

Unendlich ausgedehnte Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern unter Zugbelastung

Ein Beitrag zur Spannungsermittlung*)

Von **Dieter Radaj**, Braunschweig-Völkenrode

In der vorliegenden Arbeit zeigt der Verfasser in dem einfachen Beispiel des durch aufgeschweißte Laschen (Pflaster) verstärkten, auf Zug beanspruchten Bleches (unendliche Scheibe), wie auf Grund physikalisch-mathematischer Gesetzmäßigkeiten die Spannungsverteilung über das Bauteil errechnet werden kann und weist die Richtigkeit der Rechnung durch das Experiment mittels Dehnungsmessungen nach. Die rechnerische Lösung ist ein wichtiger Schritt, um die umfangreichen experimentellen Arbeiten der „Forschungsgruppe für Spannung und Konstruktion“ mit der bestehenden und hochentwickelten Theorie der Elastostatik in Beziehung zu bringen. Das ist nicht nur wissenschaftlich reizvoll, sondern ist notwendig, um das umfangreiche experimentell ermittelte Tatsachenmaterial übersehen und mit den Aussagen der Elastostatik vergleichen zu können. Die Trennung der Einflußgrößen — im Experiment nur selten erreicht — ist für die Theorie Voraussetzung. Die Theorie ist bei der Ermittlung der Spannungsverteilung auch deshalb notwendig, weil die experimentelle Dehnungsmessung auf die Oberfläche der Bauteile beschränkt bleibt und ihre Genauigkeit infolge der verwendeten kleinen Meßlängen nicht in allen Fällen ausreichend ist. Es ist das Ziel auch dieser Arbeit, dem Konstrukteur Hilfestellung bei seiner Tätigkeit zu geben.

Die Schriftleitung

Inhalt

	Seite
Einleitung	37
1. Das Spannungsfeld in der unendlich ausgedehnten Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern unter Zugbelastung im Unendlichen (Theorie)	38
1.1 Die Rechteckscheibe unter Randnormalspannungen konstanter Größe	39
1.2 Die Rechteckscheibe unter Randnormalspannungsverteilung parabolischer Form	39
1.3 Die unendlich ausgedehnte Scheibe unter zwei gegenüberliegenden Laststreifen konstanter Größe	44
1.4 Die unendlich ausgedehnte Scheibe unter zwei gegenüberliegenden Laststreifen parabolischer Form	48
1.5 Die unendlich ausgedehnte Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern unter Zugbelastung im Unendlichen	50
1.6 Anwendung der dargestellten Lösungsmethode auf die unendlich ausgedehnte Scheibe mit flankenseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern unter Zugbelastung im Unendlichen	52
2. Das Spannungsfeld in einem breiten Zugstab mit beidseitig angeschlossenen Rechteckpflastern (Experiment)	55
3. Vergleich von errechneten und gemessenen Spannungen	59
4. Das Spannungsfeld in der Umgebung der Anschlußflächen	59
5. Konstruktive Folgerungen im Hinblick auf die Dauerschwingfestigkeit	62
Zusammenfassung — Formelzeichen — Schrifttum	63

Einleitung

Die Kenntnis der in den technischen Baukörpern unter äußeren Lasten sich ausbildenden Spannungsfelder ist entscheidend für die Beurteilung der Dauerschwingbruchgefahr. Dauerschwingbrüche gehen meist von Spannungsspitzen aus, diese müssen daher so niedrig wie möglich gehalten werden. Im Hinblick auf die Dauerschwingbruchgefahr sind nur die von den äußeren Lasten herrührenden Spannungsfelder von Bedeutung, die Eigenspannungsfelder, die von der meist nicht genau bekannten Vorgeschichte des Bauteiles abhängen, können im allgemeinen gegenüber den Lastspannungsfeldern vernachlässigt werden.

Bei der Dauerschwingbelastung schwanken die Lasten bezüglich Größe und Richtung, die Folge sind zeitlich schwankende Spannungsfelder. In vielen Fällen treten die entscheidenden Belastungen mit einer Frequenz auf, die weit unterhalb der Eigenfrequenz einzelner Bauteile der Konstruktion liegt. Die zeitlich veränderliche Last im Betrieb kann dann durch eine ruhende Last in Theorie und Versuch ersetzt werden.

Der Werkstoff reagiert auf die aufgetragenen Beanspruchungen zunächst elastisch, bei hohen Beanspruchungen, also besonders dann, wenn bei der Dimensionierung die Zeitfestigkeit zugrunde gelegt wurde, wird an den Stellen höchster Spannung die Fließgrenze überschritten, der Werkstoff reagiert elastisch-plastisch. Da aber die Fließgebiete das Spannungsfeld anfangs nicht wesentlich ändern, kann bei metallischen Werkstoffen in Theorie und Versuch in erster Näherung linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt werden.

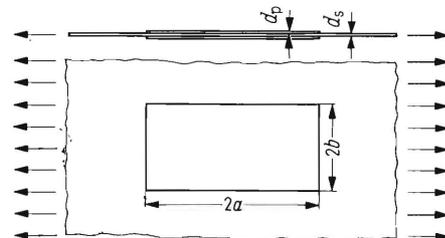


Bild 1. Unendlich ausgedehnte Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern unter Zugbelastung im Unendlichen.

Die vorliegende Arbeit beschreibt das Spannungsfeld in der unendlich ausgedehnten Scheibe konstanter Dicke d_s unter Zugbelastung im Unendlichen und in den beidseitig auf dieser Scheibe stirnseitig, also quer zur Zugrichtung, angeschlossenen Rechtecklaschen unterschiedlichen Abmessungsverhältnisses a/b und unterschiedlicher Dicke d_p , **Bild 1**. Die Dicken von Laschen

*) Von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation (Berichter: Prof. Dr.-Ing. E. Seydel und Prof. Dr.-Ing. W. Thielemann).

Dipl.-Ing. Dieter Radaj ist wissenschaftlicher Mitarbeiter der Forschungsgruppe für Spannung und Konstruktion (Prof. Dr.-Ing. Dr. agr. h. c. W. Kloth) im Institut für landtechnische Grundlagenforschung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode.

und Scheibe sind klein im Verhältnis zur Laschenlänge $2a$, so daß mit Ausnahme eines schmalen Streifens in Umgebung der angeschlossenen Laschenränder ein annähernd ebenes Spannungsfeld vorliegt. In diesem Fall wird auch von einer „Scheibe mit Rechteckpflastern“ gesprochen. Das gesuchte ebene Spannungsfeld in Pflaster und Scheibe wird mit Methoden der Elastizitätstheorie für kleine Verzerrungen und Verschiebungen und linear-elastisches Werkstoffverhalten in Abhängigkeit von den Abmessungsverhältnissen a/b und d_p/d_s näherungsweise bestimmt, wobei Homogenität und Isotropie des Werkstoffes

vorausgesetzt wird. Es wird gezeigt, daß die dargestellte Lösungsmethode auch bei flankenseitig angeschlossenen Rechteckpflastern angewendet werden kann. Die errechneten Spannungsfelder werden mit experimentell ermittelten Spannungsfeldern verglichen. Die Spannungsfelder in Umgebung der angeschlossenen Pflasterränder werden an Hand von eigenen und aus dem Schrifttum bekannten spannungsoptischen Versuchen diskutiert. Die Größe der höchsten Spannungsspitzen am Pflastertrand kann näherungsweise angegeben werden. Konstruktive Folgerungen im Hinblick auf die Dauerschwingfestigkeit werden aufgezeigt.

