DK 631.17:658.562.012.7

# Statistische Qualitätskontrolle in der Landtechnik

Von Dr. phil. **Wilhelm Späth**, Speyer

**Übliche statistische Darstellungen stellen nur eine von zwei Projektionen mit besonderen perspektiven Verzerrungen dar. Die Auswertung muß nach zwei Gesichtspunkten unterschieden werden: Ergebnisse des Prüfers und Verhalten im Betrieb. Eine neue Darstellung (Arsita-System) mit angularer Einteilung ermöglicht die Geradstreckung üblicher S-förmiger Summenlinien.**

## 1. Einführung

Statistische Auswertungen durchdringen immer mehr Naturwissenschaft und Technik, so auch die Grundlagen der Landtechnik. Die statistische Qualitätskontrolle ordnet die Aussage vielmals wiederholter Einzelbeobachtungen in Form einer Häufigkeitsverteilungskurve an, wobei angenommen wird, daß mit steigender Beobachtungszahl und genügend schmaler Klassenbreite schließlich die Gauß'sche Normalform erhalten wird. Kennzeichnend für diese Normalform ist ihre Symmetrie in bezug auf den häufigsten Wert; zudem erstrecken sich ihre beiden Äste nach $\pm\infty$.

Um die Aussage einer solchen Verteilungskurve in möglichst knapper Form quantitativ darzustellen, werden der arithmetische Mittelwert und die auf diesen Mittelwert bezogene Standardabweichung berechnet.

Wie in [1] dargelegt, sind gegen die Art dieser Auswertung, trotz ihrer allgemeinen Anwendbarkeit, folgende Einwände zu erheben:

a) Die ideale Normalform ist praktisch nicht realisierbar. Dies ist sehr einfach zu beweisen; angenommen sei eine Verteilung der einzelnen Beobachtungswerte mit verschwindend geringer Streuung. Dieser praktisch gleichbleibende Wert kann zu „1" gesetzt werden. Mit wachsender Streuung liegt nach kleineren Werten hin das Intervall zwischen 1 bis 0. Es ist daher eine untere, unüberschreitbare Grenze gesetzt. Kleiner als 0 kann ein Merkmalwert, beispielsweise die Festigkeit eines Bauteils oder die Haltbarkeit (Lebensdauer), nicht werden. Nach größeren Werten ist eine solche Schranke nicht gesetzt; ein nachfolgender Wert kann stets noch größer als ein vorangehender sein. Zwangsläufig ist mit größer werdender Streuung hierdurch eine zunehmende Asymmetrie der Verteilung verknüpft.

b) Übliche Verteilungskurven mit irgendeiner zufällig gewählten Merkmalsgröße sind lediglich eine von zwei Projektionen des gleichen Sachverhalts auf die Zahlenebene. Als Merkmalgröße einer Verteilung wird in der Regel diejenige gewählt, die gleichsinnig mit einer als wünschenswert erachteten Eigenschaft oder Verhaltensweise zunimmt; eine wirklichkeitsnahe Beurteilung des Verhaltens im Betrieb muß sich jedoch im Gegensatz hierzu auf nichtwünschenswerte Eigenschaften als Merkmalsgröße abstützen. Diese Dualität der Fragestellung führt zwangsläufig mit wachsender Streuung zu einem immer stärkeren Auseinanderklaffen der Aussagen.

c) Übliche Berechnungen von arithmetischem Mittelwert und Standardabweichung einer Merkmalgröße sind, ganz abgesehen von den hierzu erforderlichen Rechenarbeiten, nur für symmetrische Verteilungskurven zulässig, eine Voraussetzung, die aber meistens nicht erfüllt ist. Dies gilt auch für Verteilungskurven, deren Merkmalgröße irgendwelchen formalen Transformationen unterworfen wird, so etwa für lognormale Verteilungskurven.

