

Gleichungen für Widerstandsbeiwerte zur Berechnung der Strömungswiderstände von Kugeln und Schütttschichten

Von **Christian von Zabeltitz**, Braunschweig-Völkenrode

Bei der theoretischen Behandlung der Umströmung von Einzelkörpern und der Durchströmung von körnigen Haufwerken gehen Widerstandsbeiwerte in die Rechnung ein. Mit Hilfe eines Analogrechners lassen sich aus den experimentell ermittelten Funktionen verschiedener Widerstandsbeiwerte empirische Näherungsgleichungen berechnen. Diese Gleichungen haben einen großen Gültigkeitsbereich und sind in Verbindung mit Bewegungsgleichungen geschlossen integrierbar. Für die Widerstandsbeiwerte von Einzelkugeln sowie für Kugeln, die sich im Kugelschwarm gegenseitig beeinflussen, werden Näherungsgleichungen angegeben, die den gestellten Anforderungen genügen. Weiterhin werden Gleichungen für Widerstandsbeiwerte ermittelt, die in Druckverlustgleichungen von Schüttgutschichten auftreten. Trotz der unterschiedlichen Form der Druckverlustgleichungen verschiedener Autoren ist es möglich, die Gleichungen bei entsprechender Umrechnung für Kugelschüttungen im untersuchten Bereich in Übereinstimmung zu bringen.

Die theoretische Behandlung der Bewegung von Feststoffteilchen in flüssigen oder gasförmigen Strömungsmedien sowie die Berechnung von Fest- und Fließbettproblemen setzt die Kenntnis der Funktionen der Widerstandsbeiwerte voraus. Diese Funktionen werden im allgemeinen experimentell ermittelt und in Kurvenform dargestellt. Analytisch hergeleitete Funktionen sind mit Ausnahme des *Stokesschen* Gesetzes für den Widerstandsbeiwert von Kugeln im laminaren Strömungsbereich bisher nicht zugänglich. Bei der theoretischen Behandlung von Problemen, in denen Widerstandsbeiwerte auftreten, können Lösungen dann angegeben werden, wenn für die Widerstandsfunktionen empirische Gleichungen hoher Genauigkeit vorhanden sind. Bei der Analogrechenstechnik ist es möglich, mit Hilfe von Funktionsgebern experimentell ermittelte Kurven direkt in die Rechnung einzuführen, wobei die Lösung dann wieder in Kurvenform vorliegt. In vielen Fällen ist aber die geschlossene analytische Darstellung des Problems erwünscht und die Lösung von Näherungsfunktionen vorteilhafter.

Die Kenntnis der Funktionen der Widerstandsbeiwerte ist wichtig für die Behandlung von Abscheideverfahren, wie Sichtprobleme, Schwerflüssigkeitstrennung und Aufstromklassierung. Ebenso gehen Widerstandsbeiwerte in die Berechnung von Problemen der pneumatischen Förderung sowie bei der Durchströmung von Fest- und Fließbetten (Trocknung und Belüftung) ein. Bei theoretischen Ansätzen wird in vielen Fällen von der Kugelform der Feststoffteilchen ausgegangen. Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, Gleichungen zur theoretischen Ermittlung von Widerstandsbeiwerten für Einzelkugeln, für Kugeln im Kugelschwarm und für Kugelhafwerke anzugeben. Nach *Matthies* [1] lassen sich dann die Widerstandsbeiwerte landwirtschaftlicher Erntegüter durch Multiplikation des Widerstandsbeiwertes von Kugelhafwerken mit einem konstanten Faktor berechnen.

Die Koeffizienten der im folgenden wiedergegebenen Gleichungen wurden durch Näherung und Vergleich auf einem Analogrechner (EAI/TR 48) ermittelt. Die experimentell ermittelten und in Kurvenform vorliegenden Funktionen wurden dazu auf einem Funktionsgeber des Rechners eingestellt und mit den im Rechner programmierten und berechneten formelmäßigen Funktionen auf dem Sichtschirm und dem XY-Schreiber verglichen. Dabei wurden die Koeffizientenpotentiometer am Rechner so lange variiert, bis die Kurven im erwünschten Bereich eine optimale Approximation erreichten.

Dr.-Ing. Christian von Zabeltitz VDI ist wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für landtechnische Grundlagenforschung (Direktor Prof. Dr.-Ing. Wilhelm Batel) der Forschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode.

Widerstandsbeiwerte von Einzelkugeln

In einem Strömungsfeld wirken auf ein bewegtes Feststoffteilchen als äußere Kräfte die Schwerkraft \mathfrak{G} , Auftriebskraft \mathfrak{Q} sowie die Reibungs- und Widerstandskraft \mathfrak{W} . In vektorieller Schreibweise lautet die Bewegungsgleichung dann

$$m_F \frac{dv_F}{dt} = \mathfrak{G} + \mathfrak{Q} + \mathfrak{W} \quad (1);$$

darin ist

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{Q} = m_F \frac{q_F - q_S}{q_F} g \quad (2).$$

Die Widerstandskraft berechnet sich nach der Beziehung

$$\mathfrak{W} = c_F F_S \frac{q_S}{2} |v_r| v_r \quad (3),$$

wobei F_S die Projektionsfläche des Teilchens in Richtung der Anströmung, q_S die Dichte des Strömungsmediums und v_r die Relativgeschwindigkeit zwischen Strömungsmedium und Feststoffteilchen bedeuten. Der Widerstandsbeiwert c_F berücksichtigt die Abhängigkeit der Widerstandskraft von weiteren Einflußgrößen, die analytisch nicht erfaßbar sind [2]. Er ist abhängig von der Reynoldszahl

$$Re = \frac{v_r d_F q_S}{\eta_S} \quad (4)$$

und ist in der Form $c = f(Re)$ für aerodynamisch glatte Einzelkugeln eine experimentell ermittelte Funktion [2], die in Bild 1, 3 und 5 des vorliegenden Aufsatzes als stärker ausgezogene Kurve dargestellt ist. Nach *Fehling* [3] gelten für die Meßwertkurve $c = f(Re)$ die in **Tafel 1** angegebenen Toleranzen.

Tafel 1. Toleranzen für die gemessene Funktion $c = f(Re)$ [3].

Re	Toleranzen %
1 — 7	1,0
10 — 70	2,5
100 — 700	4,0
1000 — 7000	7 — 10

Aufgabe der weiteren Ausführungen ist es, für diese und noch weitere anzugebende Widerstandsfunktionen Gleichungen zu ermitteln, die so aufgebaut sind, daß die Bewegungsgleichung (1) nach Einführung der Ausdrücke für c noch geschlossen integrierbar ist. Diese Forderung wird von vielen der bisher bekannten Gleichungen der Funktion $c = f(Re)$ nicht erfüllt. Für die Einzelkugel gilt im laminaren Bereich ($Re < 0,1$) das *Stokessche* Gesetz

$$c = \frac{24}{Re} \quad (5).$$

Diese Gleichung ist für den Widerstandsbeiwert der Einzelkugel als einzige analytisch durch Annahme bestimmter Voraussetzungen aus den *Navier-Stokesschen* Differentialgleichungen abzuleiten [2; 4]. Nach *Oseen* [4] gilt das erweiterte *Stokessche* Gesetz mit befriedigender Genauigkeit bis zu einer Reynoldszahl von $Re = 1,5$. Für den Übergangsbereich $0,1 < Re < 3 \cdot 10^3$ sind für verschiedene Gültigkeitsbereiche zahlreiche Ansätze gemacht worden:

nach *Oseen* [4] gilt bis $Re = 1,5$

$$c = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) = \frac{24}{Re} + 4,5 \quad (6);$$

