

DK 534:621-231

## Laufruhe der Getriebe als Schwingungsproblem

Von **Bekir Dizioğlu**, Braunschweig\*)

*Um die Leistung der Landmaschinen zu steigern, werden u. a. die Arbeitsgeschwindigkeit und die Getriebedrehzahlen erhöht. Dabei werden in den Getrieben u. U. periodisch auftretende Störkräfte ausgelöst, die die Laufruhe der Getriebe in erheblichem Maße beeinflussen können. Die Theorie der Stabilität von Bewegungen befaßt sich mit dem Einfluß von Störfaktoren auf die Bewegung eines Massensystems. Mit Hilfe dieser Theorie kann man feststellen, ob eine gegebene Bewegung stabil oder instabil ist, und damit den Begriff der Laufruhe eines Getriebes definieren. An mehreren Beispielen wird der Einfluß der Elastizität der Getriebeglieder auf die Laufruhe von Getrieben dargestellt.*

### 1 Einleitung

Es ist wohl kaum erforderlich, die große Bedeutung der Schwingungserscheinungen in der modernen Technik zu begründen; im gesamten Maschinenbau stehen Verminderung und Ausnutzung von Schwingungen im Vordergrund. Die allgemeine Forderung nach Leistungssteigerung führt im Maschinenbau in den meisten Fällen zu erhöhten Drehzahlen, die ihrerseits ein rapides Anwachsen der Massen- bzw. Trägheitskräfte zur Folge haben. Andererseits zwingt das Streben nach Vervollkommnung der bisherigen Konstruktionen durch zusätzliche Berücksichtigung frei verfügbarer Parameterwerte dazu, die mannigfaltigen Schwingungserscheinungen in Maschinen genauer zu untersuchen.

Alle Probleme des Maschinenbaues, bei denen Trägheitskräfte und deren mittelbare Folgen, z. B. Schwingungen, eine bedeutende Rolle spielen, werden als dynamisch bezeichnet. Im Rahmen dieser Probleme kommt einer genauen Definition des schwer erfaßbaren Begriffs „Laufruhe der Maschinen“ eine besondere Bedeutung zu.

Die Fortschritte in der theoretischen Behandlung der vielfältigen Schwingungserscheinungen, die in den letzten Jahren erzielt worden sind, ermöglichen es, eine sachgemäße Definition der Laufruhe anzugeben. Im Rahmen dieses Beitrages wird versucht, unter Beschränkung auf ein System mit einem Freiheitsgrad einen diesbezüglichen Überblick zu geben.

Bei der theoretischen Untersuchung irgendeines realen physikalischen Systems muß man im allgemeinen mehr oder weniger umfangreiche Vereinfachungen treffen, d. h., man muß die Eigenschaften des zu beschreibenden Systems idealisieren. Bei der Aufstellung eines mathematischen Modells ist die Idealisierung eines realen physikalischen Systems fast nie zu vermeiden. Man

muß sich also beim Aufstellen der jeweiligen Bewegungsgleichungen eines Systems auf die wesentlichen und entscheidenden Faktoren beschränken, die im gegebenen Fall das Verhalten dieses Systems gerade noch exakt festlegen. Man sollte keinesfalls danach streben, ausnahmslos alle Eigenschaften des Systems erfassen zu wollen. Auch wenn es gelingen würde, den bedeutendsten Teil dieser Eigenschaften in die Untersuchungen mit einzubeziehen, so würde doch das Problem dadurch so kompliziert werden, daß eine Lösung außerordentlich schwierig oder gar völlig unmöglich wäre.

Es entsteht danach vor allem die Frage, wie weit man bei der Idealisierung eines Systems gehen darf, um noch befriedigende Resultate zu erhalten. Eine Antwort auf diese Frage kann letzten Endes nur das Experiment geben. Der Umfang der vernachlässigbaren Parameter bzw. der Grad der zulässigen Idealisierung hängt nicht nur von den Eigenschaften des zu untersuchenden Systems, sondern auch davon ab, auf welche Fragen bei der Untersuchung eine Antwort gewünscht wird.

### 2 Stabilität einer Bewegung

Zahlreiche Probleme der Technik, unter anderem die meisten Probleme der schnellaufenden Maschinen, führen zur dynamischen Analyse solcher Systeme, deren Wirkungsweise durch gewöhnliche Bewegungsdifferentialgleichungen beschrieben wird. Studiert man irgendeinen Prozeß, der in einem solchen System unter gewissen Bedingungen verläuft, so kommt es nicht allein darauf an, die entsprechende partikuläre Lösung der Grundgleichungen exakt oder wenigstens näherungsweise aufzustellen. Es ist auch die Frage nach der Stabilität der Lösung von großer Bedeutung, da nur stabile Lösungen physikalisch realisierbaren Vorgängen entsprechen.

Die Theorie der Stabilität einer Bewegung befaßt sich mit dem Einfluß von Störfaktoren auf die Bewegung eines Massensystems. Unter störenden Faktoren versteht man Kräfte, die bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen nicht berücksichtigt sind. Entweder sind sie nicht bekannt, oder sie wurden absichtlich zur Erhaltung einfacher Bewegungsgleichungen von vornherein vernachlässigt. Im allgemeinen sind diese Störkräfte nicht bekannt. Sie können durch kleine Übersetzungsschwingungen, durch kleine Änderungen der Systemkonstante (Dämpfung, Elastizität u. dgl.) entstehen.

Die Einwirkungen kleiner Störfaktoren auf die Bewegung sind nicht immer die gleichen. Bei der einen Bewegung ist diese Einwirkung so minimal, daß sich die gestörte Bewegung von der ungestörten nur geringfügig unterscheidet. Bei einer anderen Bewegung macht sich der störende Einfluß ganz erheblich bemerkbar, so daß sich die gestörte Bewegung wesentlich von der ungestörten unterscheidet, wie klein auch immer die Störkräfte sein mögen. Eine Bewegung der ersten Art wird stabil, eine solche der zweiten Art instabil genannt.

\*) Vorgetragen auf einem vom Institut für landtechnische Grundlagenforschung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode am 21. 4. 1966 veranstalteten Getriebekolloquium.