1. Das Spannungsfeld in der unendlich ausgedehnten Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern unter Zugbelastung im Unendlichen (Theorie)

Wird auf einer Scheibe konstanter Dicke eine kleinere Scheibe ebenfalls konstanter Dicke liegend befestigt und sind Scheiben- und Pflasterdicke klein gegenüber den übrigen Pflasterabmessungen, so daß mit Ausnahme kleiner Bereiche ebene Spannungsfelder vorliegen, dann bezeichnet man diesen Baukörper als Scheibe mit Pflaster. Man spricht je nach der Form des Pflasters von einem linienförmigen, kreisförmigen, elliptischen, rechteckigen Pflaster, je nach Anordnung des Pflasters von einseitigem oder beidseitigem Pflaster und je nach Art der Befestigung des Pflasters von einem Pflaster mit Rand- oder Flächenschluß.

Theoretisch sind bisher behandelt worden: das Spannungsfeld beim Linienpflaster in der unendlich und halboneendlich ausgedehnten Scheibe bei einachsiger Zugbelastung der Scheibe oder bei Belastung des Pflasters durch eine Einzelkraft von Melan [1], Reißner [2], Pflüger [3; 8], Buell [4], Benscoter [5], Koiter [6], Brown [7] und Bufler [9], das Spannungsfeld bei kreisförmigen und elliptischen Einschlüssen in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter einachsiger Zugbelastung von Donnell [10], Hardiman [11; 12] und Kaiser [13] und das Spannungsfeld bei kreisförmigen, elliptischen, rechteckigen und dreieckigen Einschlüssen in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter verschiedenen Belastungsarten von Sawin [14]. Einschlüsse dieser Art wirken sich auf das Spannungsfeld wie am gesamten Rand oder in der ganzen Fläche angeschlossene beidseitige Pflaster aus.

Lösungsansätze für das Spannungsfeld bei beidseitigen Rechteckpflastern mit stirnseitigem Anschluß sind aus dem Schrifttum nicht bekannt.

Im folgenden wird das Spannungsfeld in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter Zugbelastung im Unendlichen und in den beidseitig auf dieser Scheibe stirnseitig angeschlossenen Rechteckpflastern (Bild 1) näherungsweise bestimmt. Da die Dicke von Scheibe und Pflaster im Verhältnis zur Pflasterlänge $2a$ klein ist, liegt mit Ausnahme der Umgebung der angeschlossenen Pflasterränder ein annähernd ebenes Spannungsfeld vor (Prinzip von *de Saint-Venant*). Im Bereich der Pflaster liegen das ebene Spannungsfeld der Scheibe und die ebenen Spannungsfelder der Pflaster übereinander.

Die Näherungslösung geht von der Annahme aus, daß im ganzen Bauteil nur ebene Spannungsfelder vorliegen. Diese Annahme läßt sich durch folgendes Modell veranschaulichen. Je zwei in z -Richtung übereinanderliegende Pflasterstirnflächen sind mit der unendlich ausgedehnten Scheibe durch eine sehr dünne, aber bezüglich Momenten in x - und y -Richtung sehr biegesteife „Anschlußfläche“ miteinander verbunden (Koordinatenbezeichnung nach Bild 2). Über die Verteilung der Spannungen σ_x und τ_{xy} in der Anschlußfläche werden außerdem folgende Annahmen gemacht. Die Spannung σ_x läßt sich als Potenzreihe entwickeln, deren konstantes und quadratisches Glied bei der Näherungsrechnung berücksichtigt wird. Die Spannung τ_{xy} wird vernachlässigt (Bild 2). Diese Annahmen erscheinen auf Grund vorangegangener Spannungsmessungen und nachträglich durchgeführter Kontrollrechnungen gerechtfertigt.

In den Anschlußflächen muß Gleichgewicht zwischen den Schnittkräften herrschen, die am Pflastertrand vorhandenen Spannungen und der in der Scheibe vorhandene Spannungssprung sind also einander entgegengerichtet und zueinander proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor durch das Verhältnis Pflasterdicke zu Scheibendicke eindeutig bestimmt wird. Werden die Bestimmungsgrößen der Parabel nach Bild 2 mit σ_{Bp} , σ_{Cp} , σ_{Bs} und σ_{Cs} bezeichnet, dann gilt:

$$\sigma_{Bs} d_s dy = 2 \sigma_{Bp} d_p dy \quad (1.1)$$

$$\sigma_{Cs} d_s dy = 2 \sigma_{Cp} d_p dy \quad (1.2)$$

Daraus folgt:

$$\sigma_{Bs} = 2 \frac{d_p}{d_s} \sigma_{Bp} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{Cs} = 2 \frac{d_p}{d_s} \sigma_{Cp} \quad (2.2)$$

Die vereinfachende Darstellung der Spannungsverteilung in der Anschlußfläche als Parabel hat zur Folge, daß die geometrischen Zusammenhangsbedingungen für die x -Richtung nur noch in zwei Punkten der Anschlußfläche einer Viertelscheibe (Punkt 1 und 2 in Bild 2), die geometrischen Zusammenhangsbedingungen in y -Richtung nur noch im Mittelpunkt der Anschlußfläche aus Symmetriegründen (Punkt 1 in Bild 2) erfüllt werden.

Bezeichnet u_{1As} die im Punkt 1 (Bild 2) der unendlich ausgedehnten Scheibe durch σ_A verursachte Verschiebung in x -Richtung, u_{1Bs} die im Punkt 1 der unendlich ausgedehnten Scheibe durch die durch σ_{Bs} gekennzeichneten Spannungen ver-

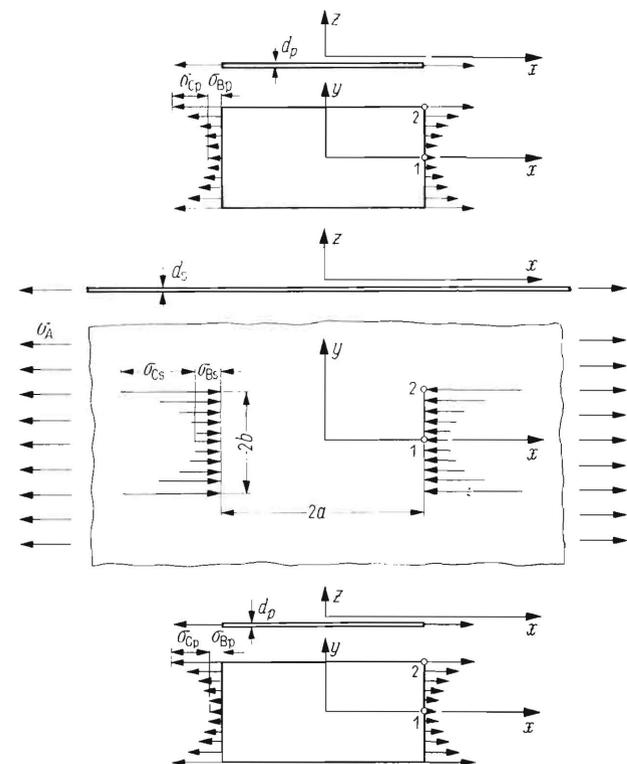


Bild 2. Für die theoretische Behandlung der zugbelasteten Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern angenommene Spannungsverteilung in den Anschlußflächen, dargestellt für $d_p/d_s = 1,0$.

ursache Verschiebung in x -Richtung usw., dann gilt folgendes Additionsgesetz für die Verschiebungen u in den Punkten 1 und 2:

$$u_{1As} - u_{1Bs} - u_{1Cs} = u_{1Bp} + u_{1Cp} \quad (3.1)$$

$$u_{2As} - u_{2Bs} - u_{2Cs} = u_{2Bp} + u_{2Cp} \quad (3.2)$$

Die im folgenden durchgeführte mathematische Behandlung umfaßt also die Ermittlung der Spannungsfelder im Rechteckpflaster unter gleichmäßig und parabolisch verteilten Randnormalspannungen und in der unendlich ausgedehnten Scheibe mit auf zwei Anschlußflächen gleichmäßig und parabolisch verteilten Normalspannungen. Die Ergebnisse dieser Rechnung ermöglichen unter Verwendung der genannten Schnittkraftgleichgewichtsbedingung (2) und der genannten geometrischen Zusammenhangsbedingung (3) die Ermittlung des Spannungsfeldes in der Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen Rechteckpflastern.