nach Schiller und Naumann [5] ist im Bereich $1 < Re \leq 1000$

$$c = \frac{24}{Re} + \frac{3,6}{Re^{0,313}} \quad (7),$$

nach Schytil [6] für $2 \leq Re \leq 500$

$$c = \frac{18,5}{Re^{0,6}} \quad (8),$$

nach Rumpf und Mitarbeitern [7] für $1 < Re < 2 \cdot 10^2$

$$c = \frac{24}{Re} + \frac{2,8}{\sqrt[4]{Re}} \quad (9),$$

nach Klyachko [7] für $1 < Re < 1000$

$$c = \frac{24}{Re} + \frac{4,0}{\sqrt[3]{Re}} \quad (10).$$

Bild 1 zeigt einen Vergleich zwischen der wahren experimentell ermittelten Funktion $c = f(Re)$ und den Funktionen nach Gl. (6) bis (9). Die Gl. (6) nach Oseen kann bis zu einer Reynoldszahl von 1,5 als gültig angenommen werden. Gl. (8) ist im logarithmischen Netz eine Gerade und stellt nur eine sehr grobe Näherung dar. Gl. (7) gibt bis $Re = 10^3$ gute Näherungswerte für die gemessene Funktion $c = f(Re)$, während Gl. (9) nur bis $Re = 10^2$ als Näherung gilt. Die Funktion nach Gl. (10), die nicht eingezeichnet ist, hat einen ähnlichen Verlauf wie die nach Gl. (7).

Zur besseren Beurteilung der Approximation an die Funktion $c = f(Re)$ ist der relative Fehler F der einzelnen Gleichungen in bezug auf die experimentell ermittelte Funktion berechnet und in **Bild 2** in Abhängigkeit von Re aufgetragen. Daraus wird ersichtlich, daß Gl. (10) im Bereich $1 < Re < 850$ die beste Näherung mit einem maximalen Fehler von 5% bei $Re = 850$ darstellt. Gl. (7) hat im Bereich $1 < Re < 1000$ einen maximalen Fehler von 6% bei $Re = 7$. Im Vergleich dazu liefern Gl. (8) und (9) wesentlich schlechtere Näherungswerte und sollten für

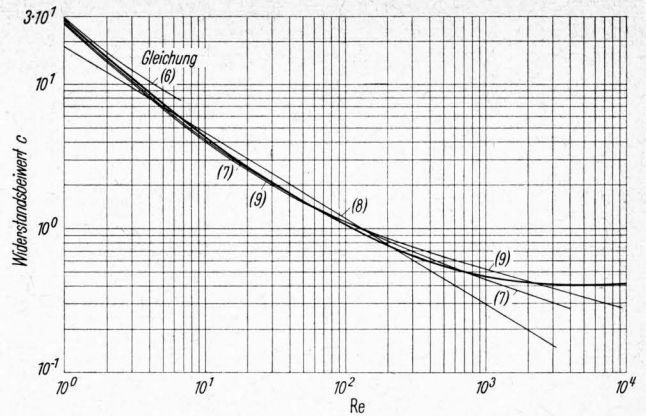


Bild 1. Vergleich der experimentellen Funktion des Widerstandsbeiwertes für Einzelkugeln mit den Näherungsgleichungen (6) bis (9).

eine Rechnung nicht angewendet werden, zumal ihr Aufbau nicht einfacher ist als der von Gl. (7) und (10). Für den Bereich $Re > 10^3$ sind die Gln. (7) bis (10) wegen des stark zunehmenden Fehlers nicht geeignet.

Mit Ausnahmen der Gleichung von Oseen erfüllen Gl. (6) bis (10) nicht die obengenannte Voraussetzung der geschlossenen Integrierbarkeit der Bewegungsgleichung (1). Außerdem gelten sie als Näherung nur bis $Re = 10^3$. Daher wurde versucht, durch die beschriebene Optimierung auf dem Analogrechner für die Oseensche Gleichungsform

$$c = \frac{m}{Re} + n \quad (11)$$

geeignete Koeffizienten m und n zu finden, so daß diese Gleichung auch im Übergangsbereich $1 < Re < 4 \cdot 10^3$ gültig ist.

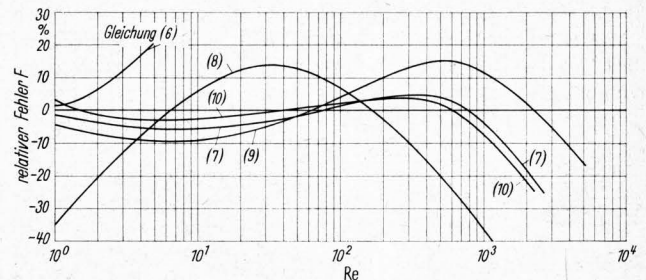


Bild 2. Der relative Fehler F der Näherungsgleichungen (6) bis (10) in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl.

Es ergab sich, daß diese sehr einfache Gleichungsform mit verschiedenen Koeffizienten der experimentellen Funktion $c = f(Re)$ nur in begrenzten Re -Zahl-Bereichen mit befriedigender Genauigkeit angenähert werden konnte. Die Gleichungen mit den bei optimaler Näherung zwischen gemessener und gerechneter Funktion ermittelten Koeffizienten lauten für die verschiedenen Bereiche:

$$c = \frac{34}{Re} + 0,9 \text{ für } 3 \leq Re \leq 80 \quad (12),$$

$$c = \frac{42}{Re} + 0,65 \text{ für } 10 \leq Re \leq 200 \quad (13),$$

$$c = \frac{75}{Re} + 0,4 \text{ für } 80 \leq Re \leq 10^4 \quad (14),$$

$$c = \frac{67,76}{Re} + 0,406 \text{ für } 60 \leq Re \leq 10^4 \quad (15).$$

In **Bild 3** ist der Verlauf dieser Funktionen im Vergleich zur gemessenen Funktion $c = f(Re)$ und in **Bild 4** wiederum der relative Fehler F in Abhängigkeit von der Reynoldszahl aufgetragen. Mit Gl. (12) und (14) läßt sich das Übergangsbereich $3 < Re < 10^4$ gut beschreiben. Nur an den Anschlußstellen bei $Re = 3$ und $Re = 80$ treten Fehler von etwa 10% auf. Gl. (14) und (15) haben im Bereich $90 < Re < 10^4$ nur Fehler von maximal $\pm 5\%$. Aus dem Verlauf der Kurven in **Bild 3** ist zu ersehen, daß der aus Gl. (12) bis (15) berechnete Verlauf der

Verwendete Formelzeichen

a'	Kugelabstand
Q	Auftriebskraft
c	Widerstandsbeiwert von Kugeln
c_F	Widerstandsbeiwert von Feststoffkörpern
c'	Widerstandsbeiwert von Kugeln im Kugelschwarm
d_F	Korngröße der Feststoffteilchen
d_K	Kugeldurchmesser
F_S	Projektionsfläche der Einzelteilchen in Strömungsrichtung
F	relativer Fehler
G, G	Gewicht
g, g	Schwerebeschleunigung
H	Höhe der Schütttschicht
K, K'	Konstanten
k_W	Konstante
k	Stoffkonstante
m_F	Masse der Feststoffteilchen
m, n	Konstanten
O_F	Oberfläche des Feststoffes
O'	spezifische Oberfläche des Feststoffes
Δp	Druckverlust in Schütttschichten
Re	Reynoldszahl
q	Konstante
t	Zeit
V_F	Volumen des Feststoffes
v_F, v_F'	Geschwindigkeit der Feststoffteilchen
v_K	Kugelgeschwindigkeit
v_r	Relativgeschwindigkeit zwischen Feststoffteilchen und Strömungsmedium
v_L	Lockerungsgeschwindigkeit
v_S	Geschwindigkeit des Strömungsmediums in Schütttschichten, bezogen auf den schüttgutfreien Querschnitt
W, W	Widerstandskraft
W'	Widerstandskraft einer Kugel im Kugelschwarm
z'	Zahl der Störkugeln im Kugelschwarm
$\delta = a'/d_K$	Abstandsverhältnis
ε	spezifisches Hohlraumvolumen
ζ	Widerstandsbeiwert von Schütttschichten
ζ_{KS}	Widerstandsbeiwert von Kugelschüttungen
η_S	Zähigkeit des Strömungsmediums
ρ_F	Dichte des Feststoffes
ρ_S	Dichte des Strömungsmediums
Φ, ψ	Widerstandsbeiwerte von Schütttschichten