Prof. Dr.-Ing. Bekir Dizioğlu ist Lehrstuhlinhaber und Direktor des Institutes für Getriebelehre und Maschinendynamik an der Technischen Hochschule Braunschweig.

Die Theorie der Stabilität einer Bewegung stellt Kriterien auf, mit deren Hilfe man feststellen kann, ob eine gegebene Bewegung stabil oder instabil ist. Weil in Wirklichkeit Störfaktoren unvermeidbar sind, ist es offenbar, daß das Problem der Stabilität einer Bewegung eine sehr große praktische und theoretische Bedeutung hat.

Zur Beurteilung der Laufruhe bzw. Laufunruhe hat man also zwei Punkte zu untersuchen:

1. ob die sich einstellende stationäre (periodische) Schwingung stabil ist, d. h., ob nicht die Tendenz besteht, daß bei kleinen Schwankungen der Systemgrößen oder Drehzahlschwankungen die Schwingungsamplituden unbeschränkt wachsen;
2. wenn diese Stabilität tatsächlich herrscht, so muß weiter untersucht werden, ob die maximalen Amplituden der sich einstellenden Dauerschwingung unter einem bestimmten zulässigen Wert bleiben.

Der zweite Punkt hat insofern eine Bedeutung, als diese Schwingungen nicht unmittelbar eine Konstruktion zu gefährden brauchen, aber bei dauernder Einwirkung zu Ermüdungsbrüchen führen können. Den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet eine eingehende Erläuterung des ersten Punktes.

Fast alle Probleme des Maschinenbaues, die man mathematisch durch lineare Differentialgleichungen zu formulieren pflegt, sind strenggenommen nichtlinear, d. h., sie müßten eigentlich durch nichtlineare Differentialgleichungen ausgedrückt werden. Man hat die Probleme lediglich deshalb linearisiert, um den mathematischen Schwierigkeiten, die solche Differentialgleichungen bereiten, aus dem Wege zu gehen, und um dafür die gut ausgebildete und übersichtliche Theorie der linearen Differentialgleichungen anwenden zu können.

Ein bekannter Satz von *Ljapunow* sagt folgendes aus: Wenn die nichtlinearen Glieder in den Bewegungsgleichungen des Systems dem Betrag nach innerhalb gewisser, mit den Störgrößen höchstens linear anwachsender Schranken bleiben, dann läßt sich die Stabilität oder Instabilität der Grundbewegung dieses nichtlinearen Systems aus der Untersuchung der linearisierten Bewegungsdifferentialgleichung feststellen.

Außerdem sagt der *Ljapunowsche* Satz aus: Falls die linearisierte Störbewegung asymptotisch stabil ist, dann bleibt die zu untersuchende Grundbewegung des nichtlinearen Systems bei beliebigen Anfangsstörungen stabil. Wenn allerdings die linearisierten Gleichungen rein periodische Lösungsanteile aufweisen, das linearisierte System also zwar stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist, dann können aus der Betrachtung der linearisierten Näherung keine Schlüsse auf das Verhalten des nichtlinearen Systems gezogen werden.

*Ljapunow* verdankt man auch die Lösung der Stabilitätsprobleme auf verschiedenen Wegen [1; 2; 3]. Zur Untersuchung des vorgenannten kritischen Grenzfalles, sowie auch zur Bestimmung der oben erwähnten Schranken, sei als wichtiges, exaktes Verfahren die direkte (oder 2.) Methode von *Ljapunow* genannt [3]. Wegen der Schwierigkeit dieser Methode wird man allerdings häufig auf Näherungsverfahren zurückgreifen müssen, wie sie speziell für nichtlineare Schwingungen entwickelt sind, z. B. Verfahren der harmonischen Balance und Verfahren, die auf *Ritz-Galerkin* zurückgehen [4]. Für unsere Betrachtungen ist die Feststellung, daß man sich bei der Stabilitätsuntersuchung einer Grundbewegung sowie bei vielen nichtlinearen Problemen mit Untersuchungen der linearisierten Bewegungsdifferentialgleichungen begnügen kann, außerordentlich wichtig. Nachstehend werden ausschließlich diese Probleme behandelt.

### 3 Der einfache lineare Schwinger

Die erzwungene Bewegung des einfachsten Schwingungsmodells von einem Freiheitsgrad ( $F = 1$ ) wird bekanntlich [5] durch eine gewöhnliche lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben:

$$m \ddot{q} + k \dot{q} + c q = f(t) \quad (1).$$

Hierin sind  $q$  die Lagekoordinate des Systems als Längenausschlag,  $m$  und  $c$  die auf die Koordinate  $q$  reduzierte Masse bzw. Federzahl und  $k$  die Dämpfungszahl. Ist  $q$  ein Winkelausschlag

(z. B. Torsionsausschlag einer Welle), so muß in der Differentialgleichung anstelle  $m$  das auf  $q$  reduzierte Massenträgheitsmoment und anstelle  $c$  die auf  $q$  reduzierte Drehfederzahl gesetzt werden.

Die zeitabhängige Erregerfunktion  $f(t)$  ist meistens in der Schwingungspraxis eine periodische Funktion der Zeit. Bei einer Periodendauer  $T$  gilt demnach  $f(t) = f(t + T)$ .

Die allgemeine Lösung von Gl. (1) setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, aus der allgemeinen Lösung  $q_h(t)$  der zugehörigen homogenen Gleichung [diese entspricht Gl. (1) mit verschwindender rechter Seite] und einer partikulären Lösung  $q_p(t)$  der inhomogenen Gleichung:

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist nichts anderes als die freie Schwingung des betrachteten Systems. Infolge der Dämpfung klingt sie im Laufe der Zeit ab und kann deshalb in vielen Fällen vernachlässigt werden. Man erhält in diesem Falle die sogenannte stationäre Lösung  $q_p(t)$ , d. h. die Schwingungsform, die sich einige Zeit nach Beginn der Bewegung einstellt. Man kann nun leicht zeigen, daß diese Bewegung stets beschränkt bleibt, d. h., die durch eine vorübergehende Störung hervorgerufene Abweichung von dieser Grundbewegung beschränkt bleibt und mit kleiner werdender Anfangsstörung gleichfalls kleiner wird. Dieses Verhalten kennzeichnet die Stabilität der Bewegung  $q(t)$ . In diesem Fall wird die Laufruhe des Systems im stationären Zustand durch die partikuläre Lösung, die eine periodische ist, eindeutig bestimmt. Man kann gegebenenfalls diese Systemgrößen ( $m$ ,  $k$ ,  $c$ ) so bestimmen, daß man außerhalb des Resonanzbereiches bleibt, oder zusätzlich noch die Amplituden der stationären Schwingungen unter einer vorgeschriebenen Größe unterdrückt. Damit ist über dieses Modell das Wesentliche gesagt.