1.1 Die Rechteckscheibe unter Randnormalspannungen konstanter Größe

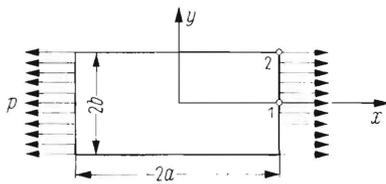


Bild 3. Rechteckscheibe unter Randnormalspannungen konstanter Größe.

Für die Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} und die Verschiebungen u und v ergibt sich:

$$\sigma_x = p \quad (4.1)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (4.2)$$

$$u = \frac{p}{E} x \quad (5.1)$$

$$v = -\frac{p}{mE} y \quad (5.2)$$

1.2 Die Rechteckscheibe unter Randnormalspannungsverteilung parabolischer Form

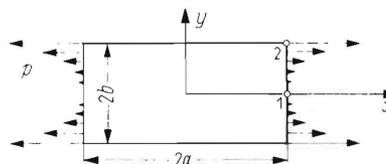


Bild 4. Rechteckscheibe unter Randnormalspannungsverteilung parabolischer Form (Spannungshöchstwert am Randende).

Zur Ermittlung des Spannungsfeldes in Rechteckscheiben bei vorgegebener Randbelastung sind im Schrifttum verschiedene Rechenverfahren vorgeschlagen und angewendet worden.

Unter Verwendung der Methode der komplexen Variablen und der Methode der konformen Abbildung geben folgende Autoren Lösungen für Rechteckscheiben mit vorgegebener Randbelastung an: *Gray* [15] behandelt die von zwei Einzelkräften in gegenüberliegenden Eckpunkten diagonal gezogene quadratische Scheibe. Die größte Hauptspannung in Scheibenmitte wird mit einem möglichen Fehler von maximal 1,5% bestimmt. *Winslow* [16] behandelt die Rechteckscheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 1,0$ und $a/b = 1,99$, die an zwei gegenüberliegenden Rändern mit parabolisch verteilten Randnormalspannungen belastet wird. Die Spannung σ_x in der Mitte des unbelasteten Randes wird mit einem möglichen Fehler von maximal 4% bei der quadratischen Scheibe, von maximal 26% bei der nicht quadratischen Scheibe bestimmt. *Szelagowsky* [17] behandelt die Rechteckscheibe unter Einzelkräften in der Mitte der Ränder. Eine numerische Rechnung wird nicht durchgeführt.

Unter Verwendung der im Lösungsergebnis für die freien Querschwingungen eines beiderseits eingespannten Balkens auf-

tretenden orthogonalen Funktionen geben *Durić* [18] und *Hajdin* [19] eine Lösung für Rechteckscheiben an, die an gegenüberliegenden Rändern mit symmetrisch und antimetrisch verteilten Laststreifen konstanter Größe belastet werden.

Unter Verwendung trigonometrischer Funktionen geben *Kuno* [20], *Okubo* [21; 22] und *Girkmann* [23] Lösungen für die Rechteckscheibe mit beliebiger Randbelastung an. Eine numerische Auswertung dieser Lösungen ist nur in einem Fall bekannt geworden, *Parkus* [24] behandelt aufbauend auf der Lösung von *Girkmann* den wandartigen Träger auf drei Stützen.

Weitere im Schrifttum angegebene Lösungsansätze für Rechteckscheiben mit vorgegebener Randbelastung führen das Spannungsproblem auf ein Minimumproblem zurück, welches sich entweder vom Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials (Prinzip der virtuellen Verrückungen) oder vom Prinzip vom Minimum des konjugierten Gesamtpotentials (Prinzip der virtuellen Kräfte, davon abgeleitet Prinzip von *Castigliano*, Prinzip vom Minimum der Formänderungsarbeit) ableitet. Das Minimumproblem wird dann häufig unter Anwendung des *Ritzschen* oder *Galerkinschen* Verfahrens gelöst.

A. und L. Föppl [25], *Timoshenko* [26; 27], *Goodier* [27; 28], *Conway*, *Chow* und *Morgan* [29], *Guzman* und *Luisoni* [30] und *Kantorovich* und *Krylov* [31] gehen vom Prinzip vom Minimum der Formänderungsarbeit unter Verwendung eines Polynoms als *Airyse* Spannungsfunktion aus, um die Spannungen in Rechteckscheiben unter verschiedenen Randbelastungen zu berechnen. Die Methode ist bei großen Seitenverhältnissen a/b sehr ungenau.

Hamada [32] geht ebenfalls vom Prinzip vom Minimum der Formänderungsarbeit aus, um die Spannungen in Rechteckscheiben bei verschiedenen Randbelastungen zu berechnen, verwendet dabei aber eine Summe trigonometrischer Funktionen als *Airyse* Spannungsfunktion. Die als *Fouriersche* Reihen vorgegebenen Randbedingungen werden als Nebenbedingung bei der Variationsrechnung berücksichtigt.

Wegner [33] gibt eine ebenfalls vom Prinzip vom Minimum der Formänderungsarbeit abgeleitete Methode zur Bestimmung der Spannungssumme ($\sigma_x + \sigma_y$) u. a. in Rechteckscheiben an.

Weber und *Levin* [34] gehen vom Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials aus und verwenden eine Summe biharmonischer trigonometrischer Funktionen als *Airyse* Spannungsfunktion. Unter Verwendung des *Treftzschens* Minimalprinzips werden die Randbedingungen näherungsweise erfüllt. Die Anwendung dieser Methode auf eine Rechteckscheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 3,0$ unter parabolisch verteilten Randnormalspannungen wird in dieser Arbeit besprochen.

Ein weiteres Verfahren zur Berechnung der Spannungen in Rechteckscheiben unter vorgegebenen Randlasten stützt sich auf die Anwendung der Differenzenrechnung und ist angewendet worden von *Bortsch* [35], *Bay* [36; 37], *Beyer* [38], *Habel* [39], *Beer* und *Piscitelli* [40], *Varvak* [41], *Girkmann* [23] und *Conway*, *Chow* und *Morgan* [29]. Zur Erhöhung der Genauigkeit werden bei den Scheibengleichungen auch Glieder höherer Ordnung von *Beer* und *Piscitelli* [40], *Collatz* [42] und *Mudrak* [43] berücksichtigt. *Dubas* [44] schlägt eine andere Art der Differenzenrechnung vor. Schließlich hat die Relaxationsmethode nach *Southwell* [45; 46] und *Fox* [47; 48] die Bedeutung der Differenzenrechnung erhöht.

