikalische Prozesse sind daher von Interesse.

4.1 Statische Systeme

Eine allgemeine statische Transformation $y(t) = f(x(t))$ wirkt per Definition nur auf die Amplituden des betrachteten Signals. Die Korrelationsfunktionen können aber beim Durchlaufen von statischen Systemen durch nichtlineare Verzerrung auch zusätzliche spektrale Komponenten bekommen. Bezeichnet man den zusätzlichen Anteil mit $v(t)$, so ergibt sich der Ansatz

$$y(t) = K\,x(t) + v(t).$$

Für ein Signal mit dem Mittelwert Null (was man aus vielerlei Gründen stets anstreben sollte und durch lineare Verschiebung des Signals stets erreichen kann) ist die Ersatzverstärkung K vorwiegend (bei Gaußschen Prozessen nur) eine Funktion der Streuung σ des Eingangssignals und berechnet sich zu:

$$K(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, p(x)\, dx.$$

Mit der äquivalenten Verstärkung $K(\sigma)$ und kleinen Verzerrungen $v(t)$ ergeben sich folgende Abbildungsregeln für die Korrelationsfunktionen:

$$\Phi_y(\omega) = K^2(\sigma)\Phi_x(\omega),$$
$$\Phi_{xy}(\omega) = K(\sigma)\Phi_x(\omega)\,.$$

Neben diesen verallgemeinerten Abbildungen kann man an der Definition nach Gl. (7) erkennen, daß für eine lineare Transformation

$$y = b\,x(t)$$

die obigen Gleichungen mit K = b exakt gelten.

Neben der Abbildung der spektralen Dichte sei auch die Abbildung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beim Durchlaufen eines beliebigen nichtlinearen Prozesses betrachtet. Es gilt der Satz [1, 2]:

$$p(y) = p(x) \Big/ \frac{dy}{dx}\,.$$

Die Ableitung dy/dx ist aus der Definition der Nichtlinearität stets errechenbar.

4.2 Dynamische Systeme

Das Verhalten stochastischer Signale beim Durchlaufen von nichtlinearen dynamischen Systemen ist nur schwer überschaubar. Ein Ansatz für eine theoretische Behandlung ist in [3] gegeben. Für lineare Systeme existiert jedoch eine umfassende Theorie, die direkt an die ausgereifte Theorie von Regelungsvorgängen anknüpft.

Das lineare System sei durch seinen Frequenzgang $F(j\omega)$ beschrieben. Auf das System wirkt ein stochastisches Signal $X(j\omega)$. Am Ausgang erhält man dann:

$$Y(j\omega) = F(j\omega)\,X(j\omega).$$

Statische Charakteristika von Eingangsgrößen werden beim Durchlaufen eines Prozesses verändert. Für die Amplitudenverteilung gilt, daß sie auch bei linearen Prozessen verändert werden kann. Nur Gaußverteilungen bleiben stets erhalten.

Von praktischer Wichtigkeit sind die Beziehungen für die Veränderungen der Frequenzcharakteristik. Es gelten die Beziehungen

$$\Phi_y(\omega) = |\,F(j\omega)\,|^2\; \Phi_x(\omega) \qquad (8)$$

und

$$\Phi_{xy}(j\omega) = F(j\omega)\; \Phi_x(\omega)\,.$$

Man hat so zwei Formeln, nach denen man die spektrale Dichte am Ausgang aus Kenntnis des Eingangs und des Systems direkt berechnen kann. Diese Formeln dienen auch zur Messung von spektralen Dichten und zur Systemidentifizierung [4].

5. Messung statistischer Kenngrößen

Mit den Gleichungen (1) bis (8) stehen die wichtigsten Formeln zur Messung oder Berechnung statistischer Kenngrößen zur Verfügung. Ein Simulationsprogramm zur Berechnung auch komplizierterer Maße ist in [5] angegeben.
In den Formeln (2) bis (6) wird dabei ein Grenzübergang zu unendlich großen Zeiten verlangt. Da der Fehler beim Betrachten von nur endlichen Zeitspannen in diesen Fällen proportional 1/T ist, wird er für große Zeiten beliebig klein und die Ausführung des Grenzüberganges ist unproblematisch.