### 4 Der rheolineare Schwinger

Geht man einen Schritt weiter und betrachtet ein Modell eines Schwingungssystems, dessen Bewegungsgleichung auf eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit zeitlich periodisch veränderlichen Koeffizienten zurückgeführt werden kann, so erhält man, und zwar in etwas vereinfachter Form,

$$\ddot{q} + k \dot{q} + u(t) q = f(t) \quad (2).$$

Diese Gleichung stellt die Bewegung eines Systems dar, dessen Federzahl  $u$  zeitlich periodisch schwankt. Für eine Periodenzeit  $T_u$  wird also  $u(t) = u(t + T_u)$ . Die Erregerfunktion sei wiederum eine periodische Funktion der Zeit.

Die Allgemeine Lösung von Gl. (2) hat die Form:

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t).$$

Die Gesamtlösung  $q(t)$  ist dann stabil (d. h., die Lösung dieser sogenannten *Hillschen* Differentialgleichung bleibt beschränkt), wenn sowohl die homogene Lösung  $q_h(t)$  als auch die Partikulärlösung  $q_p(t)$  beschränkt bleiben. Die Stabilitätstheorie solcher Gleichungen ist nun nicht so einfach wie die mit den konstanten Koeffizienten. Man behandelt zunächst die homogene Gleichung

$$\ddot{q} + k \dot{q} + u(t) q = 0$$

bzw. deren Lösung  $q_h(t)$ .

Durch die Transformation

$$q_h(t) = e^{-\frac{k}{2}t} y(t) \quad (3)$$

geht die Differentialgleichung über in die Normalform:

$$\ddot{y} + \left[ u(t) - \frac{k^2}{4} \right] y = 0 \quad (4).$$

Für die weitere Behandlung wird zur Übersichtlichkeit für  $u(t)$  die einfache Form

$$u(t) = \lambda_1 + \gamma \cos \nu t \quad (5)$$

( $\nu$  natürliche Zahl;  $\lambda_1$  und  $\gamma$  konstante Größen)

angenommen. Die Gl. (4) erhält dann die Form

$$\ddot{y} + \left( \lambda_1 - \frac{k^2}{4} + \gamma \cos \nu t \right) y = 0$$

bzw. 
$$\ddot{y} + (\lambda + \gamma \cos \nu t) y = 0 \quad (6),$$

wobei 
$$\lambda_1 - \frac{k^2}{4} = \lambda$$

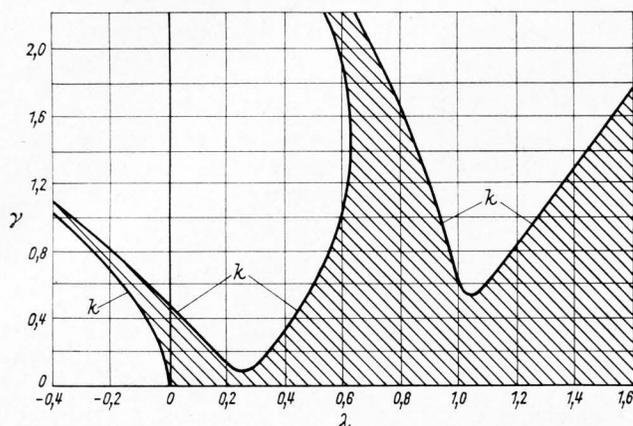
bedeutet.

Die Lösung  $q_h(t)$  nach Gl. (3) ist mit dem Abklingfaktor  $e^{-\frac{k}{2}t}$  behaftet. Dieser bewirkt, daß  $q_h(t)$  auf jeden Fall beschränkt bleibt, wenn  $y(t)$  beschränkt bleibt. Nun ist Gl. (6) eine sogenannte *Mathieusche* Differentialgleichung, deren Theorie sehr weitgehend entwickelt ist. Der Typ der allgemeinen Lösung von Gl. (4) hängt von den speziellen Werten der Konstanten  $\lambda$  und  $\gamma$  ab [1; 6; 7; 8].

Aufgrund eines Diagrammes, wobei  $\gamma$  über  $\lambda$  aufgetragen wird, erhält man in der  $(\lambda, \gamma)$ -Ebene Gebiete der stabilen und instabilen Lösungen. Man pflegt dieses Diagramm als *Strutt'sche* Stabilitätskarte zu bezeichnen. Für eine vorgegebene positive Dämpfung  $k$  sind die ersten beiden Gebiete dieser Karte in **Bild 1** dargestellt. Die schraffierten Gebiete entsprechen den beschränkten (stabilen) Lösungen von  $y$ . Wenn also der Punkt  $(\lambda, \gamma)$  im schraffierten Teil der Stabilitätskarte liegt, so wird gemäß der Gl. (3)

$$q_h(t) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

d. h.,  $q_h(t)$  ist asymptotisch stabil!



**Bild 1.** Stabilitätskarte für die Lösungen der *Mathieuschen* Differentialgleichung mit linearem Dämpfungsglied für eine beliebige Dämpfungszahl  $k > 0$ . Die Bereiche, in denen die Differentialgleichung stabile Lösungen hat, sind schraffiert.

Liegen dagegen die  $(\lambda, \gamma)$ -Werte in den weißen Gebieten der Karte, so werden die entsprechenden Schwingungsamplituden  $y(t)$  bzw.  $q_h(t)$  instabil, d. h., sie wachsen mit  $t \rightarrow \infty$  unbeschränkt an.

Man kann also feststellen, daß trotz der positiven Dämpfung für gewisse Werte  $(\lambda, \gamma)$  instabile Schwingungen entstehen können. Das ist ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem Verhalten der Schwingungen, die durch homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und Dämpfung beschrieben werden. Diese bleiben stets beschränkt.