## 2. Die Dualität der Fragestellung

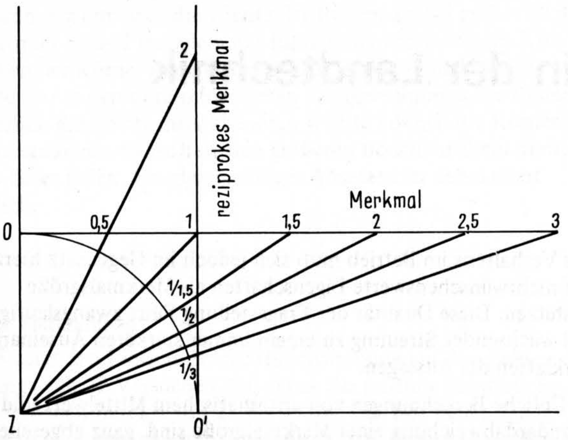
An zwei einfachen Beispielen aus der Praxis sei die Dualität der Fragestellung bei statistischen Erhebungen näher erörtert.

Zum Ermitteln der mechanischen „Qualität" eines Werkstoffs wird eine Anzahl von Probestücken genormter Abmessungen zunehmend belastet und beispielsweise die kritische Last bestimmt, bei der eine bleibende Verformung von 0,2 % (Streckgrenze) auftritt. Anschließend wird die gemessene Last auf den Anfangsquerschnitt bezogen; durch diese kombinierte Prüf- und Rechenoperation gewinnt man schließlich Gütewerte mit der Einheit $kp/mm^2$.

Die Fragestellung des Konstrukteurs, der aus diesem Werkstoff ein Bauteil zu entwerfen hat, ist derjenigen des Werkstoffprüfers gerade entgegengesetzt; ihm ist eine bestimmte Last vorgegeben und er hat nun umgekehrt den Querschnitt des Bauteils so zu wählen, daß die Streckgrenze nicht überschritten wird. Die maßgebliche Größe für den Konstrukteur ist der „spezifische Querschnitt", also derjenige Querschnitt, der je kp Last vorzusehen ist (Einheit $mm^2/kp$). Sehr häufig tritt bei statistischen Erhebungen die Zeit auf, die bis zum Eintritt eines Ereignisses vergeht. Der Messung unmittelbar zugänglich sind etwa die Zeit bis zum Versagen eines Bauteils unter praktischen Betriebsbedingungen, oder auch die in dieser Zeit ertragenen Lastwechsel, Arbeitszyklen, Stiche usw. Für den Verbraucher sind jedoch Angaben über die Dauer der Haltbarkeit nicht maßgebend; zur wirklichkeitsgerechten Beurteilung im praktischen Betrieb muß dieser nicht von der Laufzeit bis zum Versagen, sondern von der Geschwindigkeit des Versagens ausgehen. Erfahrungsgemäß kann die Haltbarkeit in großen Mengen hergestellter Dinge (Lager, Getriebe, Glühlampen) im Verhältnis 1 : 10 und noch mehr schwanken. Das arithmetische Mittel der Lebensdauer wird durch die langlebigen Exemplare entscheidend beeinflußt; einige wenige sehr früh versagende Teile fallen kaum ins Gewicht. Für den Verbraucher dagegen haben gerade diese beim Beurteilen der mittleren Güte entscheidende Bedeutung. Ihr schnelles Versagen macht bald kostspielige Reparaturen erforderlich. Für den Verbraucher ist daher nicht die mittlere Lebensdauer, sondern die mittlere Versagenswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit (etwa je Jahr) maßgebend; für ihn ist vielmehr das harmonische Mittel der unmittelbar gemessenen Lebensdauer entscheidend, das eine wesentlich kleinere Einschätzung der Gebrauchstüchtigkeit liefert.

**Bild 1.** Zuordnung der Merkmalachsen zweier zueinander reziproker Größen durch das hierzu perspektive Strahlenbüschel.