Kritisch kann die Ausführung des Grenzüberganges $\Delta\omega \to 0$ bei der Messung der spektralen Dichte nach Gleichung (7) sein. Der Messung der Leistungsdichtefunktion kommt nicht zuletzt auch deshalb erhöhte Bedeutung zu, weil bei normalverteilten Prozessen mit dem Mittelwert Null (der am häufigsten vorkommende praktische Fall) allein die Kenntnis der Leistungsdichtefunktion ausreicht, das stochastische Signal vollständig zu beschreiben, weil die zur Charakterisierung der Gaußverteilung allein benötigte Streuung σ sich nach Gleichung (6) als Wurzel der Fläche unter der Leistungsdichtefunktion berechnet. Eine erhöhte Aufmerksamkeit bei der Messung der Leistungsdichtefunktion ist deshalb gerechtfertigt.

Eine Messung der spektralen Dichte nach Gleichung (7) verlangt ein sehr eng begrenztes "ideales" Bandfilter mit senkrechten Flanken. Auch nahezu ideale Filter, die nur den Frequenzbereich $(\omega, \omega + \Delta\omega)$ durchlassen und alle anderen Frequenzen auslöschen, sind in der benötigten Steilheit nur selten vorhanden. Für ein praktisches Vorgehen kann es ausreichend sein, das Frequenzband $\Delta\omega$, mit einer bestimmten Ausgangsbreite beginnend, mehrmals zu verkleinern und die Messung nach Gleichung (7) durchzuführen.

Man wird eine deutliche Konvergenz auf den wahren Wert der spektralen Dichte an der Stelle $\omega + \Delta\omega/2$ feststellen. Aus dem Verlauf der Konvergenz ergibt sich ein Maß für die zulässige Bandbreite $\Delta\omega$.

Da aber in vielen Fällen ein ideales Filter für eine Messung nach Gleichung (7) nicht vorhanden ist, kann in diesen Fällen eine Messung nach den Gleichungen (8) und (6) geeignet sein. Aus beiden Gleichungen erhält man sofort

$$\psi = \int_0^\infty |F(j\omega)|^2 \Phi_x(\omega)\, d\omega .$$

Der Betrag des Frequenzganges ist die Amplitudencharakteristik $A(\omega)$. Bei Verwendung eines Bandfilters ist $A(\omega)$ im Durchlaßbereich konstant. Man kann deshalb wie folgt umschreiben:

$$\Phi_x(\omega_0) = \frac{\psi}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} A^2(\omega)\, d\omega} \qquad (9).$$

Die Meßmethode für einen Punkt des Leistungsdichtespektrums $\Phi_x(\omega)$ an der Stelle $\omega = \omega_0$ (Mittelfrequenz des Bandpasses (ω_1, ω_2)) ist mit Gleichung (9) gegeben. Man teilt dazu den quadratischen Mittelwert des Signals $y(t)$ am Ausgang des Bandpasses durch die Fläche des Quadrates des Amplitudenganges des Bandpasses. Die Eichung des Amplitudenganges auf die Fläche 1 kann z. B. mit weißem Rauschen ($\Phi_x = 1$) nach Gleichung (8) leicht geschehen:

$$\psi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} A^2(\omega)\, d\omega \Rightarrow 1 .$$

Auch bei der Messung nach Gleichung (9) wird ein möglichst steiles Filter von der Theorie verlangt, doch entfällt hier der Grenzübergang $\Delta\omega \to 0$.

Schrifttum

Bücher sind durch ● gekennzeichnet

[1]●*Feller, W.:* An Introduction to Probability Theory and its Applications. New York: Wiley 1968.

[2]●*Stange, K.:* Angewandte Statistik. Berlin/Heidelberg: Springer 1970.

[3]●*Schlitt, H.:* Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen Regelkreisen. Braunschweig: Vieweg 1968.