Man erkennt, daß die allgemeine Lösung  $q(t)$  trotz des Dämpfungsfaktors in der Bewegungsgleichung für bestimmte Kombinationen der Parameterwerte instabil sein kann. Diese Instabilitätsbereiche werden also im wesentlichen durch die instabilen Lösungen der homogenen Gleichungen bestimmt. Wir bezeichnen die Bereiche, in denen die homogenen Lösungen instabil werden, als launfunruhige Bereiche des Systems. Die Amplituden dieser aufklingenden Schwingungen wachsen jedoch in Wirklichkeit mit der Zeit nicht, wie diese lineare Theorie voraussagt, ins Unendliche, sondern bleiben wegen der grundsätzlichen Nichtlinearität des Systems endlich.

Man bezeichnet die Schwingungen dieses Modells parametererregte Schwingungen bzw. rheolineare Schwingungen des Systems. Betrachtet man nämlich in Gl. (2) den homogenen Teil, so werden die Eigenschwingungen dieses Systems durch die zeitveränderlichen Werte der Systemparameter erregt. Sind diese Erregungen außerdem periodisch, so spricht man von einer Fremderregung.

In den bisher betrachteten beiden Modellen sind die periodischen stabilen Lösungen unabhängig von den Anfangsbedingungen des schwingenden Systems.

## 5 Der nichtlineare Schwinger

Schließlich soll die nichtlineare Differentialgleichung des Schwingers in der Form einer periodischen Erregung

$$\frac{d^2q}{dt^2} + F\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = f(t) \quad (7)$$

betrachtet werden.

Es wird angenommen, daß eine partikuläre Lösung  $q_0(t)$  dieses Systems bekannt sei, beispielsweise sei sie aus der Messung an einem solchen Schwinger ermittelt worden. Außerordentlich wichtig ist nun die Frage, ob diese partikuläre Lösung stabil bleibt.

Um die Stabilität dieser Schwingung beurteilen zu können, interessiert man sich nun für die Nachbarbewegungen, die nur wenig von der stationären Bewegung  $q_0(t)$  verschieden sind. Mit

$$q(t) = q_0(t) + \xi(t)$$

kann man entwickeln

$$F(q, \dot{q}) = F(q_0, \dot{q}_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)_0 \dot{\xi} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 \xi + \dots$$

Bei hinreichend klein angenommenen Störungen begnügt man sich mit den beiden angegebenen Gliedern der Taylor-Reihe und bekommt so nach Einsetzen in die Gl. (7)

$$\ddot{q}_0 + \ddot{\xi} + F(q_0, \dot{q}_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)_0 \dot{\xi} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 \xi - f(t) = 0.$$

Berücksichtigt man nun, daß  $q_0$  selbst eine Lösung der Gleichung ist, dann bleibt als Bestimmungsgleichung für die Störung:

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)_0 \dot{\xi} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 \xi = 0.$$

In nichtlinearen Systemen ist die Ableitung selbst noch von  $q$  und  $\dot{q}$  abhängig. Da nun  $q_0$  als periodische Funktion vorausgesetzt wurde, werden somit die Faktoren von  $\xi$  und  $\dot{\xi}$  in der letzten Gleichung periodische Funktionen der Zeit. Die Frage der Stabilität der periodischen Lösung  $q_0(t)$  ist demnach auf die Frage zurückgeführt, ob die Lösungen der linearen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten (*Hillsche* Differentialgleichung) beschränkt bleiben oder nicht [9; 10; 11].

## 6 Beispiele

Nachstehend werden anhand einiger wichtiger Getriebesysteme, die in jedem Zweig des Maschinenbaues zur mechanischen Übertragung von Leistungen dienen, die typischen Erscheinungen der parametererregten Schwingungen gezeigt [12]. Die Erregung kommt hierbei als Folge der Zeitabhängigkeit irgendwelcher Parameter des elastischen Systems zustande. Es interessiert dabei vor allem eine periodische Abhängigkeit von der Zeit. Leistungswandler ähnlicher Art lassen sich stets auf das gleiche Schwingungsmodell zurückführen.

### 6.1 Parametererregte Drehschwingungen eines einfachen Zahnradgetriebes

Bei schnellaufenden Zahnradgetrieben hat man einen zusätzlichen Einfluß des übertragenen konstanten Drehmomentes auf die dynamischen Zahnkräfte festgestellt. Dieser Einfluß läßt sich aus der zeitlichen Veränderlichkeit der Federzahl des schwingungsfähigen Systems ableiten [13; 14].

Das schwingungsfähige System bestehe aus den Drehmassen der beiden Zahnräder und elastischen Zähnen, die gerade im Eingriff sind, **Bild 2**. Durch das konstante Antriebs- bzw. Abtriebsmoment  $M_1$  und  $M_2$  sei eine Vorspannung der im Eingriff befindlichen Zähne erzeugt. Die Federzahl des Systems ist davon abhängig, wieviel Zähne gerade im Eingriff sind. Je nach Ausführung und gegenseitiger Stellung der Zahnräder können ein, zwei oder drei Zähne gleichzeitig im Eingriff sein. Sind z. B. zwei Zahnpaare im Eingriff, so liegt ein statisch unbestimmtes

System vor. Bei einer fehlerfreien Verzahnung, die hier vorausgesetzt wird, tragen aber beide Zahnpaare gleichmäßig, d. h. deren elastische Verformungen sind gleich groß. Man kann mit Hilfe der Rückstellkraft  $R$  des elastischen Systems die Federzahl des Systems bestimmen. Denkt man sich das Antriebsglied 1 festgehalten, so wird sich das Abtriebsglied 2 infolge der elastischen Verformung der im Eingriff befindlichen Zähne um den kleinen Winkel  $\Delta\psi$  drehen können. Die Länge der Zusammen-drückung  $x$  der Zahnflanken ist dann  $x = r_2 \Delta\psi$ .

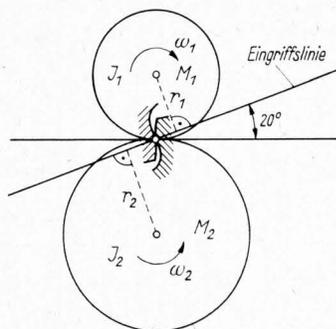


Bild 2. Zahnradpaar im Eingriff.