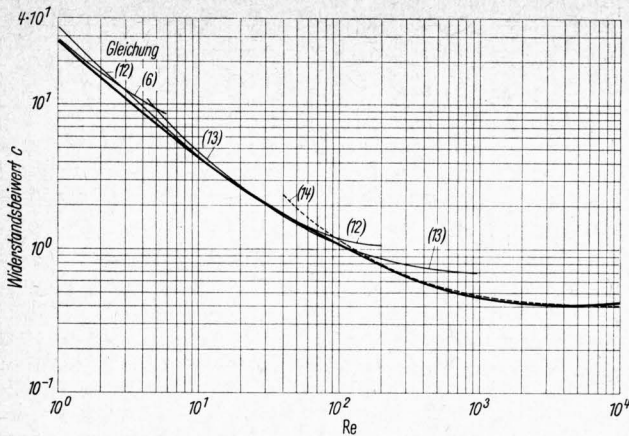


Bild 3. Vergleich der experimentellen Funktion des Widerstandsbeiwertes für Einzelkugeln mit den durch Approximation auf dem Analogrechner ermittelten Gln. (12) bis (14).

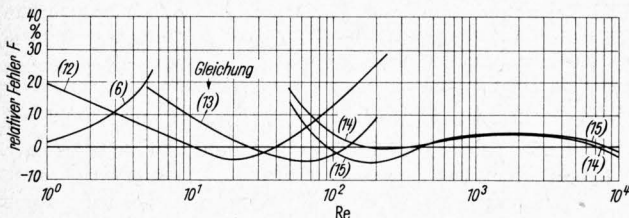


Bild 4. Der relative Fehler der durch Approximation ermittelten Gln. (12) bis (15).

Widerstandsfunktion mit einem Fehler von $\pm 5\%$ als gute Näherung für die gemessenen Funktionen angesehen werden kann.

Da Gl. (12) bis (15) nur für Teilabschnitte des Übergangsbereichs $1 < Re < 4 \cdot 10^3$ eine befriedigende Näherung an die gemessene Funktion $c = f(Re)$ darstellen, wird versucht, durch Erweiterung der Oseenschen Gleichungsform (11) den Gültigkeitsbereich zu vergrößern. Gl. (11) wird um einen Summanden vergrößert und lautet dann:

$$c = \frac{m}{Re} + \frac{q}{\sqrt{Re}} + n \quad (16)$$

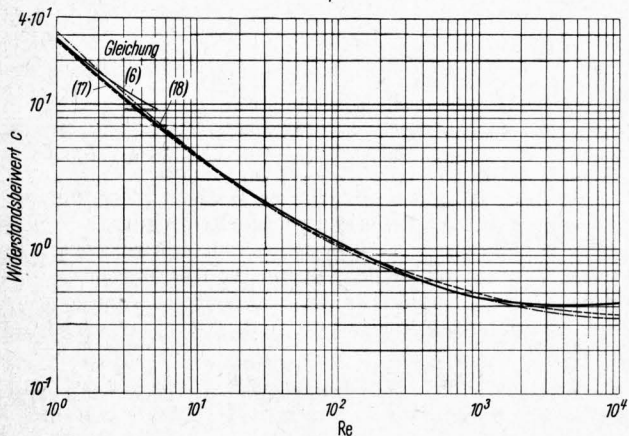


Bild 5. Vergleich der experimentellen Funktion des Widerstandsbeiwertes für Einzelkugeln mit den durch Approximation ermittelten Gln. (17) und (18).

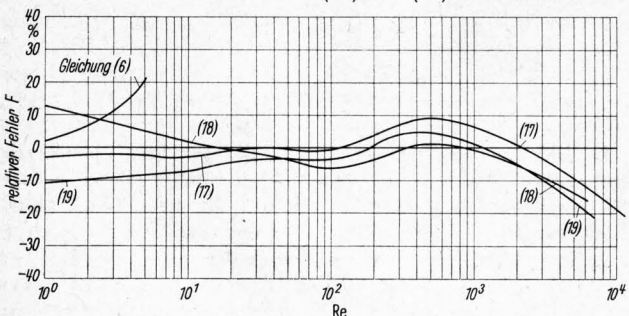


Bild 6. Der relative Fehler der Gln. (17) bis (19) in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl.

Wird Gl. (16) in die Bewegungsgleichung (1) eingesetzt, so wird die Integration zwar schwieriger als mit Gl. (11), ist aber durch eine Partialbruchzerlegung noch in geschlossener Form möglich. Durch die Berechnung auf dem Analogrechner ergeben sich als Näherungsgleichungen

$$c = \frac{21}{Re} + \frac{6}{\sqrt{Re}} + 0,28 \quad (17)$$

$$c = \frac{26,4}{Re} + \frac{4,87}{\sqrt{Re}} + 0,276 \quad (18)$$

$$c = \frac{18,5}{Re} + \frac{6,23}{\sqrt{Re}} + 0,25 \quad (19)$$

Gl. (17) wird in der gleichen Form schon von Rumpf und Mitarbeitern [7] angegeben. **Bild 5 und 6** zeigen wiederum den Verlauf der Widerstandsfunktion bzw. den des relativen Fehlers nach Gl. (17) bis (19) im Vergleich mit der experimentellen Kurve $c = f(Re)$. Gl. (17) bis (19) gelten mit einer Fehlergrenze von maximal $\pm 10\%$ im Bereich $2 < Re < 3 \cdot 10^3$. Gl. (17) hat im unteren Re -Bereich ($Re < 200$) kleinere relative Fehler, während Gl. (18) im Bereich $10 < Re < 2 \cdot 10^3$ genauere Näherungswerte liefert.

Im turbulenten Bereich ist der Widerstandsbeiwert zwischen $Re = 3 \cdot 10^3$ und $Re = 10^5$ nahezu konstant, und es gilt mit befriedigender Genauigkeit $c = 4,4$. Mit Hilfe der angegebenen Gleichungen kann nun die ganze experimentell ermittelte Funktion $c = f(Re)$ bis $Re = 10^5$ abschnittsweise durch mathematische Ausdrücke beschrieben werden.

Widerstandsbeiwerte von Kugeln im Kugelschwarm

In vielen Fällen reicht die Betrachtung der Einzelkugel nicht aus, da sich gleichzeitig mehrere Körper im Strömungsfeld befinden, die sich gegenseitig beeinflussen. Analytische Lösungen für den Strömungswiderstand von rotationssymmetrischen Körpern, die sich gegenseitig beeinflussen, sind nur für sehr vereinfachte Fälle möglich [8]; für den Übergangsbereich zwischen laminarem und turbulentem Gebiet gibt es keine, so daß man auf experimentelle Ergebnisse angewiesen ist. Aus der Messung der Nachlaufströmung hinter angeströmten Körpern kann man zwar den Widerstand ermitteln, was aber bei räumlichen Problemen äußerst schwierig ist [8].

