

Als wichtigstes Ergebnis ist die grafische Darstellung der Abweichungswerte in Abhängigkeit von der Arbeitsbreite anzusehen, **Bild 4**. Der Kurvenverlauf zeigt, welche Toleranzen der Arbeitsbreite beim Anschlußfahren tragbar sind, ohne daß die Abweichungswerte ein zulässiges Maß (z. B. $s \leq 20\%$) überschreiten. Dieser Kurvenverlauf ist für einen Streuer charakteristisch und, wie eine Vielzahl von Versuchen bestätigt, für alle Düngerarten ähnlich.

Daher bedienen sich sowohl Hersteller von Verteilgeräten als auch die Düngerindustrie häufig dieser modernen Anlage, einerseits zur Funktionsuntersuchung und Verbesserung der Maschine, andererseits zur Prüfung der Streufähigkeit neuer Mineraldüngerprodukte.

Einfluß der Teilung auf den Aussagewert

In welchem Maße die Abweichungswerte differieren können, wenn verschiedene Teilungen der Berechnung zugrunde gelegt werden, wird für einen Streuversuch mit feinkörnigem Streugut dargelegt, **Bild 5**. Die Abweichungskurven für die Teilungen 10, 20, 30 und 40 cm haben an derselben Stelle (bei $b = 3,6$ m) ein Minimum, lediglich die Kurve für die Teilung 50 cm zeigt ein abweichendes Bild, da das Minimum bei $b = 4,0$ m liegt.

Die unterschiedlichen Ergebnisse in Abhängigkeit von der gewählten Teilung mögen für die Praxis von untergeordneter Bedeutung sein. Selbst für Maschinenprüfungen, wie sie die DLG-Prüfstelle in Braunschweig-Völkenrode durchführt, ist eine Teilung der Streubreite in 50 cm bei der Meßwertaufnahme noch gerechtfertigt. Sollen aber die Einflüsse von veränderten Konstruktionsdetails einer Verteilmaschine oder die Streubildveränderung bei einem geänderten Korngrößenspektrum des Verteilgutes untersucht werden, so ist eine möglichst kleine Teilung notwendig.

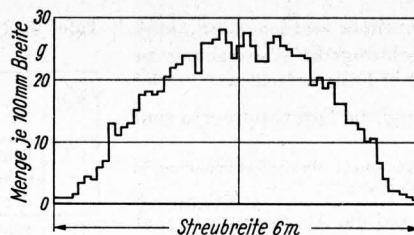
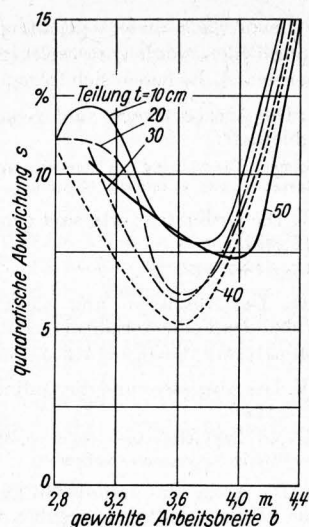


Bild 5. Streudiagramm und quadratische Abweichung s in Abhängigkeit von der gewählten Arbeitsbreite bei verschiedenen Teilungen.



Zusammenfassung

Es wurde ein Versuchsstand für die Aufnahme von Verteilungsbildern senkrecht zur Fahrtrichtung für Breitverteilergeräte, die Flüssigkeiten oder Feststoffe ausbringen, beschrieben. Die Auswertung der Versuche ist durch den Einsatz hochwertiger Meßgeräte und durch die programmierte Auswertung weitgehend rationalisiert. Damit sind Versuchsserien ohne großen Zeitaufwand durchführbar, die eine gesicherte Aussage über die Funktionsfähigkeit einer Maschine zulassen.

Schrifttum

- [1] Mathes, A., und W. Preisberg: Das Auswerten landtechnischer Versuchsreihen mit programmgesteuerten Rechenanlagen. *Grundl. Landtechn.* 17 (1967) Nr. 4, S. 155/59.
- [2] Zschuppe, H.: Untersuchungen über den Einfluß der Streugenauigkeit von Düngerstreuern auf den Pflanzenenertrag. *Arch. Landtechn.* 7 (1968) H. 1, S. 111/20.

DK 518.5:624.131

Die mathematische Ableitung der Ausgleichsgeraden mit einem Beispiel aus der Bodenmechanik

Von Rolf Ahlers, Braunschweig-Völkenrode

Aus den Arbeiten des Instituts für Landmaschinenforschung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode

Bei Versuchen wird vielfach der mehr oder weniger breite Streubereich einer abhängigen Meßgröße durch eine durch den Punkthaufen der Meßwerte gelegte Kurve veranschaulicht bzw. ersetzt. Soll die Kurve als Grundlage für weitere Berechnungen dienen, so sind die Parameter des gewählten Kurventyps in einer Ausgleichsrechnung so zu bestimmen, daß die Summe der Abweichungsquadrate ein Minimum wird. Die behandelte Ableitung des allgemeinen Falles einer Ausgleichsgeraden ist gekennzeichnet durch die beliebige Richtung der Abweichung der Meßpunkte von der Ausgleichsgeraden. Aus versuchstechnischen Gründen kann eine bestimmte Richtung vorgegeben sein. In Sonderfällen, bei denen die Abweichung in Richtung einer Koordinate bzw. senkrecht zur Ausgleichsgeraden verläuft, vereinfacht sich die allgemeine Ableitung. In einem Zahlenbeispiel wird für die Meßwerte eines bodenmechanischen Versuchs die Ausgleichsgerade berechnet, bei der die Abweichung gleichmäßig in beide Koordinatenrichtungen aufgeteilt ist.