Nach Karas [15] ist  $R$  praktisch als linear abhängig von  $x$  anzunehmen. Man erhält also für eine Deformation  $x_0$ , die der vorgeschriebenen Vorspannung entspricht, zwei Rückstellkräfte  $R_{\min}$  und  $R_{\max}$ , je nachdem, ob ein oder zwei Zähne im Eingriff sind. Bei geradverzahnenden Stirnrädern mit genauen Flanken erfolgt diese Änderung von  $R_{\min}$  zu  $R_{\max}$  beim Eingriffwechsel sprunghaft, weil dann sofort die ganze Zahnbreite des neu hinzu-kommenden Zahnpaars trägt, Bild 3.

$R_{\min}$  entspricht aus der Beziehung  $R_{\min} = C_{\min} x_0$  die Federzahl  $C_{\min}$  und  $R_{\max}$  wegen der Beziehung  $R_{\max} = C_{\max} x_0$  die Federzahl  $C_{\max}$ . Wir wollen den Einfluß der kleinen Deformationsschwankungen um  $x_0$  auf  $C_{\min}$  und  $C_{\max}$  vernach-lässigen. In Bild 4 ist außerdem die Rückstellkraft als Funktion der Zeit dargestellt. Dieser zeitveränderlichen Rückstellkraft entspricht das Rückstellmoment  $M_R$  um die Drehachse des Antriebsrades:

$$M_R = R r^2 = -C r_2^2 \Delta\psi,$$

wobei  $C$  die zeitveränderliche Federzahl des Systems bedeutet und der Drehsinn des Abtriebsrades als positiv angenommen wurde. Bezeichnet man mit  $\psi^*$  den Drehwinkel des Abtriebsrades mit starren Zähnen und mit  $\omega_c = z_2 \omega_2$  die Eingriffsfrequenz, wobei  $z_2$  die Anzahl der Zähne des Abtriebsrades  $\omega_2 = \psi^*$  bedeutet, so kann der Drehwinkel  $\psi$  in der Form

$$\psi = \frac{\omega_c}{z_2} t + \Delta\psi \quad (8)$$

geschrieben werden. Für die Federzahl wird zuerst (wobei die Federzahl unabhängig von  $\Delta\psi$  sein soll)

$$C(\omega_c t) = C_0 + \frac{C_{\max} - C_{\min}}{2} c(\omega_c t) \quad (9)$$

geschrieben, mit

$$C_0 = \frac{C_{\max} + C_{\min}}{2} \quad \text{und} \quad c(\omega_c t) = \pm 1.$$

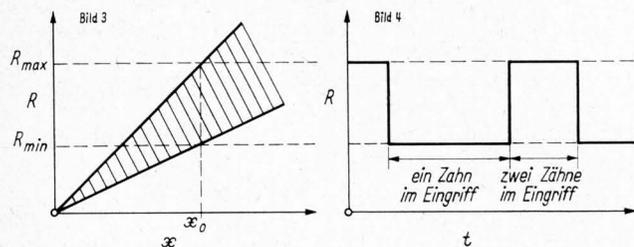


Bild 3. Rückstellkraft des Systems mit elastischen Zähnen nach Bild 2 in Abhängigkeit der Zusammen-drückung der Zahnflanken.

Bild 4. Rückstellkraft des Zahnradpaars in Abhängigkeit der Zeit.

Es wird angenommen, daß das auf die Antriebswelle reduzierte Massenträgheitsmoment  $J_1$  (= konst.) der Antriebsseite groß gegenüber dem reduzierten Massenträgheitsmoment  $J_2$  (= konst.) der Abtriebsseite ist, d. h., es wird  $\omega_1 = \text{konst.}$  angesetzt. Die Bewegungsgleichung ist

$$J_2 \ddot{\psi} + C(\omega_c t) r_2^2 \Delta\psi = M_2 \quad (10)$$

Wegen der Gl. (8) und der Beziehung  $x = r_2 \Delta\psi$  kann für die Deformation  $x$  geschrieben werden

$$\frac{J_2}{r_2^2} \ddot{x} + C(\omega_c t) x = \frac{M_2}{r_2} \quad (11)$$

Es werden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\tau = \omega_c t; \quad m_{\text{red}} = \frac{J_2}{r_2^2}; \quad \omega_e = \sqrt{\frac{C_{\text{mittel}}}{m_{\text{red}}}}$$

$$r = \frac{\omega_e}{\omega_c}; \quad \xi = \frac{C_{\max} - C_{\min}}{2 m_{\text{red}} \omega_e^2}$$

Hierbei ergibt sich  $C_{\text{mittel}}$  unter Berücksichtigung der Gl. (9) zu

$$C_{\text{mittel}} = C_0 + \frac{C_{\max} - C_{\min}}{2} a_0 \quad (12)$$

Dabei ist  $a_0$  der Mittelwert der Funktion  $c(\omega_c t)$  entsprechend Gl. (9).

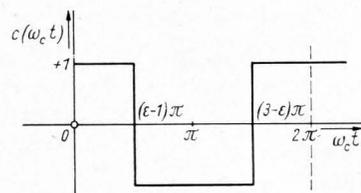


Bild 5. Idealisierte Federzahlschwankung in Abhängigkeit von  $\omega_c t = z_2 \omega_2 t$ .

$z_2$  ist die Anzahl der Zähne und  $\omega_2$  die Winkelgeschwindigkeit des Abtriebsrades und  $\epsilon$  der Überdeckungsgrad des Zahneingriffes.

Von Karas [15] wurde die Abhängigkeit der Federzahl vom Drehwinkel angegeben. Die rechteckige Federzahlschwankung ist in etwas idealisierter Form in Bild 5 dargestellt. Die Fourier-Reihe dieser Mäanderfunktion ist bekanntlich

$$c(\omega_c t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos n \omega_c t =$$

$$= 2\epsilon - 3 + \sum_1^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^n \sin n\pi(\epsilon - 2) \cdot \cos n \omega_c t.$$

Damit ist nach Gl. (9) und (12)

$$C(\omega_c t) = C_{\text{mittel}} + \frac{C_{\max} - C_{\min}}{2} \sum_1^{\infty} a_n \cos n \omega_c t \quad (13)$$

Aus Gl. (11) und den Abkürzungen folgt dann:

$$x'' + r^2 \left( 1 + \xi \sum_1^{\infty} a_n \cos n \tau \right) x = \frac{P r^2}{C_{\text{mittel}}} \quad (14)$$

wobei die Striche Ableitungen nach  $\tau$  und  $P = -M_2/r_2$  die Umfangskraft bedeuten.