Rowe und Henwood [9; 10] haben in einem Wasserstrom den Widerstand von Einzelkugeln und im Vergleich dazu den Widerstand von Kugeln gemessen, die von anderen Kugeln in verschiedener Lage umgeben sind. **Bild 7** zeigt Meßwerte für den Strömungswiderstand einer Kugel eines querangeströmten Kugelpaares, wobei das Verhältnis $W'/W = c'/c$ der Strömungswiderstände der Meßkugeln im Kugelschwarm zur Einzelkugel in Abhängigkeit vom Abstandsverhältnis δ dargestellt ist. Die Meßwerte W'/W sind in dem untersuchten Bereich $30 < Re < 300$ unabhängig von der Reynoldszahl. Diese Unabhängigkeit gilt nach Abschätzung der Autoren über einen weiten Bereich des Gebietes zwischen laminarer und turbulenter Strömung.

Die umgekehrte Proportionalität zwischen c'/c und δ läßt sich ausdrücken durch die Beziehung:

$$\frac{W'}{W} = \frac{c'}{c} = 1 + \frac{k_w}{\delta} \quad (20)$$

darin ist $\delta = a'/d_K$ das Verhältnis des auf den Mittelpunkt bezogenen Kugelabstandes zum Kugeldurchmesser. Die Verfasser [9] geben als Kugelentfernung die kleinste effektive Entfernung zwischen den Außenflächen der Kugeln an. Dadurch wird Gl. (20) bei Berührung der Kugel unbestimmt und verliert ihre Gültigkeit. Definiert man dagegen $\delta = a'/d_K$, so wird bei Berührung $\delta = 1$ und Gl. (20) bleibt gültig. Bei der Darstellung der Meßwerte tritt nur eine Diagrammverschiebung ein. k_w ist eine von der Lage der Störkugeln abhängige Konstante. Für $a' \rightarrow \infty$ nimmt Gl. (20) den Wert 1 an, d. h., der Widerstandsbeiwert wird gleich dem der Einzelkugel.

Der in **Bild 7** eingezeichnete Streubereich der Meßwerte beträgt bei $\delta = 1$ im Verhältnis zum Mittelwert $\pm 4,3\%$. Für das querangeströmte Kugelpaar wird für die Konstante k_w kein

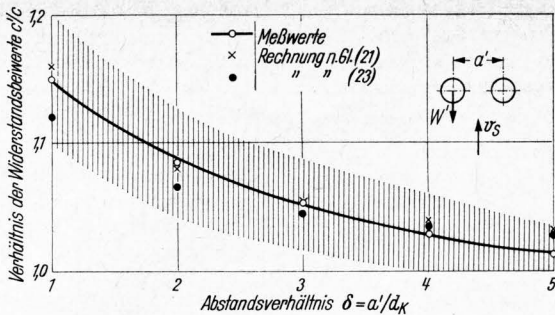


Bild 7. Der bezogene Widerstandsbeiwert einer Kugel in einem querangeströmten Kugelpaar in Abhängigkeit vom Abstandsverhältnis nach experimentellen und theoretischen Werten.
Durchmesser der Meßkugeln $d_K = 12,7$ mm

Zahlenwert angegeben. Die Kurve durch die Meßwerte läßt sich aber befriedigend durch folgende Funktion beschreiben:

$$\frac{c'}{c} = 1 + \frac{0,16}{\delta} \quad (21).$$

Die nach dieser Gleichung berechneten Werte sind in Bild 7 mit eingetragen, wobei der größte Fehler von 1,5% bei $\delta = 5$ auftritt.

In Bild 8 ist der bezogene Widerstand einer Meßkugel in einem Kugelschwarm in Abhängigkeit von der Zahl der Störkugeln nach Meßwerten von Rowe und Henwood aufgetragen. Die Einzelkugeln, die sich gegenseitig berühren, befinden sich dabei in einer Ebene quer zur Anströmrichtung. Die dargestellte experimentelle Kurve kann im Bereich $0 < z' < 35$ durch die Funktion

$$\frac{c'}{c} = 1 + (z' \cdot 0,16)^{1,16} \quad (22)$$

dargestellt werden, deren Werte in Bild 8 eingezeichnet sind.

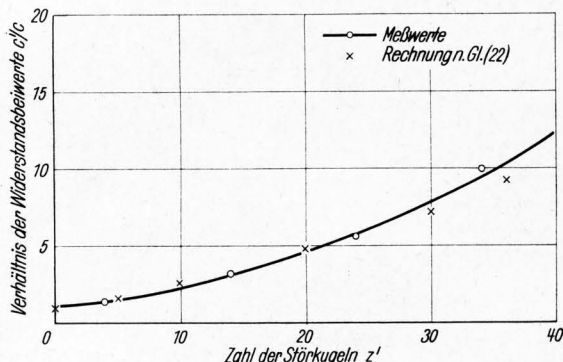


Bild 8. Der bezogene Widerstandsbeiwert von Kugeln in einem ebenen Kugelschwarm, dessen Ebene quer zur Strömungsrichtung liegt.

$d_K = 12,7$ mm

Dabei ist z' die Zahl der Störkugeln, die die Meßkugel in dem Kugelschwarm umgeben. Für $z' > 35$ wird der Fehler der Näherungsgleichung (22) schnell größer. Gl. (22) gilt für den Fall der Kugelberührung, d. h., es ist $\delta = 1$. Ein Vergleich zwischen Gl. (21) und (22) zeigt, daß der Faktor 0,16 in Gl. (22) dem Wert k_W/δ der Widerstandsgleichung des querangeströmten Kugelpaares für $\delta = 1$ entspricht. Ferner ist der Exponent 1,16 gleich dem bezogenen Widerstandsbeiwert c'/c für $\delta = 1$ in Gl. (21). Aus diesem Vergleich läßt sich ein Ansatz für den bezogenen Widerstand einer Meßkugel in einem einschichtigen quer zur Strömungsrichtung liegenden Kugelschwarm formulieren, wenn man davon ausgeht, daß Gl. (22) ein Sonderfall des allgemeinen Falles $\delta \neq 1$ ist. Unter dieser Voraussetzung wird im genannten Gültigkeitsbereich

$$\left(\frac{c'}{c}\right)_\delta = 1 + \left(z' \frac{k_W}{\delta}\right)^{\left(\frac{c'}{c}\right)_\delta} \quad (23);$$

der Index δ besagt, daß der bezeichnete Ausdruck für das entsprechende Abstandsverhältnis gilt. Nach dieser Gleichung ist der bezogene Widerstandsbeiwert für das quer angeströmte

Kugelpaar berechnet und in Bild 7 eingezeichnet. Die Werte liegen innerhalb des Streubereiches der Meßwerte. Der größte relative Fehler in bezug auf die Meßwertkurve beträgt 3,5% bei $\delta = 1$. Gl. (23) wurde außerdem bei der Auswertung der Sinkversuche von Kugeln im Fließbett verwendet [11], wobei gute Übereinstimmung mit den Experimenten gefunden wurde.

Bild 9 zeigt eine experimentelle Funktion für den mittleren bezogenen Widerstandsbeiwert c'/c von mehreren Kugeln, die in Strömungsrichtung hintereinander liegen. Für diese Kurve wurde folgende empirische Gleichung aufgestellt, deren Werte in Bild 9 eingezeichnet sind:

$$\frac{c'}{c} = \frac{1}{1 + \ln [1 + (z' \cdot 0,34)^{0,66}]} \quad (24).$$

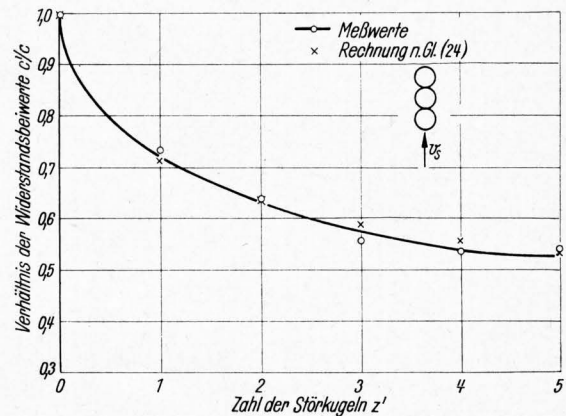


Bild 9. Der bezogene Widerstandsbeiwert von Kugeln, die in Strömungsrichtung hintereinander liegen.

