DIE GESETZE ZUR STATISCHEN MODELLÄHNLICHKEIT

Von W. Bergmann

Bei Festigkeitsuntersuchungen an Modellen gilt das Gesetz der statischen Ähnlichkeit, das von *M. Weber* [1, 2] in der Form

$$\kappa = \lambda^2 \cdot c$$

ausgedrückt wurde. Hierin bedeuten λ das Verhältnis der Längen von Grossausführung zu Modell, κ das Verhältnis der äusseren Kräfte und c das Verhältnis der Werkstoffkennzahlen, z.B. der Elastizitätsmoduln. Dieses Gesetz hat allgemeine Gültigkeit für Ähnlichkeitsbetrachtungen in Bezug auf die Festigkeit und Steifigkeit von Bauteilen, also in gleicher Weise für Zug, Druck, Biegung, Drehung und Knickung.

Für Eigengewichtsbelastung lautet das Ähnlichkeitsgesetz $\kappa = \lambda^3 \cdot c$, entsprechend der geometrischen Verkleinerung der Volumina $\nu = \lambda^3$, denn es ist $G = V \cdot \gamma$. Dieses Gesetz kommt aber nur selten zur Anwendung, da das Eigengewicht im Verhältnis zu den äusseren Lasten im allgemeinen vernachlässigt werden kann [3].

An den Beispielen der Biege- und der Verdrehbeanspruchung soll die Gültigkeit des ersten Modellgesetzes bewiesen werden.

1. Biegung

Die Grundgleichung der Biegelinie lautet

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{E \cdot J_x} \quad [\text{cm}^{-1}]$$

Die Lösung dieser allgemeinen Differentialgleichung liefert durch zweimaliges Integrieren die Gleichung für eine gesuchte Biegelinie. Ist z die Koordinate in Längsrichtung eines Biegeträgers und y die Druckbiegung, so kann bei Berücksichtigung der Randbedingung (Einspanngrad)

$$y = K \cdot \frac{M \cdot z^2}{E \cdot J_x} \quad [\text{cm}] \tag{1}$$

als Durchbiegung an der Stelle z geschrieben werden, wobei K eine vom Einspanngrad und vom Belastungsfall abhängige Konstante ist.

Der lineare Verkleinerungsfaktor sei

$$\lambda = \frac{y_g}{y_m} = \frac{L_g}{L_m} \tag{2}$$

wobei „g" der Index für die Grossausführung und „m" der des Modells bedeutet.

Bei Ähnlichkeitsbetrachtungen schreibt man die Gleichung (1) so, dass Längen und Kräfte getrennt erscheinen.

Aus Gleichung (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{L_g}{L_m} = \frac{P_g}{P_m} \cdot \frac{L_g^3}{L_m^3} \cdot \frac{E_m}{E_g} \cdot \frac{L_m^4}{L_g^4}$$

oder

$$\lambda = \kappa \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{c} \tag{3}$$

Besteht Materialgleichheit bei Modell und Grossausführung, so wird $1/c = 1$, sodass sich das Modellgesetz ergibt:

$$\kappa = \lambda^2 \ , \tag{4}$$

welches aussagt, dass der Verkleinerungsfaktor der Kräfte dem Quadrat des linearen Verkleinerungsfaktors gleich ist.

2. Verdrehung

In ähnlicher Weise lässt sich dieses Gesetz für die Drillung ableiten.

Die Gleichung für die Drillung bei reinen Torsionsproblemen lautet

$$\vartheta = \frac{M_d}{G \cdot J_d} \quad [cm^{-1}] \tag{5}$$

Hierin ist G der Schubmodul und J_d der Drillwiderstand ($J_d = J_p$ bei Kreis- und Kreisring-Querschnitt).

Schreibt man für den Verkleinerungsfaktor

$$\frac{\vartheta_g}{\vartheta_m} = \frac{1}{\lambda} = \frac{L_m}{L_g} \tag{6}$$

so folgt mit Gleichung (5)

$$\frac{L_m}{L_g} = \frac{P_g}{P_m} \cdot \frac{L_g}{L_m} \cdot \frac{G_m}{G_g} \cdot \frac{L_m^4}{L_g^4}$$

oder

$$\frac{1}{\lambda} = \kappa \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\lambda^3} \tag{7}$$

Hieraus folgt wieder das in Gleichung (4) angeschriebene Modellgesetz

$$\kappa = \lambda^2$$

wenn man $1/c = 1$, also Materialgleichheit für Modell und Grossausführung ansetzt.