Weitere Verfahren zur Berechnung der Spannungen in Rechteckscheiben unter vorgegebenen Randlasten finden in Sonderfällen Anwendung. *Bleich* [49] schlägt vor, die über eine *Fourierentwicklung* für einen unendlich langen Streifen mit periodischer Belastung gewonnene Lösung so zu verwenden, daß aus dem Streifen eine Rechteckscheibe herausgeschnitten wird und an den Schnittflächen die dort herrschenden Spannungen durch Überlagerung beseitigt werden. *Hovgaard* [50] erhält durch Probieren Spannungsfunktionen für einen Zugstab mit beiderseits längs angeschlossenerm Rechtecksteg. *Hermite* [51] gibt eine Methode zur Berechnung der Spannungen in Rechteckscheiben an, bei der die Randbedingungen punktweise erfüllt werden.

Es wird an dieser Stelle nicht auf Lösungsansätze für das Spannungsfeld beim elastischen Halbstreifen eingegangen. Eine

Übersicht über derartige Lösungsansätze gibt die Dissertation von *Iyengar* [52]. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß sich die Arbeit von *Fadle* [53] nicht, wie im Titel angegeben, auf die quadratische Scheibe, sondern auf den Halbstreifen bezieht. Ebenso bleiben in dieser Zusammenstellung Lösungen für den unendlich langen Balken, aus denen sich auch Lösungen für Rechteckscheiben unter speziellen Randbelastungen ableiten lassen, unberücksichtigt.

Die Frage, welches Rechenverfahren bei der Ermittlung der Spannungen und Verschiebungen in einer Rechteckscheibe beliebigen Seitenverhältnisses a/b unter parabolischer Randnormalspannungsverteilung angewendet werden soll, wird mit Rücksicht auf die gewünschte Genauigkeit entschieden. Im vorliegenden Fall soll der mögliche Fehler nicht größer als 2% sein.

Die im folgenden angewandte Differenzmethode bietet gegenüber den übrigen Verfahren gewisse Vorteile, weil die Randbedingungen unabhängig vom Seitenverhältnis der Scheibe berücksichtigt und weil Spannungen und Verschiebungen mit der gleichen Methode errechnet werden können. Da beim Differenzenverfahren die Genauigkeit der Rechenergebnisse nicht ohne weiteres bestimmt werden kann, werden die mit dem Differenzenverfahren errechneten Spannungen einzelner Scheibenpunkte mit den nach anderen Methoden erhaltenen Ergebnissen verglichen. Dabei werden die Lösungsansätze von *Timoshenko* [26; 27], *Winslow* [16] und *Weber* und *Levin* [34] verwendet.

Im folgenden werden mittels der Differenzenrechnung die Spannungen und Verschiebungen in Rechteckscheiben mit Seitenverhältnis $a/b = 0,4$, $a/b = 1,0$ und $a/b = 3,0$ unter parabolischer Randnormalspannungsverteilung errechnet. Aus Gründen, die mit der Entstehung dieser Arbeit zusammenhängen, wird von der Rechteckscheibe unter parabolischer Randnormalspannungsverteilung mit Spannungshöchstwert in Randmitte nach **Bild 5** ausgegangen.

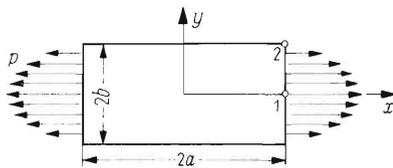


Bild 5. Rechteckscheibe unter Randnormalspannungsverteilung parabolischer Form (Spannungshöchstwert in Randmitte).

Bekanntlich können die Gleichgewichtsbedingungen für das Volumenelement im Falle ebener Spannungsfelder vollständig integriert werden durch die „Airysche Spannungsfunktion F “, indem gesetzt wird:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \tag{6.1}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \tag{6.2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{6.3}$$

Die Spannungsfunktion F muß einer Verträglichkeitsbedingung genügen, die im Falle linear-elastischen Werkstoffverhaltens und kleiner Verzerrungen und Verschiebungen durch die Bipotentialgleichung (7) gekennzeichnet wird:

$$\Delta' \Delta' F \equiv \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \tag{7}$$

Drückt man auch die Randbedingungen durch die Spannungsfunktion F aus, dann gilt bekanntlich, sofern am Scheibenrand nur Spannungen vorgegeben sind:

Am Querschnittsrand kann die Funktion F als das Moment aller auf einen betrachteten Randteil wirkenden Randkräfte, bezogen auf den Endpunkt dieses Randteiles, gedeutet werden.

Am Querschnittsrand kann die Steigung der Funktion F in Richtung der Randnormalen als die in der negativen Tangentenrichtung gemessenen Projektion der Resultierenden aller auf den betrachteten Randteil wirkenden Randkräfte gedeutet werden.

Wird der Scheibenrand ausgehend von einem beliebigen Randpunkt 0 bis zu einem Randpunkt P umfahren, wobei die von 0 bis P zurückgelegte Bogenlänge l sei, und werden die Komponenten der Randspannungen in den Koordinatenrichtungen mit p_x^* und p_y^* bezeichnet, dann lassen sich diese beiden Aussagen in folgende mathematische Form bringen:

$$F_{\text{Rand}} = \int_0^l (x - x_p) p_y^* dl - \int_0^l (y - y_p) p_x^* dl \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{\text{Rand}} = -\frac{\partial y}{\partial l} \int_0^l p_y^* dl - \frac{\partial x}{\partial l} \int_0^l p_x^* dl \tag{9}$$

Für das vorliegende Problem nach Bild 4 ergibt sich sofort, wenn als Punkt 0 der in Bild 5 mit „1“ gekennzeichnete Punkt gewählt wird, am Rand $x = a$:

$$F = \frac{1}{2} p y^2 \left(1 - \frac{y^2}{6 b^2}\right) \tag{10.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{10.2}$$

am Rand $y = b$:

$$F = \frac{5}{12} p b^2 \tag{11.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{3} p b \tag{11.2}$$

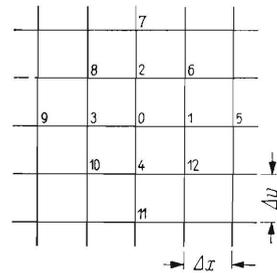


Bild 6. Indizesverteilung nach *Timoshenko* und *Goodier* [27].

Werden die Differentialgleichungen durch Differenzgleichungen ersetzt, die auf ein Rechtecknetz mit den Maschenweiten Δx und Δy angewendet werden, und werden die von *Timoshenko* und *Goodier* [27] eingeführten Indizes nach **Bild 6** verwendet, dann lauten die den Gln. (6) und (7) entsprechenden Gleichungen:

$$\sigma_x = \frac{1}{(\Delta y)^2} (F_2 + F_4 - 2 F_0) \tag{12.1}$$

$$\sigma_y = \frac{1}{(\Delta x)^2} (F_1 + F_3 - 2 F_0) \tag{12.2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{4 \Delta x \Delta y} (F_8 + F_{12} - F_6 - F_{10}) \tag{12.3}$$

$$\frac{1}{\Delta x^4} (6 F_0 - 4 F_1 - 4 F_3 + F_5 + F_9) + \frac{2}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} [4 F_0 - 2 (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) + F_6 + F_8 + F_{10} + F_{12}] + \frac{1}{(\Delta y)^4} (6 F_0 - 4 F_2 - 4 F_4 + F_7 + F_{11}) = 0 \tag{13}$$