Die Darstellung von Versuchsergebnissen in Diagrammform macht diese anschaulicher und läßt die Abhängigkeit der veränderlichen Größen besser erkennen. Vielfach ist es erforderlich, die Meßgrößen mit theoretisch gewonnenen Werten zu ver-

gleichen. Infolge zahlreicher versuchs- und meßtechnisch bedingter Fehlerquellen oder auch unbekannter Einflüsse stimmen die Versuchsergebnisse in der Regel nicht mit den theoretischen Werten überein; die Meßpunkte liegen in einem mehr oder weniger breiten Streubereich und bilden einen sogenannten Punkthaufen. Vielfach genügt es, durch diesen Punkthaufen eine Ausgleichsline nach visueller Beurteilung zu legen. Eine rechnerische und deshalb genauere Bestimmung der Ausgleichsline wird nötig, wenn sie zum Beispiel als Eingangsgröße für weitere Berechnungen benutzt werden soll.

Als einfachster Fall soll hier auf den linearen Zusammenhang zweier Veränderlicher eingegangen werden. Die in der Ausgleichsrechnung zum Standard gewordene „Methode der kleinsten Quadrate“ (besser: „Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme“) nach Gauß wird hierbei als Annäherungskriterium verwendet.

Fehlerabweichungen von der Ausgleichsgeraden

Mit der „Methode der kleinsten Quadrate“ erfolgt die Bestimmung der Ausgleichsgeraden, indem die Summe der Quadrate der Abweichungen A_i minimiert wird:

$$\sum_{i=1}^N A_i^2 = \text{Minimum}^1) \quad (1).$$

¹⁾ Die Bedeutung der Formelzeichen und Begriffe siehe „Verwendete Formelzeichen“.

Ing. (grad.) Rolf Ahlers ist technischer Mitarbeiter im Institut für Landmaschinenforschung (Direktor: Prof. Dr.-Ing. Wolfg. Baader) der Forschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode.

Bevor nach dieser Gleichung gerechnet werden kann, muß entschieden werden, in welcher Richtung die Abweichung zu messen ist. Es lassen sich folgende fünf Fälle aufzeigen:

I. Die Abszissenwerte sind genau und die Ordinatenwerte sind fehlerhaft.

Beispiel: Die während des Versuches unveränderliche Maschineneinstellung in Rasten (= genau) und die Ableseung (= fehlerhaft).

II. Die Ordinatenwerte sind genau und die Abszissenwerte sind fehlerhaft.

Beispiel wie unter I.

III. Die Abszissen- und die Ordinatenwerte sind fehlerhaft, wobei das Fehlerverhältnis nicht angegeben werden kann.

Beispiel: zwei Ableseungen (= fehlerhaft).

IV. Die Abszissen- und die Ordinatenwerte sind in gleichem Maße fehlerhaft.

Beispiel: Zwei Ableseungen, bei denen die Meßgrößen im ganzen Skalenbereich des Anzeigegerätes auftreten.

V. Die Abszissen- und die Ordinatenwerte sind fehlerhaft, wobei das Fehlerverhältnis angegeben werden kann.

Beispiel: Zwei Ableseungen, bei denen die eine Meßgröße nur in einem Teil, die andere im gesamten Skalenbereich des Anzeigegerätes auftritt und somit die erste Ableseung ungenauer als die zweite ist.

Zur Erläuterung des Unterschiedes zwischen den fünf Fällen diene **Bild 1** mit den Abweichungen Δ_I bis Δ_V , dargestellt für einen Punkt P_i . Die Fälle I, II und III sind bereits im Schrifttum behandelt worden [1 bis 4].

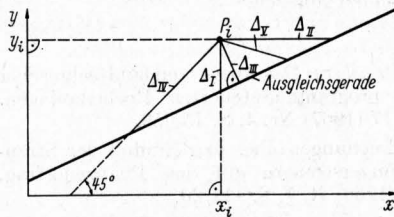


Bild 1. Der Meßpunkt P_i und die Ausgleichsgerade mit den zu minimierenden Abweichungen.

Das allgemeine Ausgleichskriterium

Ist für einen Punkthaufen die Ausgleichsgerade beispielsweise für den Fall I berechnet, so ergibt sich für den Punkt P_i infolge $y = f_I(x)$ ein Funktionswert $\hat{y}_i = f_I(x_i)$, **Bild 2**. Der Punkt P_i wurde auf einer senkrechten Geraden, der Verschiebungsgeraden, um Δ_I verschoben, bis er bei $\hat{y}_i = f_I(x_i)$ die Ausgleichsgerade traf.