0 Ursprung
0' Ursprung des Kehrwerts
Z Träger des perspektivischen Strahlenbüschels




Diese Dualität der Fragestellung, die bei jeder statistischen Auswertung auftritt, zeigt schematisch **Bild 1**. Hier ist zunächst die Merkmalachse, wie allgemein üblich, in gleich große Intervalle (hier von 0 bis 3) eingeteilt. Das zugehörige Histogramm wird durch Auszählen der in jedes dieser Intervalle entfallenden Teile gewonnen. Jeder Merkmalwert aus irgendeiner Meßoperation ist streng genommen als Quotient mit dem Nenner „1" aufzufassen, diese Einheit wird im Ursprung 0 nach unten aufgetragen. Vom Punkt Z aus werden anschließend Strahlen nach den Teilpunkten der Merkmalachse gezogen, wodurch man das zur Punktfolge perspektive Strahlenbüschel erhält. Denkt man sich in Z einen Schützen aufgestellt, der völlig wahllos und blindlings Schüsse abgibt, so ist jede Richtung gleichwahrscheinlich; auf dem um Z als Mittelpunkt gezogenen Einheitskreis ist daher die Dichte der Einschüsse gleich groß. Dagegen hat die Dichte der Einschüsse auf der Merkmalachse als Scheibe eine Eigenverteilung, die mit wachsendem Abstand vom Nullpunkt immer dünner wird.

Nunmehr werde im Punkt 1 der Merkmalachse eine Senkrechte errichtet. Die vom Strahlenbüschel auf dieser Senkrechten markierten Punkte liefern die Kehrwerte, gerechnet vom neuen Ursprung 0', der ursprünglichen Merkmalwerte. Alle Einzelwerte $> 1$ werden nunmehr in den Bereich von 0 bis 1 der neuen Merkmalachse (senkrecht auf 0') zusammengedrängt; alle Werte $< 1$ dagegen werden in den Bereich von 1 bis $+\infty$ aufgeblättert. Eine entsprechende Verteilung in bezug auf die reziproke Merkmalachse würde somit eine völlig andere Gestalt aufweisen. Die hierdurch bedingten Verzerrungen lassen sich durch Einführen des zu beiden Punktfolgen perspektiven Strahlenbüschels vermeiden. Anstelle des numerischen Wertes (hier also $x = 1$ bis $x = 3$) eines Merkmals ist daher $\alpha = \arctan x$ einzuführen [1].

Eine bedeutsame Rolle bei dieser angularen Auffassung der Meßwerte spielt die Wahl der Maßeinheit. Hierzu wird ein typischer Wert der Verteilung selbst gewählt, völlig unabhängig von irgendwelchen üblichen Maßeinheiten, und zwar der Merkmalwert aus der Mitte der Verteilung. Der Zentralwert der Verteilung ist projektiv invariant; seine Lage in der Mitte bleibt erhalten, gleichgültig von welcher der beiden zueinander reziproken Merkmalgrößen man ausgeht. Alle übrigen Merkmalwerte werden in dieser Einheit ausgedrückt. Hierdurch gelangt man zur angularen Skala für die Merkmalwerte. In dieser Skala liegt der Einspunkt in der Mitte, von wo aus sich zwei gleich lange Äste für 1 bis 0 bzw. von 1 bis $+\infty$ erstrecken. Zwei zueinander reziproke Zahlenwerte liegen in gleichem Abstand vom Einspunkt. Dem Wert 0 auf der einen Seite entspricht im gleichen Abstand vom Einspunkt der Wert $1/0 = +\infty$.