Zuerst sei die homogene Gleichung betrachtet. Setzt man

$$r^2 \equiv \frac{C_{\text{mittel}}}{m_{\text{red}} \omega_e^2} = \lambda; \quad r^2 \xi \equiv \frac{C_{\max} - C_{\min}}{2 m_{\text{red}} \omega_e^2} = \gamma \quad (15)$$

dann gilt für die Belegfunktion in Gl. (14)

$$\Phi(\tau) = \lambda + \gamma \quad \text{für} \quad -(\epsilon - 1)\pi < \tau < (\epsilon - 1)\pi$$

$$\Phi(\tau) = \lambda - \gamma \quad \text{für} \quad (\epsilon - 1)\pi < \tau < (3 - \epsilon)\pi \quad (16)$$

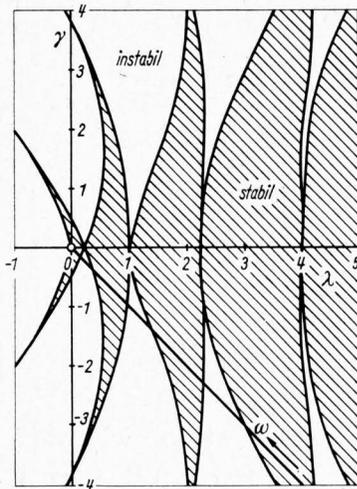
Sie schwankt zwischen zwei konstanten Werten hin und her. Die Differentialgleichung

$$x'' + (\lambda \pm \gamma) x = 0 \quad (17)$$

ist eine Meißnersche Differentialgleichung; deren Stabilitätskarte ist in Bild 6 wiedergegeben. Man kann nun das Stabilitätsver-



Man kann nun den Einfluß von  $\omega$  auf die Stabilität der Lösungen der Gl. (25) untersuchen. Die Parameter  $\bar{\lambda}$  und  $\bar{\gamma}$  ändern sich durch  $\omega$  entlang der in der unteren Halbebene der *Ince-Strutt-Karte* [5] gezeichneten Geraden, **Bild 8**. Die Steigung dieser Geraden ist  $\tan \alpha = -\bar{\gamma}/\bar{\lambda} = -1$ , d. h., der Steigungswinkel  $\alpha$  beträgt  $-45^\circ$ .

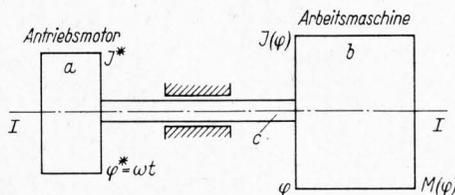


**Bild 8.** *Ince-Struttsche* Stabilitätskarte der *Mathieschen* Differentialgleichung. Schraffierte Bereiche entsprechen stabilen Lösungen.

Dem unendlich fernen Punkt der Geraden  $g$  entspricht die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 0$  und dem Nullpunkt der *Struttschen Karte*  $\omega \rightarrow \infty$ . Wegen der immer vorhandenen Dämpfung haben die Instabilitätsgebiete höherer Ordnung (also kleine Werte von  $\omega$ ) keine praktische Bedeutung. Betrachtet man diese Kurvenschwinge als ein Ausgleichsgetriebe, so leistet die *Struttsche Karte* für die dynamische Synthese solcher Getriebe wertvolle Dienste. Man kann die Betriebsgrößen  $\bar{\lambda}$  und  $\bar{\gamma}$  gegebenenfalls so annehmen bzw. so lange ändern, bis man im Stabilitätsbereich liegt. Dann werden die angeregten freien Schwingungen des Systems wegen der stets gegenwärtigen Dämpfung mit  $t \rightarrow \infty$  verschwinden.

### 6.3 Starres Getriebesystem mit Torsionsschwingungen im Antrieb

Außerordentliche Bedeutung besitzen die Schwingungen im Antrieb von raschlaufenden Maschinen in denen ungleichförmig übersetzende Getriebe für die Bewegungsübertragung verwendet werden. Das einfachste Schwingungsmodell von einem Freiheitsgrad für diese Fälle ist in **Bild 9** schematisch dargestellt.



**Bild 9.** Schwingungsmodell für Torsionsschwingungen im Antrieb.

Das Modell besteht aus einem Antriebsmotor  $a$ , der dreielastisch vorausgesetzten Welle (I—I) mit der Federzahl  $c$  sowie einer Maschine (Arbeitsmaschine)  $b$ . Die Arbeitsmaschine  $b$  möge sowohl gleichförmig als auch periodisch übersetzende Getriebe enthalten. Alle Getriebeglieder der Arbeitsmaschine werden als starr angenommen. Das Kraftfeld der Maschine (Nutzkräfte, Reibungskräfte, Federkräfte usw.) sei bekannt. Die Antriebswinkelgeschwindigkeit  $\omega$  wird als konstant vorausgesetzt. Es sind  $\varphi^* = \omega t$  und  $\varphi$  der Drehwinkel der elastischen Welle (I—I) auf der Antriebs- bzw. Maschinenseite.  $J(\varphi)$  ist das auf die Welle (I—I) reduzierte Massenträgheitsmoment der Arbeitsmaschine. Das auf die gleiche Welle reduzierte Massenträgheitsmoment  $J^*$  der Antriebsseite wird von  $\varphi^*$  unabhängig vorausgesetzt.