$d_K = 12,7$ mm

Weitere Meßergebnisse von Rowe und Henwood beziehen sich auf den mittleren Widerstandsbeiwert von Kugeln in einer Kugelpackung. In einer rhombischen Kugelpackung steigt der bezogene Widerstandsbeiwert c'/c mit wachsender Zahl der quer zur Strömungsrichtung liegenden Kugelschichten bis zu einer Dicke von vier übereinanderliegenden Schichten an und pendelt sich dann mit wachsender Schichtzahl auf einen konstanten Wert von etwa 65 ein, **Bild 10**. Für eine rhombische Kugelpackung großer Ausdehnung, für die sich das spezifische Hohlraumvolumen theoretisch zu $\varepsilon = 0,39$ berechnen läßt [11], ist der bezogene mittlere Widerstandsbeiwert demnach

$$\frac{c'}{c} = 65 \quad (25).$$

Das spezifische Hohlraumvolumen von $\varepsilon = 0,39$ entspricht dem mittleren ε einer Kugelschüttung. Gl. (25) bietet deshalb die Möglichkeit, den Druckverlust in Schütttschichten zu berechnen, was im nächsten Abschnitt durchgeführt wird.

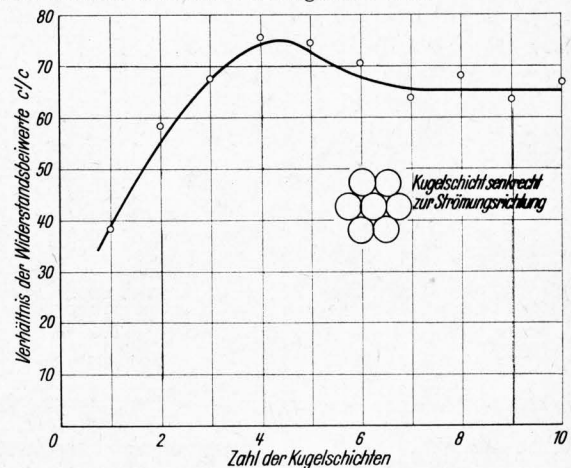


Bild 10. Der bezogene Widerstandsbeiwert von Kugeln in einem Kugelschwarm in Abhängigkeit von den in Strömungsrichtung übereinander liegenden Kugelschichten.

$d_K = 12,7$ mm

Widerstandsbeiwerte zur Berechnung des Druckverlustes in Schütttschichten

Für die Berechnung von Problemen der Trocknung und Belüftung landwirtschaftlicher Erntegüter sowie für die Berechnung von Fließbettsystemen, die bei der Aufbereitung landwirtschaftlicher Produkte angewendet werden [12], ist die Kenntnis des Strömungswiderstandes bzw. des Druckverlusts von Schütttschichten erforderlich. Über diesen Druckabfall in Schütttschichten sind umfangreiche Untersuchungen durchgeführt und zahlreiche Ansätze veröffentlicht worden. *Barth* [13], *Brötz* [14] und *Matthies* [1] geben eine Übersicht der Arbeiten aus früheren Jahren. Weitere Untersuchungen sind von *Barth* [15] und *Ergun* [16 bis 18] durchgeführt.

Nahezu alle Gleichungen über den Druckverlust in Schütttschichten haben die gleiche Grundform:

$$\Delta p = \zeta K H \frac{\rho_S v_S^2}{d_F} \quad (26);$$

darin ist ζ ein Widerstandsbeiwert und K eine Funktion, die vor allem durch das spezifische Hohlraumvolumen und durch weitere Kenngrößen der Schüttung, wie z. B. Kornform, Kornlage und Oberflächenbeschaffenheit bestimmt wird.

Einen vom laminaren bis zum turbulenten Strömungsbereich gültigen Ansatz für den Druckverlust hat *Ergun* aufgestellt. Danach ist

$$\Delta p = \psi H \frac{\rho_S v_S^2}{d_{F1}} \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^3} \quad (27).$$

Diese Gleichung wird heute in der Verfahrenstechnik bei der Berechnung von Strömungsvorgängen in Schütttschichten und Fließbetten häufig angewendet. Nach Auswertung zahlreicher Versuche gibt *Ergun* für den Widerstandsbeiwert ψ folgende Näherungsgleichung an:

$$\psi = 150 \frac{1 - \epsilon}{Re} + 1,75 \quad (28);$$

hier ist

$$Re = \frac{v_S d_{F1} \rho_S}{\eta_S} \quad \text{zu setzen.}$$

v_S ist die auf den feststofffreien Strömungsquerschnitt bezogene Geschwindigkeit des Strömungsmediums. Die Korngröße d_{F1} ist definiert als das 6fache Verhältnis von Kornvolumen V_F zur Kornoberfläche O_F . Es ergibt sich

$$d_{F1} = 6 \frac{V_F}{O_F} \quad (29).$$

Für Kugelschüttungen gleicher Korngröße wird die Korngröße d_{F1} gleich dem Kugeldurchmesser d_K .

Nach *Carman* [19 bis 21] läßt sich der Druckverlust in Schütttschichten aus dem *Hagen-Poiseuilleschen* Gesetz ableiten. Danach ist

$$\Delta p = \Phi K' \rho_S v_S^2 O' H \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^3} \quad (30);$$

darin ist Φ der Widerstandsbeiwert, K' eine Konstante, die die Krümmung der Strömungskanäle berücksichtigt und $O' = O_F/V_F$

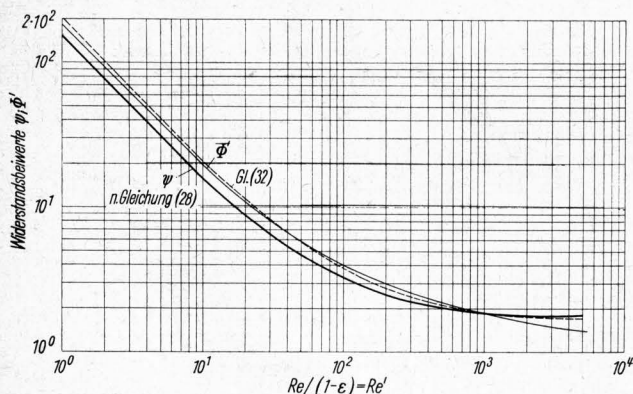


Bild 11. Die Abhängigkeit der Widerstandsbeiwerte aus den Druckverlustgleichungen für Schütttschichten von der bezogenen Reynoldszahl.

die volumenbezogene spezifische Oberfläche des Feststoffes. Für das Produkt $\Phi K' = f(Re/(1 - \epsilon))$ wird eine experimentell ermittelte Kurve angegeben, die nach den eingezeichneten Meßpunkten einen Streubereich von 33% hat [21]. Führt man in Gl. (30) die Korngröße nach der Definitionsgleichung (29) ein, so ergibt sich die *Ergunsche* Gleichungsform (27):

$$\Delta p = 6 \Phi K' H \frac{\rho_S v_S^2}{d_{F1}} \frac{(1 - \epsilon)}{\epsilon^3} \quad (31).$$

Das Produkt $6 \Phi K' = \Phi'$ entspricht dem Beiwert ψ von *Ergun* und ist in **Bild 11** nach der experimentellen Funktion [19] in Abhängigkeit von $Re/(1 - \epsilon)$ aufgetragen. Zum Vergleich ist die Funktion von *Ergun* nach Gl. (28) eingezeichnet, die im Bereich $Re < 10^3$ kleinere Werte als die Kurve von *Carman* hat.