Setzt man weiterhin voraus, dass das Modell bei bestimmtem Verkleinerungsmasstab λ die gleiche Festigkeit habe, wie die Grossausführung, also $\sigma_m = \sigma_g$ bzw. $\tau_m = \tau_g$, so gilt bei einer Biegebeanspruchung $\sigma = P \cdot l/W_x$ (und entsprechend bei einer Verdrehbeanspruchung $\tau = P \cdot a/W_d$)

$$\frac{P_g \cdot L_g}{W_g} = \frac{P_m \cdot L_m}{W_m}$$

oder

$$W_m = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot W_g \tag{8}$$

Mit Gleichung (4) wird dann das Widerstandsmoment des Modellträgers

$$W_m = \frac{1}{\lambda^3} \cdot W_g \tag{9}$$

Bei einem Verkleinerungsmasstab von 1 : 10 ist dann das Biegewiderstandsmoment des Modellbalkens um 10^{-8} Einheiten kleiner als das der Grossausführung.

Das Modellgesetz besagt, dass bei „ähnlicher" Belastung und „ähnlicher" Verkleinerung der äusseren Masse (Länge, Höhe und Breite eines Bauteiles) um den Faktor λ auch die Wandstärken um den Faktor λ verkleinert werden müssen. So hat ein Winkelprofil, dessen Grossausführung L 50 × 50 × 5 ist, als Modell in 10-facher Verkleinerung die Abmessun- L 5 × 5 × 0,5.

Die nachstehende Tabelle zeigt die Verkleinerungen einiger Trägerquerschnitte bei $\lambda = 10$.

Grossausführung	Verkleinerung $\lambda = 10$
NP ⊏ 10	$W_{xm} = \frac{W_{xg}}{1000},\ W_{ym} \cdot \frac{W_{yg}}{1000};\ \left\lvert\frac{M_d}{\tau_m}\right\rvert = \left\lvert\frac{M_d}{\tau_g}\right\rvert \cdot \frac{1}{1000}$
Rohr 80 × 4,5	8 × 0,45
Rohr 40 × 3,5	4 × 0,35
Flacheisen 50 × 10	5 × 1
1 mm Blech	0,1 mm

Soll das Verhältnis der Kräfte κ nicht gleich λ^2 sein, so ändert sich auch die Wandstärke für jeden Belastungsfall. Hier ist die übliche statische Festigkeitsberechnung des Modells unter Berücksichtigung der jeweiligen Beanspruchung notwendig.

Die oben angeführten Beispiele sind die exakten Folgerungen aus dem Modellgesetz bei statischer Ähnlichkeit. Die in der Luftfahrt, im Schiffbau oder im Turbinenbau gebräuchlichen Modellgesetze (nach Reynolds, Froude usw.) sind auf dynamischer Ähnlichkeit begründet. Bei ihnen werden die Strömungen (Geschwindigkeit, Dichte) in Bezug auf eine ausgezeichnete Länge der zu untersuchenden Körper verglichen.

Die gefühlsmässig geäusserte Ansicht, dass die Wandstärken der Modelle bei „ähnlicher" Verkleinerung zu gross erscheinen, steht im Gegensatz zum Ähnlichkeitsgesetz. Ein Modell wird bei Handbelastung nur in den seltensten Fällen dem Modellgesetz $\kappa = \lambda^2 \cdot c$ entsprechend beansprucht. Man wird nur dann „ähnliche" Beanspruchungen in einer Konstruktion bekommen, wenn man die Kräfte „ähnlich" verkleinert und die Einspannungen und Kraftangriffe beim Modell genau so anlegt, wie sie an der Grossausführung auftreten.

Schrifttum:

[1] *M. Weber:* Ähnlichkeitsmechanik und Modellwissenschaft. In „Hütte" Bd. I, 27. Auflage. Berlin 1941, S. 435 ff.

[2] *M. Weber:* Die Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik und ihre Verwertung bei Modellversuchen. Jahrbuch d. Schiffbautechn. Ges. 1919, S. 355.

[3] *W. Kamm, L. Huber* und *W. Krautter:* Untersuchungen über die Formsteifigkeit eines selbsttragenden Wagenkörpers und eines Fahrzeugrahmens. Kraftfahrtechn. Forsch. Arb., Berlin 1936, Heft 1, S. 11.

Institut für Landtechnische Grundlagenforschung
der Forschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode
Direktor: Prof. Dr. Ing. W. Kloth

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. Walter Bergmann, (20b) Braunschweig, Forschungsanstalt für Landwirtschaft