Die potentielle Energie  $V$  und die kinetische Energie  $E$  dieses Systems sind

$$V = \frac{1}{2} c (\varphi^* - \varphi)^2$$

$$E = \frac{1}{2} J^* \omega^2 + \frac{1}{2} J(\varphi) \dot{\varphi}^2.$$

Mit diesen Ausdrücken erhält man mittels der Lagrangeschen Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = - \frac{\partial V}{\partial \varphi} + M$$

die folgende Bewegungsgleichung für  $\varphi$  des betrachteten Modells:

$$J(\varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{dJ}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 + c(\varphi - \varphi^*) = M.$$

Eine begründete Linearisierung dieser nichtlinearen Differentialgleichung ist seit längerer Zeit bekannt. Man schreibt zuerst  $\varphi$  in der Form  $\varphi = \varphi^* + \psi$ , wobei  $\psi \ll \varphi^*$  vorausgesetzt wird, und erhält für  $\psi$  unter Vernachlässigung des Einflusses von  $\psi$  auf  $J(\varphi)$  und  $M(\varphi)$  die folgende lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten:

$$J(\omega t) \ddot{\psi} + c \psi = M(\omega t) - \frac{1}{2} \frac{dJ(\omega t)}{d(\omega t)} \omega^2.$$

Aus der Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\ddot{\psi} + \frac{c}{J(\omega t)} \psi = 0 \quad (27)$$

wird das Verhalten der freien Schwingungen des Systems der Stabilität (Laufruhe) und Instabilität (Laufunruhe) beurteilt. Für  $\varphi^* = \omega t$  nimmt die Gl. (27) die folgende Gestalt an:

$$\frac{d^2 \psi}{d\varphi^{*2}} + \frac{c}{\omega^2} u(\varphi^*) \psi = 0 \quad (28).$$

Hierin ist

$$u(\varphi^*) = \frac{1}{J(\varphi^*)}$$

eine periodische Funktion (z. B. kann sie eine  $2\pi$ - oder  $4\pi$ -periodische Funktion sein).

Eine praktische wichtige Aufgabe besteht nun darin, den Wertebereich von  $\omega$  in Gl. (28) festzustellen, für die die freien Schwingungen die Tendenz zeigen, mit  $t \rightarrow \infty$  unbeschränkt zu wachsen. Diese sogenannten „parametrischen Resonanzbereiche“ sind die Gebiete der Laufunruhe des Systems.

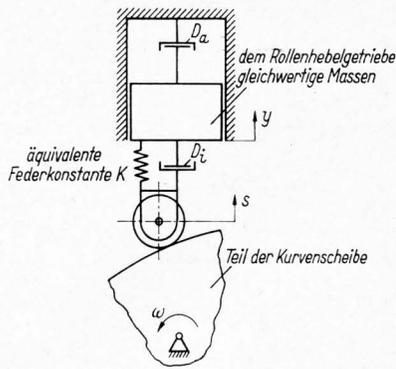
Durch das Modell in Bild 9 lassen sich z. B. die folgenden Antriebssysteme auf das Verhalten hinsichtlich der Laufruhe bzw. Laufunruhe untersuchen.

Bei schnelllaufenden Kurvengetrieben spielt die Schwingungscharakteristik des Systems eine bedeutende Rolle. Die Kräfte weichen hierbei erheblich von jenen ab, die aus dem System mit starren Gliedern abgeleitet werden; insbesondere zu Beginn der Bewegung, wenn nach Durchlaufen des sogenannten Spieles ein stoßartiger Anhub einsetzt, ist die Abweichung sehr erheblich [19]. Diese zusätzlichen dynamischen Kräfte beeinflussen weitgehend die Kraftschlüssigkeit zwischen der Kurvenscheibe und dem Abtriebsglied.

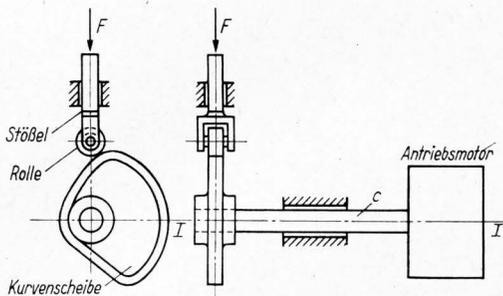
Je nach der Konstruktion der Kurvengetriebe und den Antriebsverhältnissen lassen sich bei der Untersuchung des Schwingungsverhaltens des Systems etwa zwei Fälle unterscheiden:

1. Die Kurvenscheibe und die Antriebsseite werden starr, aber die Abtriebsseite elastisch angenommen. Für diesen Fall (z. B. Kurvengetriebe mit Hebelübersetzung) ist das Schwingungsmodell in **Bild 10** dargestellt. Hierbei wurde das Abtriebsglied als eine statische Feder betrachtet. Wenn man die Antriebswinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = \omega$  als bekannt voraussetzt, so hat das System einen Freiheitsgrad. Man erhält eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten als Bewegungsgleichung.
2. Im Gegensatz zu Punkt 1 wird nur die Antriebswelle der Kurvenscheibe elastisch angenommen, und die anderen Teile des Systems werden starr vorausgesetzt, **Bild 11**. Man spricht hier vom sogenannten elastischen „Aufziehen“ der Kurvenscheibe. Bei Kurvengetrieben mit kleinem Übertragungswinkel zeigt sich diese Eigenschaft als besonders unangenehm. Die durch

dieses „Aufziehen“ entstehende Ungleichförmigkeit der Abtriebsbewegung kann unter Umständen den Arbeitsverlauf stören. Nach Linearisierung ergibt sich in diesem Falle eine *Hillsche* Differentialgleichung als Bewegungsgleichung des Systems.



**Bild 10.** Schwingungsmodell eines Kurvengetriebes von einem Freiheitsgrad. Die Wegfunktion  $s(t)$  ist vorgeschrieben.



**Bild 11.** Kurvengetriebe mit drehelastischer Antriebswelle.

Als nächstes Beispiel seien die Schwingungen erwähnt, die bei der Übertragung des Drehmomentes mittels eines Kardangelenkes (Kreuzgelenkes) entstehen. Bekanntlich ergibt sich bei Verwendung nur eines Kardangelenkes in der abgewinkelten Abtriebswelle eine periodisch schwankende Winkelgeschwindigkeit und damit ein ebenfalls veränderliches Drehmoment. Dadurch entsteht jedoch die Gefahr der Anregung von Drehschwingungen. Die erzwungenen parametererregten Schwingungen einer Kardanwelle von je einer Drehmasse auf der Antriebs- und Abtriebsseite wurden bereits näher untersucht [20]. In diesem Zusammenhang sei auch auf eine andere Untersuchung hingewiesen [21].