Für die Kurve von *Carman* ist durch die Berechnung auf dem Analogrechner folgende Gl. (32) ermittelt worden, die die gleiche Form der Gl. (28) hat und in **Bild 11** mit eingezeichnet ist:

$$\Phi' = 202 \frac{1 - \epsilon}{Re} + 1,7 \quad (32).$$

Der größte relative Fehler F dieser Gleichung zum Mittelwert der experimentellen Funktion im Bereich $1 < Re/(1 - \epsilon) < 2000$ liegt bei 11% und beträgt damit nur etwa $1/3$ des Streubereiches der einzelnen Meßwerte.

Für landwirtschaftliche Erntegüter bereitet die Bestimmung der Korngröße d_{F1} Schwierigkeiten. *Matthies* [1] hat für die Durchströmung landwirtschaftlicher Erntegüter folgende Druckverlustgleichung abgeleitet:

$$\Delta p = \zeta_{KS} k \frac{1}{\epsilon^4} \frac{H}{d_{F2}} \frac{\rho_S v_S^2}{2} \quad (33);$$

v_S ist die gleiche auf den freien Strömungsquerschnitt bezogene Geschwindigkeit wie in Gl. (27). Die Korngröße d_{F2} dagegen wird in Gl. (33) als Durchmesser der Kugel definiert, die das gleiche Volumen hat wie das jeweils betrachtete Feststoffteilchen. Es ist

$$d_{F2} = \sqrt[3]{\frac{6 V_F}{\pi}} \quad (34).$$

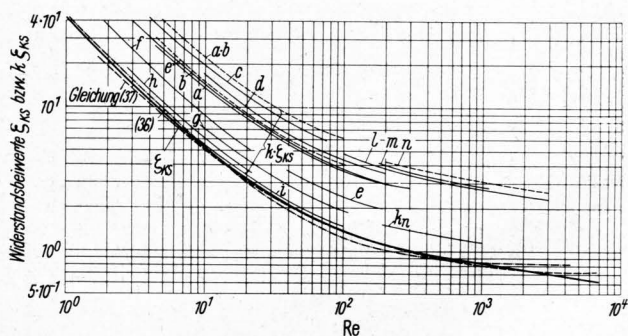


Bild 12. Die Widerstandsbeiwerte von Kugelschüttung und landwirtschaftlichen Erntegütern.

Ausgezogene Kurven (a bis n): gereinigte Erntegüter
Gestrichelte Kurven (l, m, n): ungereinigte Erntegüter
a Gerste, b Roggen, c Hafer, d Mais, e Weizen, f Kleesamen, g Speisebohnen, h Rapsamen, i Erbsen und Wicken, k_n Kartoffeln, l Zuckerrüben, m Mohrrüben, n Futterrüben.

Die Korngröße nach Gl. (34) ist für landwirtschaftliche Erntegüter einfacher zu ermitteln. Der Widerstandsbeiwert ζ_{KS} gilt für Kugelschüttungen und ist eine experimentell ermittelte Funktion [1]. Der Wert k ist eine Stoffkonstante, durch die die Kornform, Kornverteilung und Oberflächenbeschaffenheit des Feststoffes berücksichtigt wird und die für jeden von der Kugelgestalt abweichenden körnigen Feststoff experimentell zu bestimmen ist. Das Produkt $k \zeta_{KS}$ ergibt den Widerstandsbeiwert für das jeweilige Schüttgut. **Bild 12** zeigt den Verlauf des Widerstandsbeiwertes ζ_{KS} für Kugelschüttungen ($k = 1$) und den Beiwert $k \zeta_{KS}$ für den Druckverlust bei der Durchströmung landwirtschaftlicher Erntegüter als Funktion von Re nach *Matthies* [1]. Die Stoffkonstanten k sind noch einmal in **Tafel 2** zusammengefaßt. Als Näherungsfunktion für ζ_{KS} gibt *Matthies*

verschiedene Ersatzgeraden mit der allgemeinen Gleichung

$$\zeta_{KS} = C_0 \text{Re}^{-z} \quad (35)$$

an, die aber nur in einem sehr begrenzten Bereich eine gute Näherung zur wahren Funktion $\zeta_{KS} = f(\text{Re})$ geben.

Durch Berechnung auf dem Analogrechner sind auch für den Widerstandsbeiwert ζ_{KS} für Kugelschüttungen Näherungsgleichungen in der allgemeinen Form der Gl. (11) und (16) ermittelt worden, die für den ganzen Übergangsbereich $1 < \text{Re} < 3 \cdot 10^3$ gelten und die die oben beschriebene Voraussetzung der geschlossenen Integrierbarkeit erfüllen. Die Gleichungen mit den ermittelten Koeffizienten lauten:

$$\zeta_{KS} = \frac{44}{\text{Re}} + 0,8 \quad (36),$$

$$\zeta_{KS} = \frac{31,72}{\text{Re}} + \frac{4,31}{\sqrt{\text{Re}}} + 0,644 \quad (37).$$

Tafel 2. Die Stoffkonstante k für landwirtschaftliche Erntefrüchte nach *Matthies* [1].

Art des Gutes	Stoffkonstante k
Erbsen	1,05
Wicken	1,05
Rapssamen	1,2
Bohnen	1,4
Kartoffeln, feldsortiert	1,4
Kleesamen	1,7
Weizen, rein	1,8
Weizen, ungereinigt	
(Mährescher-Getreide)	3,0
Roggen, rein	2,7
Roggen, ungereinigt	4,4
(Mährescher-Getreide)	
Sommergerste, rein	2,7
Wintergerste, ungereinigt	4,4
(Mährescher-Getreide)	
Mais mit viel Bruchkorn	3,2
Zuckerrüben	3,3
Mohrrüben	3,5
Futtrüben mit Erdkrusten	3,7
Hafer, rein	3,8

Diese Funktionen sind in Bild 12 eingezeichnet. **Bild 13** zeigt wiederum den relativen Fehler F der Gl. (36) und (37) in bezug auf die gemessene Funktion $\zeta_{KS} = f(\text{Re})$. Danach stellt die Gl. (37) im Bereich $3 < \text{Re} < 2 \cdot 10^3$ eine sehr gute Näherung dar. Der maximale Fehler beträgt bei $\text{Re} = 3$ und $\text{Re} = 2 \cdot 10^3$ jeweils nur $\pm 5,5\%$. Im Bereich $5 < \text{Re} < 10^3$ ist der Fehler nicht größer als $\pm 2,5\%$. Diese Abweichungen liegen innerhalb des Streubereiches der Meßwerte für die Kurve $\zeta_{KS} = f(\text{Re})$. Gl. (36) hat etwas größere relative Fehler F als Gl. (37), bleibt aber im ganzen Bereich $1 < \text{Re} < 2 \cdot 10^3$ innerhalb einer Fehlergrenze von $\pm 10\%$. Im Gegensatz zum Widerstandsbeiwert der Einzelkugel, bei dem die einfachere Gleichungsform (11) nur für begrenzte Bereiche gilt, Bild 4, gibt diese Gleichungsform (36) für den Widerstandsbeiwert von Kugelschüttungen im ganzen Übergangsbereich eine gute Näherung zur wahren Funktion $\zeta_{KS} = f(\text{Re})$. Der auftretende maximale Fehlerbereich von $\pm 10\%$ bei $\text{Re} = 50$ und $\text{Re} = 2 \cdot 10^3$ liegt im Grenzbereich der Streuung der Einzelmeßwerte. Da die Widerstandsbeiwerte zur Berechnung des Druckverlustes landwirtschaftlicher Erntegüter nach Bild 12 fast alle in einem Bereich der Reynoldszahl $3 < \text{Re} < 2 \cdot 10^3$ liegen, geben Gl. (36) und (37) befriedigende theoretische Werte für den Widerstandsbeiwert ζ_{KS} und können in Verbindung mit der Stoffkonstanten k zur Berechnung des Druckverlustes bei der Durchströmung landwirtschaftlicher Produkte herangezogen werden. Die Meßgenauigkeit für die Kurven $k \zeta_{KS} = f(\text{Re})$ liegen bei etwa 8% , so daß eine theoretische Näherung mit dem gleichen maximalen Streubereich ausreichend erscheint.