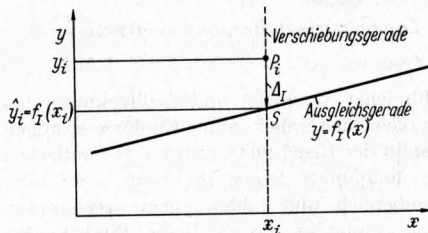


Bild 2. Der Meßpunkt P_i und die Verschiebungsgerade für den Fall I.

Dieses Verfahren soll verallgemeinert werden. Die Steigung m der Verschiebungsgeraden ist der kennzeichnende Unterschied zwischen den obengenannten fünf Fällen. Der Wert für m gibt an, in welchem Verhältnis die Abweichung Δ_i auf die beiden Koordinatenrichtungen aufgeteilt wird:

$$m = \frac{\varphi_y}{\varphi_x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{m} = \frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

$$\text{mit } \Delta_i^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2.$$

In **Tafel 1** ist die Zuordnung von m zu den einzelnen Fällen aufgezeigt. Wie ersichtlich ist, erfaßt Fall V durch Einführung eines Festwertes für m die Fälle I bis IV und ist damit der allgemeine Fall, für den hier die Ableitung der Ausgleichsgeraden vorgelegt wird.

Werden in einem Punkthaufen die Verschiebungsgeraden für einen der fünf Fälle eingezeichnet, so ist das Ergebnis eine Schar paralleler Geraden mit der Steigung m , wobei jeder Meßpunkt auf einer solchen Geraden liegt. Für den Punkt P_i ergibt sich **Bild 3**.

Tafel 1. Lage und Steigung der Verschiebungsgeraden für die verschiedenen Ausgleichsfälle.

Fall	Abweichung	Verschiebungsgerade	
		Lage	Steigung
I	Fehler in Ordinatenrichtung $\Delta_i = \varphi_y = \varphi_I$	senkrecht zur Abszisse	$1/m = 0$ $m = \infty$
II	Fehler in Abszissenrichtung $\Delta_i = \varphi_x = \varphi_{II}$	senkrecht zur Ordinate	$m = 0$
III	φ_x und φ_y sind unbekannt lassen sich nachträglich berechnen	senkrecht zur Ausgleichsgeraden	$m = -1/b$
IV	gleicher Fehler in Richtung der beiden Ordinaten $\varphi_x = \varphi_y$	parallel zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten	$m = 1$
V	φ_x und φ_y sind bekannt $\Delta_i = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = \Delta_V$	allgemein	$m = \varphi_y/\varphi_x$ $-\infty \leq m \leq +\infty$

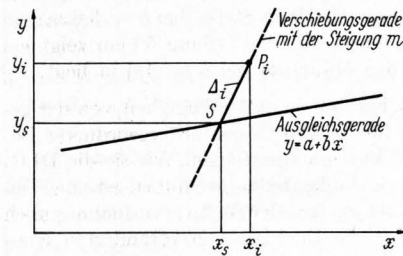


Bild 3. Die Abweichung Δ_i des Meßpunktes von der Ausgleichsgeraden mit der Verschiebungsgeraden in allgemeiner Lage.

Für die Abweichung Δ_i kann entsprechend Gl. (1) aus den geometrischen Beziehungen folgende Gleichung abgelesen werden²⁾:

$$\Delta_i^2 = \sum [(x_i - x_s)^2 + (y_i - y_s)^2] \quad (2)$$

Die Koordinaten des Punktes S sind als Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden

$$y = a + bx \quad (3)$$

und der Verschiebungsgeraden

$$y = mx - mx_i + y_i \quad (4)$$

bestimmt. Aus den Gln. (3) und (4) folgt gleichgesetzt und wieder eingesetzt:

$$x_s = \frac{y_i - mx_i - a}{b - m} \quad \text{und} \quad y_s = m \frac{y_i - mx_i - a}{b - m} - mx_i + y_i.$$

²⁾ Die Grenzen der Summe werden im folgenden zwecks vereinfachter Schreibweise weggelassen.

Verwendete Formelzeichen

- a Ordinatenabschnitt der Ausgleichsgeraden
- b Steigungsmaß der Ausgleichsgeraden
- c Kohäsion
- m Steigungsmaß der Verschiebungsgeraden
- N Anzahl der Meßpunkte
- P_i (x_i, y_i) -Meßpunkt
- $r_i = x_i - s_i$ Radius des Mohrschen Spannungskreises
- s_i linker Abszissenabschnitt des Mohrschen Spannungskreises
- S (x_s, y_s) -Schnittpunkt von Ausgleichs- und Verschiebungsgeraden
- s mittl. quadratische Abweichung der Meßpunkte von der Ausgleichsgeraden (Standardabweichung)
- $\bar{x} = \sum x/N$
 $\bar{y} = \sum y/N$ } Koordinaten des Schwerpunktes des Punkthaufens
- \hat{y}_i Funktionswert nach erfolgter Ausgleichsrechnung
- Δ_i Abweichung der Meßpunkte P_i von der Ausgleichsgeraden
- Δ_I, II, \dots Abweichung der Meßpunkte P_i von der Ausgleichsgeraden im Falle I bis V
- φ_x, φ_y Fehler in Abszissen- bzw. Ordinatenrichtung
- ρ Winkel der inneren Reibung
- $\sigma_{1, 2, 3}$ Hauptspannungen
- τ Scherspannung