Die Bewegungen einer großen Gruppe der Kurbelausgleichsgetriebe lassen sich durch die *Hillsche* Differentialgleichung beschreiben. Hierbei ist das Stabilitätsverhalten dieser Getriebe für ihre praktische Brauchbarkeit von Bedeutung [12; 22; 23].

Für weitere Beispiele aus der Getriebetechnik hinsichtlich der parametererregten Schwingungen sei auf das Schrifttum [24; 25; 26] verwiesen.

## 7 Zusammenfassung

Die in der Praxis bei höheren Drehzahlen beobachteten Schwingungserscheinungen lassen sich oft weder qualitativ noch quantitativ aufgrund eines bisher üblichen einfachen linearen Schwingungsmodells erklären.

Durch ein Schwingungsmodell, dem eine Bewegungsdifferentialgleichung mit periodischen zeitveränderlichen Koeffizienten zugrunde liegt, gelingt es nun, einige typische Schwingungseigenschaften des Schnellaufes zu beschreiben. Es gelingt weiterhin mit Hilfe dieses Modells aus der gut ausgebildeten Theorie der Stabilität die Frequenzbereiche aufklingender freier Schwingungen des Systems zu bestimmen. Diese sogenannten launruhigen Drehzahlbereiche lassen sich durch gegenseitiges Abstimmen der Systemgrößen außerhalb des Betriebsdrehzahlbereiches verschieben.

In der vorliegenden Arbeit wurde auf die Betrachtung von Systemen mit einem Freiheitsgrad beschränkt. Damit blieb eine wesentliche Eigenschaft der mehr als einen Freiheitsgrad besitzenden Schwingungsmodelle unberücksichtigt. Hierbei ergeben sich nämlich für die freien Schwingungen Instabilitäts-

bereiche erster und zweiter Art, von denen die zweite Art nur den parametererregten Schwingungssystemen mit mehr als einem Freiheitsgrad eigentümlich sind und daher bei der Untersuchung des angenommenen Schwingungsmodells dieser Arbeit nicht gefunden werden können. Diesbezüglich sei auf das Schrifttum, insbesondere auf das Buch von *Malkin* [1] verwiesen.

## Schrifttum

- [1] *Malkin, J. G.*: Theorie der Stabilität einer Bewegung. München: Oldenbourg 1959.
- [2] *Hahn, W.*: Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunow. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1959.
- [3] *La Salle, J., und S. Lefschetz*: Stability by Ljapunows direct method. New York 1961.
- [4] *Magnus, K.*: Über den Zusammenhang verschiedener Näherungsverfahren zur Berechnung nichtlinearer Schwingungen. Z. angew. Math. Mech. **37** (1957) S. 471 ff.
- [5] *Klotter, K.*: Technische Schwingungslehre. Bd. 1. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1951.
- [6] *Strutt, M. J. O.*: Lamésche, Mathiesche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Berlin: Springer-Verlag 1932.
- [7] *Meixner, J. und F. W. Schaefer*: Mathiesche Funktionen und Sphaeroidfunktionen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1954.
- [8] *Magnus, W., und S. Winkler*: Hill's equation. New York 1966.
- [9] *Kauderer, H.*: Nichtlineare Mechanik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1958.
- [10] *Hayashi, Ch.*: Nonlinear oscillations in physical systems. New York 1964.
- [11] *Magnus, K.*: Schwingungen. Eine Einführung in die theoretischen Behandlungen von Schwingungsproblemen. Stuttgart: Teubner-Verlag 1961.
- [12] *Dizioglu, B.*: Getriebelehre. Bd. 3, Dynamik. Braunschweig: Vieweg-Verlag 1966.
- [13] *Zeman, J.*: Dynamische Zusatzkräfte in Zahnradgetrieben. VDI-Z. **99** (1957) Nr. 6, S. 244/54.
- [14] *Böhm, F.*: Drehschwingungen von Zahnradgetrieben. Österr. Ing.-Arch. **13** (1959) S. 82 ff.
- [15] *Karas, F.*: Elastische Formänderung und Lastverteilung beim Doppelengriff gerader Stirnräder. VDI-Forsch.-H. 406. Berlin 1941.
- [16] *Molerus, O.*: Laufunruhige Drehzahlbereiche mehrstufiger Stirnradgetriebe. Diss. TH Karlsruhe 1963.
- [17] *Dizioglu, B.*: Neue Ergebnisse über Koppelkurven und über Getriebe mit elastischen Gliedern. Getriebekolloquium Bad Kissingen 1961.
- [18] *Klotter-Kotowski*: Über die Stabilität der Lösungen Hillscher Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Parametern. Z. angew. Math. Mech. **23** (1943) S. 149 ff.
- [19] *Pischinger, A.*: Druckschwingungen rasch beanspruchter zylindrischer Stäbe. Ing.-Arch. **6** (1935) S. 383 ff.
- [20] *Weidenhammer, F.*: Drehschwingungen in Kreuzgelenken. Ing.-Arch. **23** (1955) S. 189/97.
- [21] *Wehrli, Ch.*: Dynamisches Verhalten einer einfach besetzten rotierenden Welle mit Kardangelenken. Z. angew. Math. Phys. **15** (1964) S. 154 ff.
- [22] *Dizioglu, B.*: Dynamische Getriebesynthese der Kurbelausgleichsgetriebe. Forsch. Ing.-Wes. **26** (1960) Nr. 2, S. 37/47.
- [23] *Dizioglu, B.*: Methoden zur Analyse und Synthese der Kurbelausgleichsgetriebe. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. **12** (1960) S. 213 ff.
- [24] *Holzweissig, F., H. Dresig und H. Tersch*: Über die Berechnung des dynamischen Verhaltens von ungleichförmig über-setzenden Getrieben innerhalb einer Schwingungskette. Maschinenbautechnik **12** (1963) H. 10, S. 553/59.
- [25] *Tersch, H.*: Schwingungen in Mechanismen. Maschinenbautechnik **14** (1965) H. 11, S. 601/06.
- [26] *Meyer zur Capellen, W., und H. Houben*: Torsionsschwingungen in An- und Abtrieb von Viergelenkgetrieben. Forsch. ber. Land Nordrhein-Westfalen Nr. 1429. Köln und Opladen: Westdt.-Verl. 1965.