Da sowohl Gl. (27) und (30) wie auch Gl. (33) für den Druckverlust verschiedener Schüttgüter Gültigkeit haben sollen, erhebt sich die Frage, inwieweit alle drei Gleichungen für gleiche Verhältnisse zur Übereinstimmung gebracht werden können. Für Feststoffkörnigen mit Kornformen, die von der Kugelgestalt

abweichen, besteht die Schwierigkeit, daß die Korngrößen d_F verschieden definiert sind. Für Kugelschüttungen dagegen wird

$$d_{F1} = d_{F2} = d_K \quad (38),$$

wobei d_K der mittlere Kugeldurchmesser ist. Ferner wird in Gl. (33) $k = 1$. Für Kugelschüttungen und gleiche Strömungsbedingungen muß der Druckverlust von Gl. (27), Gl. (31) und Gl. (33) theoretisch denselben Wert ergeben. Durch Gleichsetzen ergibt sich aus den genannten Gleichungen

$$\psi \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} = \Phi' \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} = \frac{1}{2} \zeta_{KS} \frac{1}{\varepsilon^4} \quad (39).$$

Für Kugelschüttungen annähernd gleicher Korngröße ergibt sich ein mittleres spezifisches Hohlraumvolumen von $\varepsilon = 0,39$ [11]. Damit wird

$$\zeta_{KS} = 0,476 \psi = 0,476 \Phi' \quad (40).$$

Wird ψ nach Gl. (28) und Φ' nach Gl. (32) mit $\varepsilon = 0,39$ eingesetzt, so ergeben sich zwei weitere Bestimmungsgleichungen für den Widerstandsbeiwert ζ_{KS} :

$$\zeta_{KS} = 0,476 \psi = \frac{43,6}{\text{Re}} + 0,83 \quad (41),$$

$$\zeta_{KS} = 0,476 \Phi' = \frac{58,65}{\text{Re}} + 0,81 \quad (42).$$

Gl. (41), die aus der Druckverlustgleichung von *Ergun* abgeleitet ist, hat nahezu den gleichen Verlauf wie die Funktion nach der empirischen Gl. (36), die eine gute Näherung der Widerstandsfunktion für Kugelschüttungen nach *Matthies* darstellt, Bild 12 und 13. Dies besagt, daß die Druckverlustgleichungen von *Matthies* und *Ergun* bei entsprechender Umrechnung der Widerstandsbeiwerte für Kugelschüttungen die gleiche Form haben und im Übergangsbereich $2 < \text{Re} < 2000$ übereinstimmen.

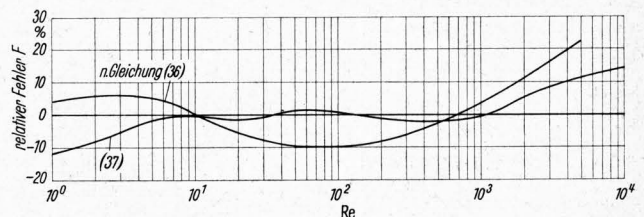


Bild 13. Der relative Fehler der Gln. (36) und (37) für die Widerstandsbeiwerte von Kugelschüttungen in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl.

Die Übereinstimmung mit der *Carman*-Gleichung ist dagegen nicht so gut. In **Bild 14** sind die auf die experimentelle Funktion bezogenen relativen Fehler der Gl. (41) und (42) sowie derjenige Fehler, der bei Verwendung der experimentellen Φ' -Werte nach *Carman* entsteht, Kurve a, eingetragen. Die Fehlerkurven von Gl. (36) in Bild 13 und Gl. (41) in Bild 14 sind nahezu identisch und bleiben im Bereich $1 < \text{Re} < 2000$ innerhalb des Streubereiches. Der aus der *Carman*-Gleichung umgerechnete Widerstandsbeiwert ζ_{KS} nach Gl. (42) liefert nur im Bereich $50 < \text{Re} < 2000$ Werte innerhalb eines Fehlerbereiches von $\pm 13\%$.

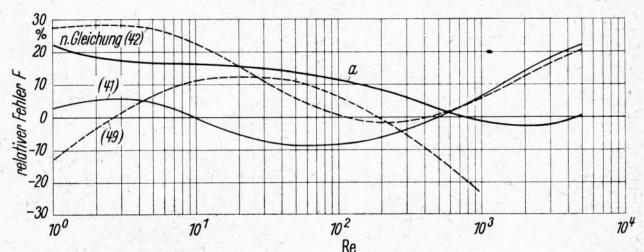


Bild 14. Der relative Fehler der Gln. (41), (42) und (49) für die Widerstandsbeiwerte von Kugelschüttungen in Abhängigkeit von der Reynoldszahl.

Bei Kurve a wurden in Gl.(40) die experimentellen Φ' -Werte (Bild 11) verwendet.

Im folgenden soll nun geprüft werden, inwieweit der in Gl. (25) angegebene Widerstandsbeiwert einer rhombischen Kugelpackung zur Berechnung des Druckverlustes in Schüttungen herangezogen werden kann. Im senkrechten Strömungsfeld befindet sich ein Einzelkorn in stationärem Zustand, wenn der Wider-

stand gleich dem um den Auftrieb verminderten Gewicht des Kornes ist. Das gleiche gilt für das Einzelkorn in einer durchströmten Schüttung im Zustand der beginnenden Fluidisierung am Lockerungspunkt. Da Gewicht und Auftrieb sich bei gleichem Strömungszustand nicht verändern, kann man die Widerstände des Einzelkornes und des Kornes in der Schüttung im stationären Zustand gleichsetzen. Es wird

$$c \frac{\varrho_S}{2} F_S v_{KS}^2 = c' \frac{\varrho_S}{2} F_S v_L^2 \quad (43);$$

dabei ist v_{KS} die stationäre Endgeschwindigkeit des Einzelkornes in der Strömung und v_L die Lockerungsgeschwindigkeit der Schüttung. Das mittlere spezifische Hohlraumvolumen einer Kugelschüttung am Lockerungspunkt ist $\varepsilon_L = 0,39$ [11], was dem theoretischen spezifischen Hohlraumvolumen der rhombischen Kugelpackung entspricht. Setzt man nun auch für den Widerstandsbeiwert des Einzelkornes in der Schüttung die entsprechenden Werte nach Gl. (25) ein, so wird

$$\frac{c'}{c} = \frac{v_{KS}^2}{v_L^2} = 65 \quad (44).$$

Die Lockerungsgeschwindigkeit berechnet sich aus der Bedingung, daß am Lockerungspunkt die Druckverluste der Schüttung und des Fließbettes gleich sind [6]. Mit dem Druckverlust für das Fließbett

$$\Delta p = (1 - \varepsilon) (\varrho_F - \varrho_S) g H \quad (45)$$

und der Gl. (27) von Ergun ergibt sich für Kugelschüttungen

$$v_L^2 = \frac{1}{\psi} \frac{\varrho_F - \varrho_S}{\varrho_S} \varepsilon^3 d_K g \quad (46).$$