Eingeführt in Gl. (2) ergibt sich umgeformt:

$$\Sigma \Delta_i^2 = \sum \frac{(1+m^2)(b x_i - y_i + a)^2}{(b-m)^2} \quad (5).$$

Die Bestimmungsgleichungen für die Variablen a und b ergeben sich aus den Berechnungen:

$$\frac{\partial}{\partial a} \Sigma \Delta_i^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial b} \Sigma \Delta_i^2 = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \Sigma \Delta_i^2 = \sum \left[\frac{(1+m^2) 2(b x_i - y_i + a)}{(b-m)^2} \right] = 0$$

$$0 = \Sigma (b x_i - y_i + a)$$

$$a = \frac{1}{N} (\Sigma y_i - b \Sigma x_i) \quad (6a),$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x} \quad (6b).$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \Sigma \Delta_i^2 = \sum \left[\frac{(1+m^2)(b-m)^2 2(b x_i - y_i + a) x_i}{(b-m)^4} - \frac{1+m^2(b x_i - y_i + a)^2 2(b-m)}{(b-m)^4} \right] = 0$$

$$0 = \Sigma [(b x_i - y_i + a)(y_i - m x_i - a)]$$

$$0 = b (\Sigma x_i y_i - m \Sigma x_i^2) + a (2 \Sigma y_i - b \Sigma x_i - m \Sigma x_i - N a) - \Sigma y_i^2 + m \Sigma x_i y_i.$$

Durch Einsetzen von Gl. (6a) ergibt sich umgeformt:

$$b = \frac{m [\Sigma x_i \Sigma y_i - N \Sigma x_i y_i] - [(\Sigma y_i)^2 - N \Sigma y_i^2]}{m [(\Sigma x_i)^2 - N \Sigma x_i^2] - [\Sigma x_i \Sigma y_i - N \Sigma x_i y_i]} \quad (7a),$$

$$b = \frac{[\Sigma x_i \Sigma y_i - N \Sigma x_i y_i] - 1/m [(\Sigma y_i)^2 - N \Sigma y_i^2]}{[(\Sigma x_i)^2 - N \Sigma x_i^2] - 1/m [\Sigma x_i \Sigma y_i - N \Sigma x_i y_i]} \quad (7b).$$

Wird Gl. (8) in Gl. (7) eingesetzt, so folgt:

$$b_{1,2} = \frac{N (\Sigma y_i^2 - \Sigma x_i^2) - (\Sigma y_i)^2 + (\Sigma x_i)^2 \pm \sqrt{[N (\Sigma y_i^2 - \Sigma x_i^2) - (\Sigma y_i)^2 + (\Sigma x_i)^2]^2 + 4 (N \Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i)^2}}{2 (N \Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i)} \quad (9).$$

Die beiden Lösungen dieser Gleichung stellen die Steigung der „günstigsten“ bzw. „ungünstigsten“ Ausgleichsgeraden dar, denn es ist

$$b_1 = -\frac{1}{b_2}.$$

Die Entscheidung, welcher der beiden Werte der Steigung der gesuchten Geraden entspricht, kann aus der Anschauung heraus oder analytisch, wie auf dem nachfolgend beschriebenen Wege, mittels der zweiten Ableitung nach b getroffen werden.

Wird Gl. (8) in Gl. (5) eingesetzt, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial b} \Sigma \Delta_i^2 = \frac{\partial}{\partial b} \sum \left[\frac{(b x_i - y_i + a)^2}{b^2 + 1} \right]$$

$$= \sum \left[\frac{1}{(b^2 + 1)^2} (2(b^2 + 1)(b x_i - y_i + a) x_i - (b x_i - y_i + a)^2 2b) \right]$$

$$= \sum \left[\frac{2}{(b^2 + 1)^2} (b x_i^2 + b^2 x_i y_i - b^2 x_i (\bar{y} - b \bar{x}) - x_i y_i - b y_i^2 + 2b y_i (\bar{y} - b \bar{x}) + x_i (\bar{y} - b \bar{x}) - b (\bar{y} - b \bar{x})^2) \right].$$

Durch Einsetzen der Gl. (6b) ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial b} \Sigma \Delta_i^2 = \sum \left[\frac{2}{(b^2 + 1)^2} (b x_i^2 + b^2 x_i y_i - b^2 x_i (\bar{y} - b \bar{x}) - x_i y_i - b y_i^2 + 2b y_i (\bar{y} - b \bar{x}) + x_i (\bar{y} - b \bar{x}) - b (\bar{y} - b \bar{x})^2) \right]$$

$$= \sum \left[\frac{2}{(b^2 + 1)^2} (b^3 (\bar{x} x_i - \bar{x}^2) + b^2 (x_i y_i - \bar{y} x_i - 2 \bar{x} y_i + 2 \bar{x} \bar{y}) + b (x_i^2 - \bar{x} x_i - \bar{y}^2 + 2 \bar{y} y_i - y_i^2) + \bar{y} x_i - x_i y_i) \right].$$