Im folgenden wird ein Quadratnetz mit der Maschenweite $\Delta x = \Delta y$ verwendet. Die Gln. (12) und (13) lauten dann:

$$\sigma_x = \frac{1}{(\Delta x)^2} (F_2 + F_4 - 2 F_0) \tag{14.1}$$

$$\sigma_y = \frac{1}{(\Delta x)^2} (F_1 + F_3 - 2 F_0) \tag{14.2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{4 (\Delta x)^2} (F_8 + F_{12} - F_6 - F_{10}) \tag{14.3}$$

$$20 F_0 - 8 (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) + 2 (F_6 + F_8 + F_{10} + F_{12}) + F_5 + F_7 + F_9 + F_{11} = 0 \tag{15}$$

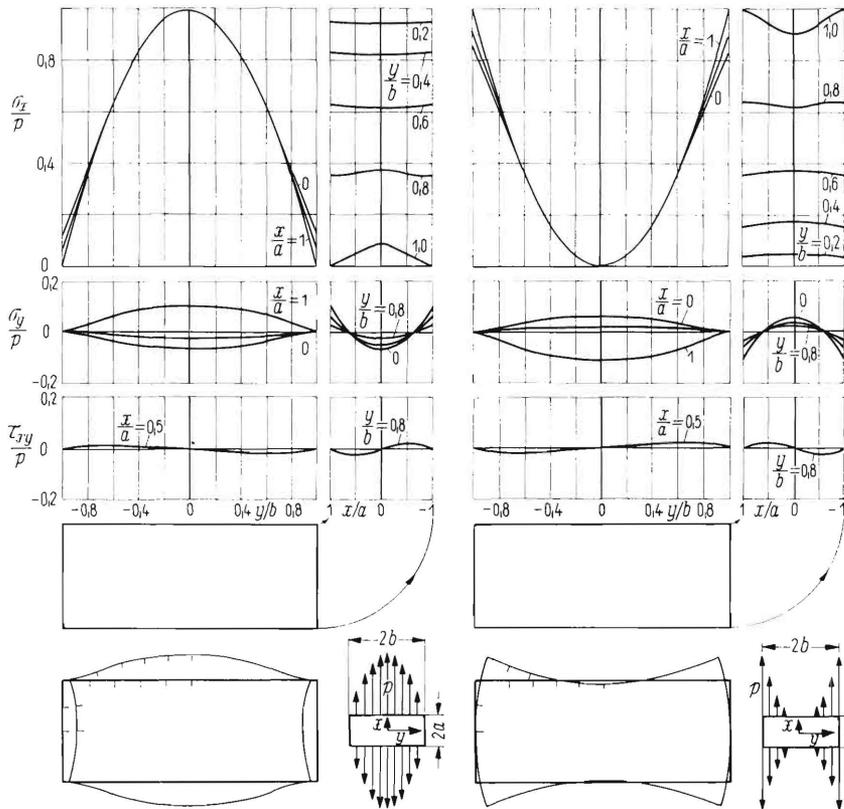


Bild 7. Spannungen und Verschiebungen zweier Rechteckscheiben mit Seitenverhältnis $a/b = 0,4$ unter Randnormalspannungsverteilung parabolischer Form.

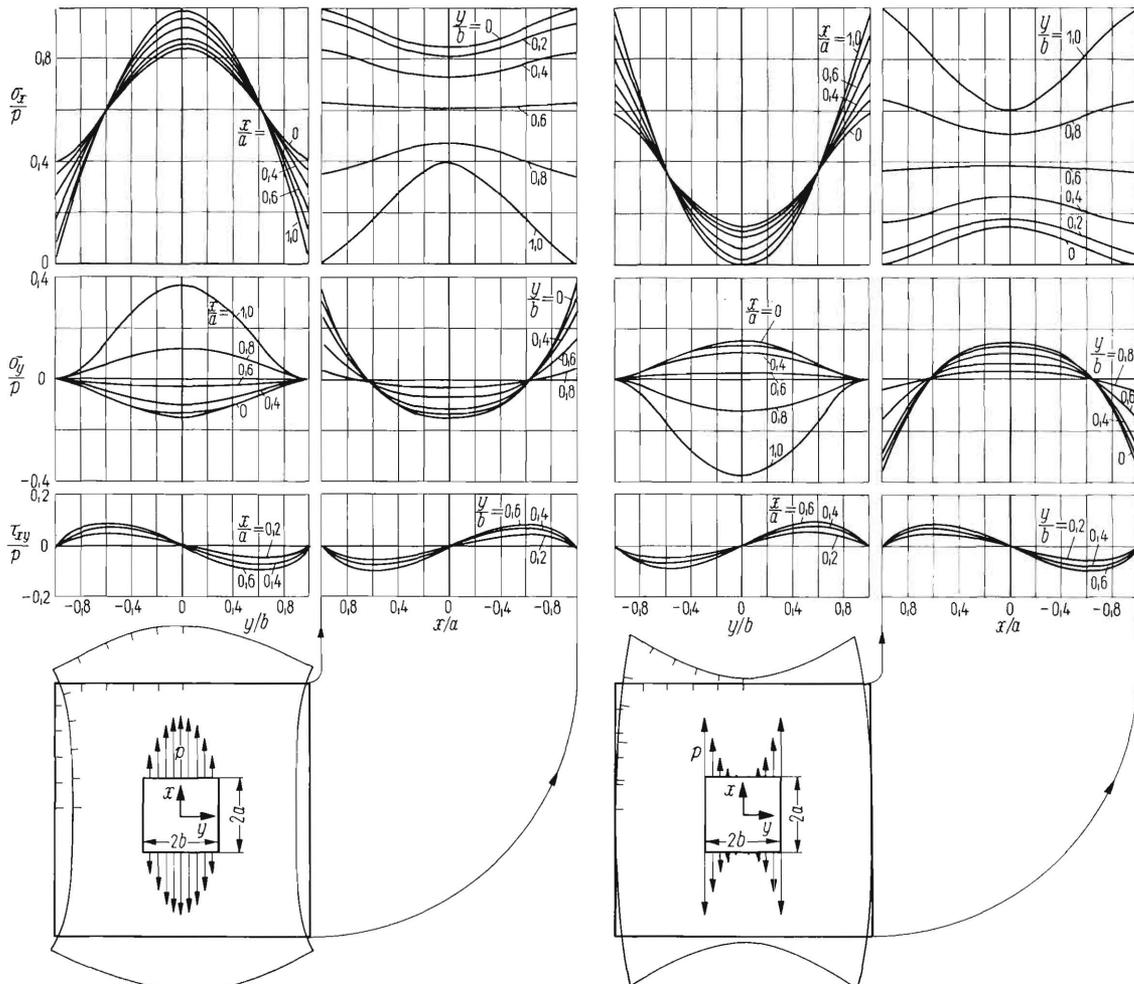


Bild 8. Spannungen und Verschiebungen einer Rechteckscheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 1,0$ unter Randnormalspannungsverteilung parabolischer Form.