### 3. Einteilung der Summenprozentachse

Heute wird zur Versinnbildlichung des „Umfanges" eines Kollektivs eine Strecke in gleich große Intervalle eingeteilt. Hierbei bleibt unberücksichtigt, ob ein Intervall in der Mitte oder aber in der Nähe der unüberschreitbaren Grenzen 0 bzw. 100 % liegt, mit den zu erwartenden „Randbedingungen". In einfachen statistischen Darstellungen hat man schon immer nicht eine Strecke, sondern einen Kreis zur Versinnbildlichung eines Kollektivs gewählt; einzelne Sektoren aus diesem Kreis geben jeweilige Untermengen an. Errichtet man über der Strecke einen Kreis, so ist auch in diesem Kreis vom Mittelpunkt aus jede Richtung gleichwahrscheinlich. Der gleichabständigen Streckeneinteilung entsprechen dagegen sehr verschieden große Sektoren. Die hierdurch bedingten Verzerrungen lassen sich vermeiden, wenn die beiden Halbäste der Summenprozentachse (von 50 bis 0 % bzw. von 50 bis 100 %) nach arc sin eingeteilt werden, **Bild 2**.

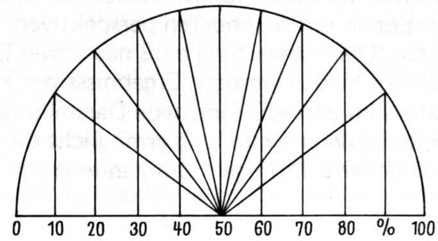



**Bild 2.** Linear aufgeteilte Summenprozentachse mit den zugehörigen Angularwerten.

Eine solche angulare Einteilung der Summenprozentachse ist im täglichen Leben, so etwa beim Teilen einer Torte in gleich große Stücke, selbstverständlich. Keinesfalls würde man etwa einen Durchmesser der Torte in gleich große Abschnitte einteilen und hierzu senkrechte Schnitte führen. Einer solchen Teilung entspricht aber die heute übliche gleichabständige Einteilung der Summenprozentachse. Als Folge dieser Einteilung tritt eine Umbiegung der Summenlinien mit Annäherung an die beiden Grenzwerte von 0 bis 100 % zur bekannten S-Form auf. Dies läßt sich nachahmen, wenn man eine auf einem Blatt Papier gezeichnete Gerade beim Aufrollen zu einem Halbzylinder betrachtet. Durch die angulare Teilung wird die so entstehende S-Kurve zur ursprünglichen Geraden abgewickelt.

### 4. Das Arsita-Koordinatensystem

Aus der Kombination dieser „arc sin-Teilung" für den Umfang des Kollektivs mit der „arc tan-Teilung" für den Merkmalwert erhält man das „Arsita-Koordinatensystem". Durch Eintragen in einem solchen System gelangt man in den meisten Fällen zur „Urbeziehung", dargestellt durch eine gerade Linie. Diese Gerade beginnt bei einem bestimmten Schwellenwert, ausgedrückt in Bruchteilen des Zentralwertes und erreicht den oberen Grenzwert für 100 % beim Kehrwert des Schwellenwertes. Ohne jede Rechnung läßt sich die Aussage der statistischen Erhebung etwa durch einen Ausdruck in der Form $M/m$ erfassen, worin $M$ den Zentralwert bedeutet und $m$ den unteren Schwellenwert in Einheiten des Zentralwerts angibt. Ist die Streuung 0, dann ist $m = 1$; mit wachsender Streuung wird $m$ immer kleiner und erreicht schließlich 0. Man kann daher $m$ als Maß für den jeweiligen „Gleichförmigkeitsgrad" der Verteilung definieren. Durch Angabe von $M/m$ ist nachträglich die Verteilung jederzeit zu konstruieren.

In dieser Weise wurden die Ergebnisse umfangreicher Festigkeitsversuche an einem neuen Baustahl ausgewertet [1]. Zahlreiche weitere Beispiele aus Physik, Chemie, Technik, Biologie, Arzneikunde u.a.m. finden sich in [2].

### Schrifttum


Bücher sind durch • gekennzeichnet

[1] *Späth, W.*: Einige Grundfragen der statistischen Qualitätskontrolle. VDI-Z Bd. 111 (1969) S. 805/12.

[2] • *Späth, W.*: Zahl-Maß-Bild. Grundfragen der Meßtechnik. Stuttgart: A.W. Genter Verlag 1960.