Diese Gleichung nochmals nach b abgeleitet lautet:

$$\frac{\partial^2}{\partial b^2} \Sigma \Delta_i^2 = \sum \left[\frac{2}{(b^2 + 1)^4} \{ (b^2 + 1)^2 [3 b^2 (\bar{x} x_i - \bar{x}^2) + 2 b (x_i y_i - \bar{y} x_i - 2 \bar{x} y_i + 2 \bar{x} \bar{y}) + x_i^2 - \bar{x} x_i - \bar{y}^2 + 2 \bar{y} y_i - y_i^2] - \right.$$

$$\left. - [b^3 (\bar{x} x_i - \bar{x}^2) + b^2 (x_i y_i - \bar{y} x_i - 2 \bar{x} \bar{y}_i + 2 \bar{x} \bar{y}) + b (x_i^2 - \bar{x} x_i - \bar{y}^2 + 2 \bar{y} y_i - y_i^2) + \bar{y} x_i - x_i y_i] 2 (b^2 + 1) 2 b \} \right]$$

$$= \frac{2}{(b^2 + 1)^3} [b^4 (\bar{x}^2 N - \bar{x} \Sigma x_i) + b^3 (2 \bar{y} \Sigma x_i - 2 \Sigma x_i y_i) + b^2 (-3 \Sigma x_i^2 + 3 \Sigma y_i^2 + 6 \bar{x} \Sigma x_i - 6 \bar{y} \Sigma y_i - 3 \bar{x}^2 N + 3 \bar{y}^2 N) +$$

$$+ b (6 \Sigma x_i y_i - 6 \bar{y} \Sigma x_i) + \Sigma x_i^2 - \Sigma y_i^2 - \bar{x} \Sigma x_i + 2 \bar{y} \Sigma y_i - \bar{y}^2 N] \leq 0$$

Diese beiden Gleichungen sind gleichbedeutend, aber im Interesse des Rechnens mit möglichst kleinen Zahlen sollten die Grenzen

$$-1 < m < +1 \text{ für Gl. (7a) bzw. } -1 < \frac{1}{m} < +1 \text{ für Gl. (7b)}$$

eingehalten werden.

Sonderfälle

Die Bestimmungsgleichung (6) für a gilt in gleicher Form für alle Fälle I bis V; vereinfachte Schreibweisen der Bestimmungsgleichung (7) für b lassen sich angeben. Beispielsweise werden für Fall I mit $1/m = 0$ in Gl. (7b) bzw. mit $m = 0$ in Gl. (7a) einfachere Ausdrücke gewonnen, die im Schrifttum nachzulesen sind [2; 4].

Für den Fall III ist neben a und b auch m variabel; in den anderen Fällen wird m im voraus bestimmt und geht als Konstante in die Rechnung ein.

Die Bedingungsgleichung für m lautet:

$$\frac{\partial}{\partial m} \Sigma \Delta_i^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial m} \Sigma \Delta_i^2 = \sum \left[\frac{[(b-m)^2 2m - (1+m^2) 2(b-m)(-1)](b x_i - y_i + a)^2}{(b-m)^4} \right] = 0$$

$$0 = b m + 1$$

$$m = -\frac{1}{b} \quad (8).$$

Die Verschiebungsgerade steht auf der Ausgleichsgeraden senkrecht; die Abweichung $\Delta_i = \Delta_{III}$ entspricht der kürzesten Entfernung des Punktes P_i zur Ausgleichsgeraden. Die Summe der Abweichungsquadrate $\Sigma \Delta_i^2$ wird zu einem absoluten Minimum und man erhält somit die „günstigste“ Ausgleichsgerade durch den Punkthaufen.

Ein Minimum bzw. Maximum tritt auf, wenn die zweite Ableitung den Wert > 0 bzw. < 0 hat.

Nach Einsetzen von $\bar{x} = \sum x_i/N$ und $\bar{y} = \sum y_i/N$ und Multiplikation mit N lautet der zusammengefaßte Ausdruck:

$$0 \leq 2(b^3 - 3b)(\sum x_i \sum y_i - N \sum x_i y_i) + (1 - 3b^2)[N \sum x_i^2 - N \sum y_i^2 - (\sum x_i)^2 + (\sum y_i)^2] \quad (10).$$

Die „günstigste“ Ausgleichsgerade hat die Steigung b , bei der die Gl. (10) einen Wert > 0 annimmt.

Der Wert für m kann nach Gl. (8) berechnet werden.

Für den bisher noch nicht behandelten Fall IV läßt sich noch eine einfachere Gleichung für b angeben, wenn

$$y_i = r_i \quad \text{und} \quad x_i = s_i + r_i$$

gesetzt wird. Gl. (7) geht über in:

$$b = \frac{\sum s_i \sum r_i - N \sum s_i r_i}{\sum s_i \sum r_i - N \sum s_i r_i + (\sum s_i)^2 - N \sum s_i^2} \quad (11).$$

Entsprechend wird aus Gl. (6a):

$$a = \frac{1}{N} [\sum r_i - b (\sum s_i + \sum r_i)] \quad (12).$$

Die Gl. (11) ist gegenüber Gl. (7) insofern vorteilhafter, als hierbei der Rechenaufwand geringer ist.