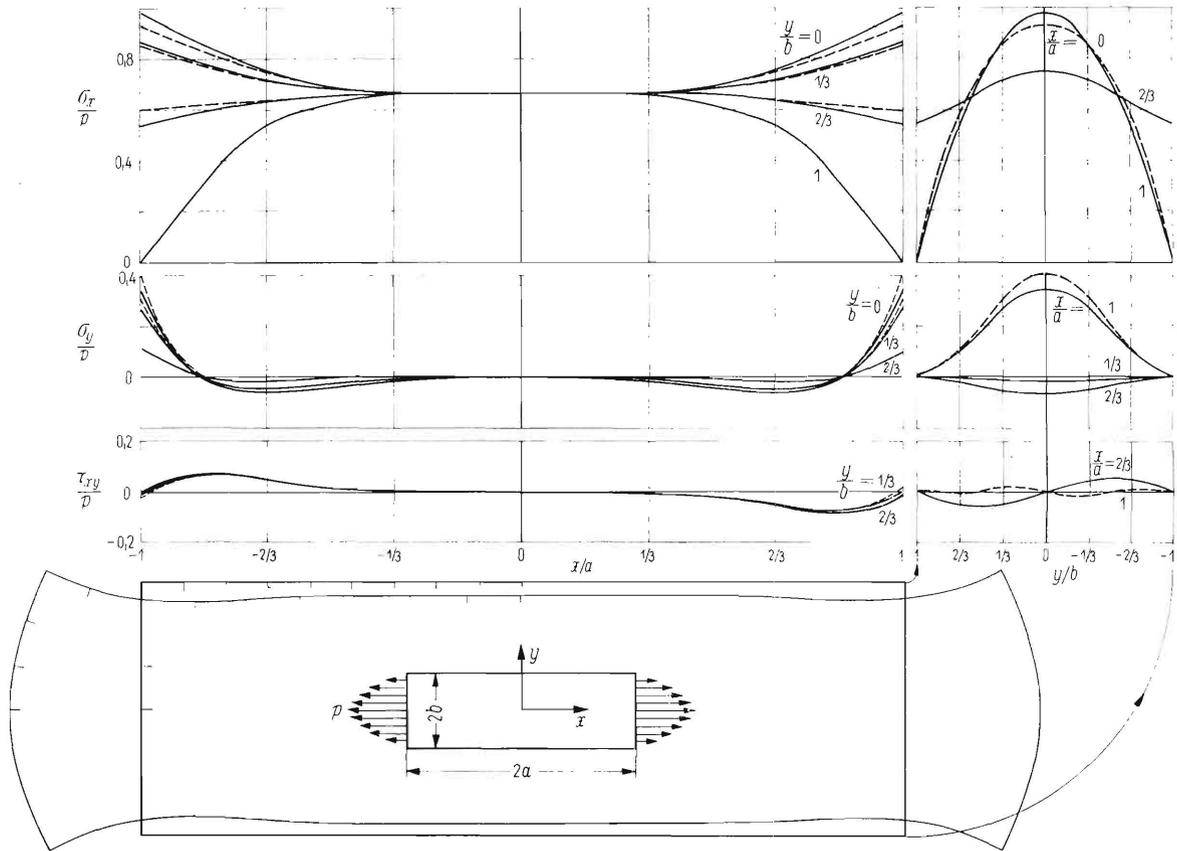


Bild 9. Spannungen und Verschiebungen einer Rechteckscheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 3,0$ unter Randnormalspannungsverteilung parabolischer Form. Die nach der Differenzenmethode errechneten Werte sind ausgezogen dargestellt, die nach *Weber* und *Levin* errechneten Werte sind, soweit sie von ersteren abweichen, gestrichelt dargestellt.

Die am Rande benötigten Werte $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ werden durch folgende Differenzen mit der Indizesverteilung von Bild 6 ersetzt:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \text{ wird ersetzt durch } \frac{1}{2 \Delta x} (F_1 - F_3) \\ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \text{ wird ersetzt durch } \frac{1}{2 \Delta y} (F_2 - F_4) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wird die Gl. (15) für jeden Netzpunkt im Innern der Rechteckscheibe angeschrieben, unter Beachtung der Werte der Funktion F am Rand nach den Gln. (10.1) und (11.1) und der Werte der Funktion F in der außen an den Rand anschließenden Netzreihe nach den Gln. (10.2), (11.2) und (16), dann steht damit ein System linearer Gleichungen zur Verfügung, aus dem alle unbekanntene Werte der Funktion F im Innern der Rechteckscheibe bestimmt werden können. Die Auflösung des Gleichungssystems geschieht im vorliegenden Fall nach dem Gaußschen Algorithmus auf einer elektronischen Rechenmaschine. Für die numerische Rechnung werden bei der Scheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 0,4$ $4 \cdot 10$ Maschen im Scheibeninnern verwendet, bei der Scheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 1$ $10 \cdot 10$ Maschen und bei der Scheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 3$ $18 \cdot 6$ Maschen. Es wird $b = 5 \text{ mm}$ und $p = 1000 \text{ kp/mm}^2$ gewählt. Mit diesen Werten ergibt sich, wenn der zum Punkt $x = n \Delta x$, $y = m \Delta y$ gehörige Wert der Funktion F mit F_{nm} mit der Dimension kp bezeichnet wird, für die Scheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 0,4$:

$F_{00} = 77,236 \ 342 \ 76$	$F_{03} = 4271,125 \ 698 \ 37$
$F_{10} = 48,671 \ 158 \ 46$	$F_{13} = 4256,225 \ 319 \ 80$
$F_{01} = 570,963 \ 872 \ 76$	$F_{04} = 7155,129 \ 005 \ 75$
$F_{11} = 543,604 \ 877 \ 69$	$F_{14} = 7151,077 \ 216 \ 10$
$F_{02} = 2010,297 \ 311 \ 38$	
$F_{12} = 1987,140 \ 570 \ 64$	

für die Scheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 1,0$:

$F_{00} = 1017,188 \ 339 \ 35$	$F_{02} = 2687,751 \ 732 \ 91$	$F_{04} = 7292,366 \ 718 \ 44$
$F_{10} = 951,293 \ 613 \ 78$	$F_{12} = 2639,985 \ 772 \ 91$	$F_{14} = 7282,108 \ 936 \ 31$
$F_{20} = 762,642 \ 595 \ 86$	$F_{22} = 2503,062 \ 536 \ 81$	$F_{24} = 7252,651 \ 885 \ 93$
$F_{30} = 483,203 \ 000 \ 09$	$F_{32} = 2299,824 \ 274 \ 79$	$F_{34} = 7209,333 \ 884 \ 66$
$F_{40} = 183,278 \ 063 \ 55$	$F_{42} = 2081,115 \ 436 \ 98$	$F_{44} = 7165,620 \ 472 \ 92$

$F_{01} = 1441,868 \ 292 \ 39$	$F_{03} = 4675,787 \ 007 \ 01$
$F_{11} = 1380,754 \ 381 \ 79$	$F_{13} = 4646,820 \ 611 \ 26$
$F_{21} = 1205,725 \ 996 \ 33$	$F_{23} = 4563,711 \ 727 \ 39$
$F_{31} = 946,281 \ 982 \ 85$	$F_{33} = 4440,427 \ 915 \ 83$
$F_{41} = 667,492 \ 712 \ 61$	$F_{43} = 4308,783 \ 643 \ 51$

für die Scheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 3,0$:

$F_{00} = 753,328 \ 191 \ 30$	$F_{01} = 1086,198 \ 991 \ 72$	$F_{02} = 2084,815 \ 704 \ 73$
$F_{10} = 752,211 \ 218 \ 90$	$F_{11} = 1085,390 \ 857 \ 00$	$F_{12} = 2084,597 \ 509 \ 41$
$F_{20} = 747,620 \ 639 \ 23$	$F_{21} = 1081,995 \ 570 \ 39$	$F_{22} = 2083,565 \ 332 \ 91$
$F_{30} = 735,435 \ 491 \ 99$	$F_{31} = 1072,767 \ 733 \ 17$	$F_{32} = 2080,429 \ 606 \ 83$
$F_{40} = 707,596 \ 811 \ 01$	$F_{41} = 1051,302 \ 874 \ 27$	$F_{42} = 2072,555 \ 977 \ 63$
$F_{50} = 651,049 \ 281 \ 54$	$F_{51} = 1007,117 \ 572 \ 74$	$F_{52} = 2055,460 \ 715 \ 62$
$F_{60} = 548,514 \ 138 \ 13$	$F_{61} = 926,198 \ 634 \ 52$	$F_{62} = 2022,937 \ 287 \ 71$
$F_{70} = 385,420 \ 167 \ 84$	$F_{71} = 796,646 \ 857 \ 81$	$F_{72} = 1969,729 \ 770 \ 74$
$F_{80} = 172,121 \ 876 \ 22$	$F_{81} = 626,932 \ 780 \ 42$	$F_{82} = 1900,830 \ 948 \ 32$

Aus den Werten der Funktion F lassen sich nach den Gln. (14.1) bis (14.3) die Spannungen errechnen. Die Spannung σ_x am unbelasteten Scheibenrand wird in zwei der Scheibenecke folgenden Netzpunkten korrigiert, um die in diesen Punkten vorhandenen und erkläraren großen Ungenauigkeiten des Differenzenverfahrens auszugleichen.

Aus den Spannungen σ_x und σ_y errechnen sich die Verzerrungen ϵ_x und ϵ_y nach den bekannten Gleichungen:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y \right) \quad (17.1)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_x \right) \quad (17.2)$$

Die Verschiebungen ergeben sich aus den Dehnungen nach folgenden Gleichungen:

$$u = \int \epsilon_x dx + f_1(y) \quad (18.1)$$

$$v = \int \epsilon_y dy + f_2(x) \quad (18.2)$$

Da das vorliegende Scheibenproblem symmetrisch zur x - und y -Achse ist, da also u auf der y -Achse und v auf der x -Achse gleich Null zu setzen sind, gilt:

$$f_1(y) = 0 \quad (19.1)$$

$$f_2(x) = 0 \quad (19.2)$$

$$u = \int_0^x \epsilon_x dx \quad (20.1)$$

$$v = \int_0^y \epsilon_y dy \quad (20.2)$$

Die Verschiebungen u und v lassen sich also unabhängig von τ_{xy} errechnen.

Unter Verwendung der Differenzenrechnung ergibt sich für einen Punkt mit den Koordinaten $x = n \Delta x$ und $y = m \Delta y$:

$$u_{nm} = \left(\frac{1}{2} \epsilon_{x0,m} + \epsilon_{x1,m} + \dots + \epsilon_{x_{n-1},m} + \frac{1}{2} \epsilon_{x_{n,m}} \right) \Delta x \quad (21.1)$$

$$v_{nm} = \left(\frac{1}{2} \epsilon_{y_{n,0}} + \epsilon_{y_{n,1}} + \dots + \epsilon_{y_{n,m-1}} + \frac{1}{2} \epsilon_{y_{n,m}} \right) \Delta y \quad (21.2)$$

In den **Bildern 7 bis 9** sind die nach der Differenzenmethode errechneten Spannungen und Verschiebungen für die Seitenverhältnisse $a/b = 0,4$, $a/b = 1,0$ und $a/b = 3,0$ dargestellt. Die Ungleichmäßigkeit der Randspannungen σ_x gleicht sich mit der Entfernung vom Rand aus. Es treten Spannungen σ_y von merklicher Größe auf, deren Vorzeichen am belasteten Rand von der Lage der größten Spannung p an diesem Rand abhängt. Die dargestellten Verschiebungen des Scheibenrandes werden errechnet für $p = 10^5 \text{ kp/mm}^2$, $d_p = 1 \text{ mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kp/mm}^2$ und $1/m = 0,3$.

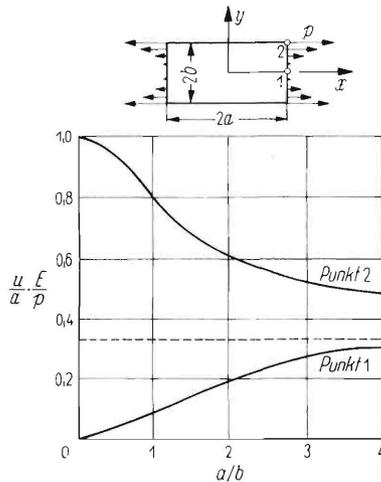


Bild 10. Bezogene Verschiebung u von Scheibenecke und Scheibenrandmitte in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis bei einer Rechteckscheibe unter Randnormalspannungsverteilung parabolischer Form.

In **Bild 10** ist die nach Gl. (21.1) errechnete bezogene Verschiebung u der Scheibenecke und der Scheibenrandmitte in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis a/b der Scheibe dargestellt. Beide Kurven nähern sich bei großen Seitenverhältnissen dem Wert $1/3$.

Die nach der Differenzenmethode errechneten Spannungen können in einzelnen Fällen mit den nach anderen Methoden errechneten Spannungen verglichen werden. Die Rechteckscheibe unter parabolisch verteilten Randnormalspannungen wird von *Timoshenko* [26; 27], *Winslow* [16], *Weber* und *Levin* [34] und *Kantorovich* und *Krylov* [31] behandelt.

Winslow behandelt mit der Methode der komplexen Veränderlichen und der konformen Abbildung die Rechteckscheiben mit Seitenverhältnis $a/b = 1,0$ und $a/b = 1,99$. Die numerische Rechnung wird durchgeführt für die Spannungen σ_x und σ_y im Schnitt $x = 0$ bei der Scheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 1,0$ und für die Spannung σ_x im Schnitt $x = 0$ bei der Scheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 1,99$. Die Größe des maximal möglichen Fehlers wird für die Spannung σ_x im Punkt $(x = 0, y = b)$ angegeben.

Timoshenko behandelt ausgehend vom Prinzip vom Minimum der Formänderungsarbeit mit der *Ritzschen* Methode die Rechteckscheiben mit Seitenverhältnis $a/b = 1,0$ und $a/b = 2,0$. Die numerische Rechnung wird für die Spannungen σ_x im Schnitt $x = 0$ durchgeführt.

Kantorovich und *Krylov* gehen von dem Ansatz nach *Timoshenko* aus, wenden dann aber die Methode von *Galerkin* an.

Weber und *Levin* behandeln mit der *Ritzschen* Methode unter Anwendung des *Trefftzchen* Minimalprinzips die mit Einzelkräften belastete Rechteckplatte und gehen dabei von der Lösung für die mit parabolisch verteilten Randnormalspannungen belasteten Rechteckscheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 3,0$ aus.

Im folgenden werden die von *Timoshenko* und *Winslow* errechneten Spannungen in der quadratischen Scheibe mit den nach der Differenzenmethode errechneten Spannungen in der quadratischen Scheibe verglichen. Der Lösungsansatz von *Weber* und *Levin* wird für die Rechteckscheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 3,0$ numerisch ausgewertet. Die nach *Weber* und *Levin* berechneten Spannungen werden ebenfalls mit den nach der Differenzenmethode berechneten Spannungen verglichen.