[4]●*Bendat, I.S. u. A.G. Piersol:* Random Data: Analysis and Measurement Procedures. New York: Wiley 1971.

[5]●*Fabian, L.:* Zufallsschwingungen und ihre Behandlung. Berlin/Heidelberg: Springer 1973.

Auswertung von stochastischen Signalen

Teil II: Praktische Ermittlung eines Leistungsdichte-Spektrums mit analogen Elementen, gezeigt am Beispiel von Fahrbahnunebenheiten

Von R. Möller u. H.D. Wiemann,
Braunschweig-Völkenrode *)

DK 519.2:625.032

In vielen Bereichen der Technik zeigen physikalische Größen einen stochastischen Verlauf. Zu ihrer Charakterisierung verwendet man vielfach das Leistungsdichte-Spektrum (Power-Spektrum). Für die Ermittlung eines solchen Spektrums aus stochastischen Signalen bieten sich verschiedene Methoden an. Sie kann unter anderem mit Hilfe von analogen Elementen erfolgen. Dieses wird an Hand eines für die Landtechnik interessanten Beispieles, nämlich der Charakterisierung von Fahrbahnunebenheiten gezeigt.

1. Einleitung

Zur Charakterisierung stochastischer Signale benutzt man häufig Leistungsdichte-Spektren. Da sich mit einem solchen Leistungsdichte-Spektrum die häufig vorkommenden Gaußschen Verteilungen vollständig beschreiben lassen, bietet sich dieses statistische Maß für viele Gebiete an. In der Akustik z. B. dienen derartige Spektren zur Geräuschanalyse bzw. Synthese bei Vocodern und in der Optik zur Charakterisierung von Lichtquellen. In der Regelungstechnik lassen sich Leistungsdichte-Spektren zur Ermittlung des Frequenzganges eines Regelungssystems einsetzen, wenn sowohl das Spektrum der Störgröße sowie auch das der Regelgröße vorliegt [1]. Auch die Eigenschaften von Fahrbahnen kann man durch die spektrale Dichte der auftretenden Unebenheiten darstellen [2 bis 5]. Derartige Fahrbahnunebenheiten sind die Ursache von mechanischen Fahrzeugschwingungen, die Mensch und Fahrzeug beanspruchen.

Zur Ermittlung solcher Spektren werden sowohl digitale wie auch analoge Auswertemethoden eingesetzt. Die Wahl der Methode hängt von der vorhandenen oder zu beschaffenden Geräteausrüstung und vor allem von der Anzahl der zu ermittelnden Spektren ab. Ist diese Anzahl sehr groß, so empfiehlt sich die automatische Auswertung mit speziellen Geräten, die zumeist auf digitaler Basis arbeiten (stochastisch ergodische Meßgeräte). Ist die Anzahl der zu ermittelnden Spektren gering, dann können analoge Elemente eingesetzt werden, worüber hier berichtet wird. Die der Auswertung zugrundeliegende theoretische Begründung ist in Teil I dieser Veröffentlichung [6] gegeben.

2. Das Meßsignal

2.1 Seine Gewinnung

Für das genannte Beispiel beinhaltet dieser Schritt das Messen der Fahrbahnunebenheiten. Dazu wird der Verlauf der Unebenheiten, definiert als Abweichung von einer gedachten Mittellinie, entweder kontinuierlich aufgenommen [7], **Bild 1**, oder in Form von diskreten Einzelwerten abgetastet. Letzteres ist am einfachsten über ein geodätisches Verfahren möglich. So hat *Wendeborn* [8, 9] die Unebenheiten landwirtschaftlicher Fahrbahnen in Abständen von 15 cm ausgemessen und ausgewertet.

**) Ing. (grad.) Rudolf Möller ist Versuchsingenieur und Hans-Dieter Wiemann Techniker für Elektronik und Meßtechnik im Institut für landtechnische Grundlagenforschung (Direktor: Prof.Dr.-Ing. W. Batel) der Forschungsanstalt für Landwirtschaft, Braunschweig-Völkenrode.*