Ergebnisse

In Bild 4 ist ein Punkthaufen eingetragen, dessen vier Meßpunkte nur einen sehr losen Zusammenhang zwischen den Meßgrößen zeigen und für den normalerweise keine Ausgleichsgerade berechnet wird. Es läßt sich daran aber gut der Einfluß von m aufzeigen. So werden bei Änderung von m die verschiedenen Ausgleichsgeraden zu einem Geradenbüschel.

Der Schnittpunkt aller Ausgleichsgeraden liegt bei (\bar{x}, \bar{y}) im Schwerpunkt des Punkthaufens. Der Schwerpunkt ist der Punkt, für den die Summe der Abstände zu den Punkten P_i zum Minimum wird. Auch visuell zu ziehende Ausgleichsgeraden, meistens nach Fall III, lassen sich einfacher festlegen, wenn vorher der Schwerpunkt bestimmt wird.

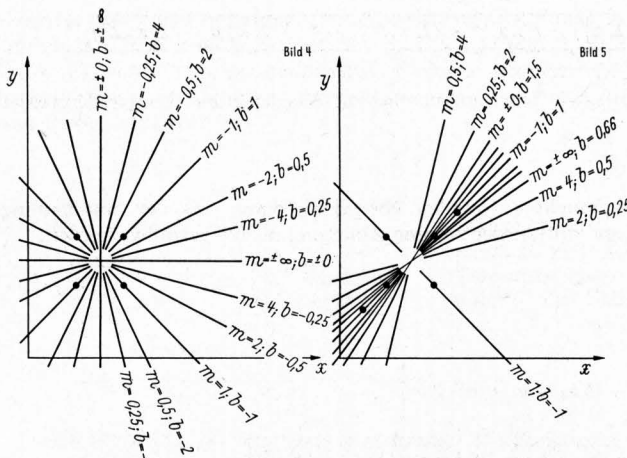


Bild 4 und 5. Die Ausgleichsgeraden für einen Punkthaufen, wenn die Steigung m der Verschiebungsgeraden variiert wird.

Für einen Punkthaufen, dessen Meßpunkte einen engeren Zusammenhang der Meßgrößen aufzeigen und für den die Ausgleichsgeraden mit den gleichen m -Werten wie in Bild 4 berechnet sind, zeigt Bild 5. Je enger der Zusammenhang wird, desto mehr nähern sich die Geraden, bis sie schließlich zusammenfallen, wenn die Punkte P_i schon auf einer Geraden liegen.

Zur Erläuterung sei noch gesagt, daß die Anwendung der in diesem Beitrag abgeleiteten Gleichungen nicht auf den ersten Quadranten des Koordinatensystems beschränkt ist. Es können sowohl die in anderen Quadranten, als auch die durch mehrere Quadranten laufende Ausgleichsgeraden bestimmt werden.

Beurteilung der Meßergebnisse

Ein Maß für die Beurteilung der im Punkthaufen dargestellten Versuchsergebnisse bzw. für die Gegenüberstellung ver-

schiedener Versuchsreihen ist die Streuung der Meßpunkte um die Ausgleichsgerade. Die zahlenmäßige Erfassung der Streuung erfolgt durch die Berechnung der mittleren quadratischen Abweichung s (Standardabweichung) der Meßpunkte von der Ausgleichsgeraden. Das Quadrat der Standardabweichung ist die mit s^2 bezeichnete Streuung:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum A_i^2 \quad (13).$$

Mit Gl. (5) wird:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum \frac{(1+m^2)(b x_i - y_i + a)^2}{(b-m)^2} = \frac{1+m^2}{(N-1)(b-m)^2} \sum (b x_i - y_i + a)^2.$$

Daraus wird nach Auflösung und Einsetzen von Gl. (6a) zusammengefaßt:

$$s^2 = \frac{1+m^2}{(N-1)(b-m)^2} [b^2 (N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2) + b (2 \sum x_i \sum y_i - 2 N \sum x_i y_i) + N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2] \quad (14).$$

Der Quotient $(1+m^2)/(b-m)^2 = F$ als Faktor dieser Gleichung nimmt für die Sonderfälle folgende Formen an:

Fall I	$\frac{1}{m} = 0$	$F = 1,$
Fall II	$m = 0$	$F = \frac{1}{b^2},$
Fall III	$m = -\frac{1}{b}$	$F = \frac{1}{b^2 + 1},$
Fall IV	$m = 1$	$F = \frac{2}{(b-1)^2}.$

Beim Rechnen mit Gl. (14) ist zu beachten, daß die Streuung den Wert ∞ annimmt, wenn $b = m$ ist.

Eine Beurteilung der Ausgleichsgeraden im Hinblick auf die Frage, ob die Annahme eines linearen Zusammenhanges überhaupt gerechtfertigt ist, wird hier nicht gegeben; denn es erscheint sinnvoller, diese Fragestellung vom Problem her aus den Randbedingungen zu beantworten.