Die stationäre Sinkgeschwindigkeit der Einzelkugel v_{KS} ergibt sich aus der Bewegungsgleichung (1) mit $m dv_K/dt = 0$ und $v_r = v_K$

$$v_{KS}^2 = \frac{4}{3c} \frac{\varrho_F - \varrho_S}{\varrho_S} g d_K \quad (47).$$

Setzt man Gl. (46) und (47) in Gl. (44) ein, so wird mit $\varepsilon = 0,39$ für die Kugelschüttung

$$\psi = 2,89 c \quad (48).$$

Mit Gl. (40) und (17) ergibt sich

$$\zeta_{KS} = 0,476 \psi = \frac{28,72}{Re} + \frac{8,25}{\sqrt{Re}} + 0,384 \quad (49).$$

Nach dieser Gleichung ist der Widerstandsbeiwert und der relative Fehler in bezug auf die experimentell ermittelte Funktion $\zeta_{KS} = f(Re)$ berechnet. Die Fehlerkurve, die in Bild 14 eingezeichnet ist, zeigt, daß Gl. (49) nur im Bereich $1 < Re < 500$ Widerstandsbeiwerte innerhalb eines Toleranzbereiches $\pm 12,5\%$ liefert. Gl. (49), die aus dem mittleren Widerstandsbeiwert der Einzelkugel in einer Kugelpackung abgeleitet ist, zeigt, daß die oben beschriebenen Funktionen von Rowe und Henwood mit den experimentellen und empirischen Funktionen für die Kugelschüttung in dem begrenzten Bereich bis $Re = 500$ innerhalb einer gewissen Toleranzgrenze, die etwa dem Meßfehler entspricht, in Übereinstimmung gebracht werden können.

Zusammenfassung

Für verschiedene aus dem Schrifttum bekannte Funktionen von Widerstandsbeiwerten, die meist experimentell ermittelt worden sind, werden mit Hilfe eines Analogrechners empirische Näherungsgleichungen berechnet. Diese Gleichungen haben gegenüber einigen schon bekannten Näherungsgleichungen, bei denen gebrochene Exponenten von Re auftreten, den Vorteil, daß sie in Verbindung mit Bewegungsgleichungen geschlossen integrierbar sind. Außerdem haben sie im Übergangsbereich zwischen laminarem und turbulenter Strömungszustand einen größeren Gültigkeitsbereich. Die Funktion des Widerstandsbeiwertes von Einzelkugeln wird im laminaren Bereich durch das Stokes'sche Gesetz und im turbulenten Bereich in erster Näherung durch einen konstanten Wert beschrieben. Für den Übergangsbereich werden Gleichungen angegeben, die der gestellten Forderung nach geschlossener Integrierbarkeit genügen und die in bezug auf die Meßwertkurve Werte liefern, deren relative Fehler innerhalb der Meßwertstreuung liegen. Weiterhin

lassen sich nach gemessenen Kurven Gleichungen für die bezogenen Widerstandsbeiwerte von Kugeln angeben, die sich im Kugelschwarm gegenseitig beeinflussen. Ausgehend von dem quer angeströmten Kugelpaar, wird der bezogene Widerstandsbeiwert von Kugeln in einem quer zur Strömungsrichtung liegenden Kugelschwarm ermittelt. Ferner können Gleichungen für die Widerstandsbeiwerte von in Strömungsrichtung hintereinander liegenden Kugeln und von Kugeln in einem regelmäßigen Kugelhäufen angegeben werden. Im letzten Abschnitt werden verschiedene Druckverlustgleichungen für die Durchströmung von Schüttungen miteinander verglichen. Für die entsprechenden Widerstandsbeiwerte sind wiederum empirische Gleichungen hoher Genauigkeit mit großem Gültigkeitsbereich ermittelt worden. Trotz der unterschiedlichen Form der Druckverlustgleichungen verschiedener Autoren ist es möglich, die Gleichungen bei entsprechender Umrechnung für Kugelschüttungen im untersuchten Bereich in Übereinstimmung zu bringen.

Schrifttum

Bücher sind mit einem ● gekennzeichnet.

- [1] ● Matthies, H.-J.: Der Strömungswiderstand beim Belüften landwirtschaftlicher Erntegüter. VDI-Forschungsheft Nr. 454, Düsseldorf 1956.
- [2] ● Prandtl, L.: Führer durch die Strömungslehre. 3. Aufl. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1949.
- [3] Fehling, R.: Der Strömungswiderstand ruhender Schüttungen. Feuerungstechnik **27** (1939) H. 2, S. 33/44.
- [4] ● Schlichting, H.: Grenzschichttheorie. Karlsruhe: G. Braun 1951.
- [5] Schiller, L., und A. Neumann: Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung. VDI-Z. **77** (1933) S. 318/20.
- [6] ● Schytil, F.: Wirbelschichttechnik. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1961.
- [7] Kürten, H.; J. Raasch und H. Rumpf: Beschleunigung eines kugelförmigen Feststoffteilchens im Strömungsfeld konstanter Geschwindigkeit. Chemie-Ing.-Techn. **38** (1966) H. 9, S. 941/48.
- [8] Schlichting, H., und E. Truckenbrodt: Aerodynamik des Flugzeuges. I. Bd. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1962.
- [9] Rowe, P. N., and G. A. Henwood: Drag forces in a hydraulic model of a fluidized bed — part I. Trans. Instn. Chem. Engrs. **39** (1961) S. 43/54.
- [10] Rowe, P. N.: Drag forces in a hydraulic model of a fluidized bed — part. II. Trans. Instn. Chem. Engrs. **39** (1961) S. 175/80.
- [11] ● Zabeltitz, Chr. v.: Über die Trennung von Körpern verschiedener Dichte in einem Fließbett. Fortschr. Ber. VDI-Z. Reihe 14, Nr. 3. Aug. 1966.
- [12] Zabeltitz, Chr. v.: Die Fließbettechnik bei der Aufbereitung landwirtschaftlicher Produkte. Grund. Landtechn. **16** (1966) H. 6, S. 205/11.
- [13] Barth, W.: Der Druckverlust bei der Durchströmung von Füllkörpersäulen und Schüttgut mit und ohne Berieselung. Chemie-Ing.-Techn. **23** (1951) S. 289/312.
- [14] Brötz, W.: Grundlagen der Wirbelschichtverfahren. Chemie-Ing.-Techn. **24** (1952) H. 2, S. 60/80.
- [15] Barth, W.: Strömungstechnische Probleme der Verfahrenstechnik. Chemie-Ing.-Techn. **26** (1954) H. 1, S. 329/34.
- [16] Ergun, S., and A. A. Orning: Fluid flow through randomy packed columns and fluidized beds. Ind. Engng. Chem. **41** (1949) H. 6, S. 1179/84.
- [17] Ergun, S.: Fluid flow through packed columns. Chem. Engn. Progr. **48** (1952) No. 2, 89/94.
- [18] Ergun, S.: Mass-transfer rate in packed columns. Its analogy to pressure loss. Chem. Engng. Progr. **48** (1952) Nr. 5, S. 227/36.
- [19] Carman, P. C.: Fluid flow through granular beds. Trans. Instn. Chem. Engrs. **15** (1937) S. 150.
- [20] ● Grassmann, P.: Physikalische Grundlagen der Chemie-Ingenieur-Technik. Aarau, Frankfurt a. M.: H. R. Sauerländer & Co. 1961.
- [21] ● Coulson, J. M., and I. F. Richardson: Chemical Engineering. Vol. II. Oxford/London/New York/Paris: Pergamon Press 1962.