Beispiel aus der Bodenmechanik

Zur Ermittlung der Scherfestigkeit und der inneren Reibung von Boden werden u. a. im Dreiaxialgerät zylindrische Bodenproben (mit z. B. 3,57 cm Durchmesser und 10 cm Höhe, d. s. 100 cm³ Volumen) untersucht. Die senkrecht aufgestellten Proben werden bei allseitig gleichem konstanten Horizontaldruck durch Erhöhen des Vertikaldruckes bis zum Bruch belastet. Die Belastungsrichtungen stehen senkrecht aufeinander und erzeugen dabei einen axialsymmetrischen Spannungszustand mit den Hauptspannungen σ_1 (vertikal) und $\sigma_2 = \sigma_3$ (horizontal).

Die Spannungen für den Bruchzustand werden im Mohrschen Spannungskreis dargestellt. Werden für die verschiedenen Spannungszustände die entsprechenden Spannungskreise entworfen, so kann eine Grenzkurve gezeichnet werden, die die Spannungskreise umhüllt. Die Kreise verschiedener Grenzbelastungsfälle haben eine gemeinsame Umhüllende, die, für viele Werkstoffe und so auch für Boden [5], durch eine Gerade genügend genau angenähert werden kann. Bei Werkstoffen mit

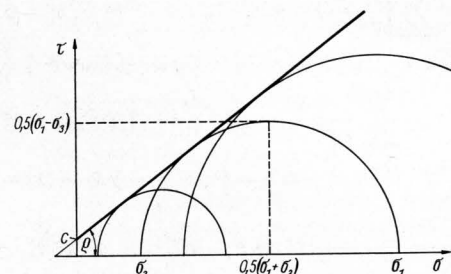


Bild 6. Die Mohrschen Spannungskreise mit der Grenzlinie.

unterschiedlicher Zug- und Druckbruchspannung ist die umhüllende Gerade (gleich Tangente an die Spannungskreise) gegenüber dem σ, τ -Koordinatensystem geneigt. Beim Boden gibt die Tangentensteigung den Winkel ϱ der inneren Reibung und der Ordinatenabschnitt c die Kohäsion an.

Im Koordinatensystem wird die Scherspannung τ über den Hauptspannungen σ_1 und σ_3 bzw. die Scheitelpunktkoordinaten (Radien) $0,5(\sigma_1 - \sigma_3)$ der Spannungskreise über den zugehörigen Mittelpunkten $0,5(\sigma_1 + \sigma_3)$ aufgetragen, **Bild 6**.

Infolge von Unterschieden zwischen den einzelnen Proben und sonstiger unkontrollierbarer Einflüsse werden sowohl die bei mehreren verschiedenen Seitenspannungen σ_3 gewonnenen Versuchsergebnisse nicht immer auf einer Geraden liegen, als auch die Wiederholungen bei der gleichen Seitenspannung σ_3 nicht zwingend zum gleichen Resultat führen.

Die Ergebnisse einer Versuchsreihe mit Wiederholungen zeige **Bild 7**, womit auch die Notwendigkeit, hier eine Ausgleichsrechnung anzusetzen, erklärt sein möge.

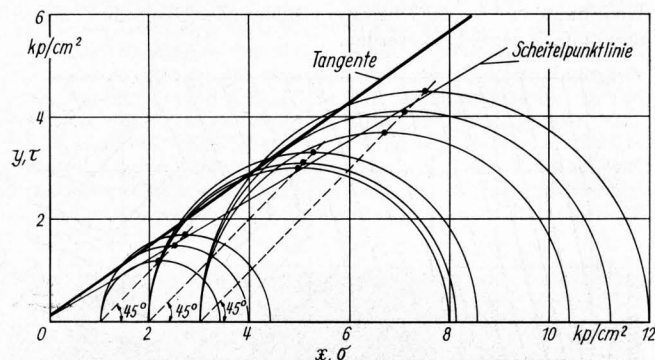


Bild 7. Versuchsergebnisse von Dreiaxialversuchen mit Bodenproben mit der errechneten Tangente (Meßwerte siehe Tafel 2).

Eine direkte Bestimmung der Tangente ist nicht möglich. Deshalb wird die Linie durch die Scheitelpunkte der Spannungskreise (Scheitelpunktlinie) als Hilfslinie benutzt, von der später auf die Tangente umgerechnet werden kann.

Die Gleichung der Tangente lautet

$$\tau = c + \sigma \tan \varrho,$$

bzw. mit $\sigma = x$ und $\tau = y$:

$$y = c + x \tan \varrho,$$

und die Gleichung der Scheitelpunktlinie

$$y = a + b x,$$

wobei der geometrische Zusammenhang dieser Gleichungen mit den einfachen Beziehungen

$$a = c \cos \varrho \quad (15)$$

und $b = \sin \varrho$ (16) gegeben ist.

Streuen die Ergebnisse der bei einem σ_3 durchgeführten Versuche untereinander, so liegen die Scheitelpunkte der Spannungskreise auf einer Geraden, die mit der Steigung $m = 1$ durch den Abszissenpunkt σ_3 geht. Oder anders ausgedrückt: Bei der konstanten Seitenspannung σ_3 schlägt sich die Streuung der Versuchsergebnisse in einem veränderten Radius des Span-

Tafel 2. Meßwerte für die in Bild 7 dargestellte Versuchsreihe.

	σ_3 kp/cm ²	σ_1 kp/cm ²	s kp/cm ²	r kp/cm ²	s^2 (kp/cm ²) ²	$s r$ (kp/cm ²) ²
	1	3,4	1	1,2	1	1,2
	1	4,0	1	1,5	1	1,5
	1	4,4	1	1,7	1	1,7
	2	8,0	2	3,0	4	6,0
	2	8,2	2	3,1	4	6,2
	2	8,6	2	3,3	4	6,6
	3	10,4	3	3,7	9	11,1
	3	11,2	3	4,1	9	12,3
	3	12,0	3	4,5	9	13,5
Σ			18	26,1	42	60,1

nungskreises nieder (Bild 7). Mit $\sigma_3 = s$ und $0,5(\sigma_1 - \sigma_3) = r$ liegen die Koordinaten für die Scheitelpunkte P_i der Spannungskreise mit $x_i = s_i + r_i$ und $y_i = r_i$ fest.

Die Ausgleichsgerade (Scheitelpunktlinie) $y = a + b x$ ist demnach entsprechend Fall IV zu berechnen, **Tafel 2**.

Mit $N = 9$ erhält man nach den Gln. (11) und (12)

$$b = \frac{18 \cdot 26,1 - 9 \cdot 60,1}{18 \cdot 26,1 - 9 \cdot 60,1 + 18^2 - 9 \cdot 42} = 0,5683,$$

$$a = \frac{1}{9} [26,1 - 0,5683 (18 + 26,1)] = 0,1151.$$

Die Gleichung der Scheitelpunktlinie lautet:

$$y = 0,1151 + 0,5683 x.$$

Nach den Gln. (15) und (16) wird der Winkel der inneren Reibung $\varrho = 34,64^\circ$ und die Kohäsion $c = 0,1399$ kp/cm². Mit $\tan \varrho = 0,6908$ lautet dann die Gleichung der Tangente (Bild 7)

$$y = 0,1399 + 0,6908 x.$$

Zusammenfassung

Bei der Auftragung von streuenden Versuchsergebnissen muß vielfach die Abhängigkeit der Veränderlichen durch eine mathematische Funktion ausgedrückt werden.

Als einfachster Fall wird in diesem Beitrag die Ausgleichsgerade für den linearen Zusammenhang zweier Veränderlichen behandelt. Das an sich bekannte Problem läßt sich in fünf Fälle aufschlüsseln:

- I. Abszissenwerte genau, Ordinatenwerte fehlerhaft,
- II. Ordinatenwerte genau, Abszissenwerte fehlerhaft,
- III. Abszissen- und Ordinatenwerte sind in unbekanntem Verhältnis zueinander fehlerhaft,
- IV. Abszissen- und Ordinatenwerte sind in gleichem Maße fehlerhaft,
- V. Abszissen- und Ordinatenwerte sind fehlerhaft und das Fehlerverhältnis kann angegeben werden.

Für den allgemeinen Fall V wird die Ableitung der Bestimmungsgleichungen für die Ausgleichsgerade vorgelegt. Hieraus lassen sich durch Vereinfachungen die Bestimmungsgleichungen für die Sonderfälle I bis IV herleiten.

Der Fall III hat als Lösungen die „günstigste“ und die „ungünstigste“ Ausgleichsgerade für einen Punkthaufen. Die Unterscheidung zwischen diesen beiden Geraden kann auf analytischem Wege durch eine Gleichung vorgenommen werden.

Die abgeleiteten Bestimmungsgleichungen gelten für Ausgleichsgeraden durch Meßpunkte in einem oder mehreren Quadranten. Als Annäherungskriterium ist die „Methode der kleinsten Quadrate“ nach Gauß verwendet worden.

Eine Beurteilung der Versuchsergebnisse beispielsweise zwecks Gegenüberstellung verschiedener Versuchsreihen wird manchmal erforderlich sein. Deshalb ist die zur Berechnung der mittleren quadratischen Abweichung der Meßpunkte von der Ausgleichsgeraden benötigte Gleichung mit angegeben.

Die Ableitung der Ausgleichsgeraden erfolgt anhand von Versuchsergebnissen eines Beispiels aus der Bodenmechanik. Für die in bekannter Weise entworfenen Mohrschen Spannungskreise wird die Ausgleichsgerade nach Fall IV durch die Scheitelpunkte der Kreise berechnet. Die Ausgleichsgerade und die Tangente sind mittels einfacher geometrischer Beziehungen verknüpft. Die Steigung der Tangente und der Ordinatenabschnitt ergeben die verlangten Werte für den Winkel der inneren Reibung und die Kohäsion des untersuchten Bodens.

Schrifttum

- [1] Böse, H.: Einführung in die Ausgleichsrechnung. München, Wien: Oldenbourg Verl. 1965.
- [2] Gellert, W., u. a.: Mathematik. Basel: Pfalz Verl. 1965.
- [3] Großmann, W.: Grundzüge der Ausgleichsrechnung. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verl. 1961.
- [4] Linder, A.: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. Stuttgart: Birkhäuser Verl. 1957.
- [5] Terzaghi, K., und R. Jelinek: Theoretische Bodenmechanik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verl. 1954.