In der nachfolgenden Tafel werden die nach der Differenzenmethode errechneten Spannungen σ_x und σ_y im Schnitt $x = 0$ der quadratischen Scheibe (Zeile I) mit den von *Winslow* (Zeile II) und *Timoshenko* (Zeile III) errechneten Werten verglichen. Die in der Tafel aufgeführten Werte stimmen weitgehend überein.

y/b	0,0	0,216	0,430	0,639	0,833	1,0
σ_x I	0,8494	0,8212	0,7421	0,6386	0,5077	0,4181
σ_x II	0,859	0,824	0,728	0,598	0,479	$\approx 0,400$
σ_x III	0,862	0,826	0,726	0,595	0,479	$\approx 0,425$
σ_y I	-0,1318	-0,1222	-0,0956	-0,0580	-0,0206	-0,0
σ_y II	-0,141	-0,129	-0,096	-0,052	-0,014	-0,0
σ_y III	-0,138	-0,128	-0,097	-0,055	-0,016	-0,0

Der numerischen Auswertung des Lösungsansatzes von *Weber* und *Levin* wird eine Zusammenfassung der *Weber-Levinschen* Methode vorangestellt, da die Arbeit [34] bisher nicht veröffentlicht wurde.

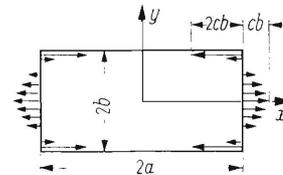


Bild 11. Das Scheibenproblem der Diplomarbeit von *Levin* [34].

Das Plattenproblem der genannten Arbeit wird auf das in **Bild 11** dargestellte Scheibenproblem zurückgeführt. Die Randbedingungen lauten:

$$y = \pm b: \quad \sigma_y = 0 \quad (22.1)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (22.2)$$

$$x = \pm a: \quad \sigma_x = -c [3y^2 - b^2]/b \quad (23.1)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (23.2)$$

Unter Beachtung der Gln. (8) und (9) kann für die Spannungsfunktion an den spannungsfreien Rändern gesetzt werden:

$$y = \pm b: \quad F = 0 \quad (24.1)$$

$$\partial F / \partial y = 0 \quad (24.2)$$

Die Behandlung des Problems soll mit Hilfe von Exponentialfunktionen geschehen, um die schon vorhandene Tabellierung dieser Funktionen auszunützen.

$$F_n = f_n(y) \cdot \cos \gamma_n x; \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (25)$$

$f_n(y)$ muß so gewählt werden, daß F_n die Bipotentialgleichung erfüllt. Hier werden folgende biharmonische Kreisfunktionen verwendet:

$$\varphi_{n1} = \cos \gamma_n y \cos \gamma_n x \quad (26.1)$$

$$\varphi_{n2} = \sin \gamma_n y \cos \gamma_n x \quad (26.2)$$

Daraus folgt:

$$F_n = (a_n \cos \gamma_n y + b_n \gamma_n y \sin \gamma_n y) \cos \gamma_n x \quad (27)$$

Dieser Ansatz unterscheidet sich von einem *Fourier*-Ansatz darin wesentlich, daß bei laufendem n die Periodenlängen nicht mehr ganzzahlige Vielfache der Intervalllänge sind (hier: $\cos \gamma_n y$, *Fourier*: $\cos n \pi y / 2b$).

Um dem später verwendeten Minimalprinzip die einfachste Form zu geben, wird gesetzt:

$$b_n = \frac{1}{2 \gamma_n^2} \quad (28)$$

Die Randbedingungen (24.1) und (24.2) liefern die beiden Bestimmungsgleichungen für a_n/b_n und γ_n .

$$\frac{a_n}{b_n} = - \frac{\gamma_n b \sin \gamma_n b}{\cos \gamma_n b} \quad (29.1)$$

$$\sin 2 \gamma_n b = -2 \gamma_n b \quad (29.2)$$

Unter Beachtung der Bedingung $\gamma_n \neq 0$ ergeben sich aus den Gln. (29.1) und (29.2) γ_n und a_n/b_n als komplexe Zahlen:

$$\gamma_1 b = \epsilon_1 + i \delta_1 = 2,106 20 + i \cdot 1,125 37$$

$$\gamma_2 b = \epsilon_2 + i \delta_2 = 5,356 24 + i \cdot 1,551 42$$

$$a_1/b_1 = \alpha_1 + i \beta_1 = 1,650 61 - i \cdot 2,059 98$$

$$a_2/b_2 = \alpha_2 + i \beta_2 = 2,057 69 - i \cdot 5,332 99$$

Die zugehörigen Spannungsfunktionen werden ebenfalls komplex und müssen nach Gl. (30) in Real- und Imaginärteil aufgespalten werden, um dem physikalischen Problem gerecht zu werden.

$$F_n = F_{n1} + i F_{n2} \quad (30)$$

Diese Spannungsfunktionen erfüllen alle die Randbedingungen an den lastfreien Rändern, aber nicht die Randbedingungen an den belasteten Rändern. Hier treten zunächst Normal- und Schubspannungen beliebiger Größe auf, je nach Wahl der noch freien Koeffizienten. Bei Verwendung von 2 Spannungsfunktionen ergeben sich als „zweite“ Näherung die Gln. (31.1) bis (31.4). Die beiden Sterne der Spannungskoeffizienten deuten die zweite Näherung an.

$$F^{**} = d_{11}^{**} F_{11} + d_{12}^{**} F_{12} + d_{21}^{**} F_{21} + d_{22}^{**} F_{22} \quad (31.1)$$

$$\sigma_x^{**} = d_{11}^{**} \sigma_{x11} + d_{12}^{**} \sigma_{x12} + d_{21}^{**} \sigma_{x21} + d_{22}^{**} \sigma_{x22} \quad (31.2)$$

$$\sigma_y^{**} = d_{11}^{**} \sigma_{y11} + d_{12}^{**} \sigma_{y12} + d_{21}^{**} \sigma_{y21} + d_{22}^{**} \sigma_{y22} \quad (31.3)$$

$$\tau_{xy}^{**} = d_{11}^{**} \tau_{xy11} + d_{12}^{**} \tau_{xy12} + d_{21}^{**} \tau_{xy21} + d_{22}^{**} \tau_{xy22} \quad (31.4)$$

Die gewünschte Spannungsverteilung wird dadurch erreicht, daß unter Anwendung des *Treffitzschen* Minimalprinzips die beiden Randbedingungen an den belasteten Rändern gleichzeitig möglichst gut erfüllt werden. Ist F_w die wahre vorgegebene Spannungsfunktion am Rand, dann lautet das *Treffitzsche* Minimalprinzip:

$$\int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} (\Delta' F)^2 dx dy - 2 \int_{-b}^{+b} \left(\Delta' F \frac{\partial F_w}{\partial x} - \frac{\partial \Delta' F}{\partial x} F_w \right) \Big|_{-a}^{+a} dy \rightarrow \text{Min.} \quad (32)$$

Für ein Seitenverhältnis der Scheibe $a/b = 3,0$ ergibt sich:

$$d_{11}^{**} = -13,090\ 35 \cdot 10^{-4} c b^2$$

$$d_{12}^{**} = -5,168\ 04 \cdot 10^{-4} c b^2$$

$$d_{21}^{**} = -0,227\ 25 \cdot 10^{-8} c b^2$$

$$d_{22}^{**} = -0,295\ 02 \cdot 10^{-8} c b^2$$

Mit den bekannten Werten a_n/b_n , γ_n , d_{n1}^{**} und d_{n2}^{**} können die Spannungen durch Differentiation der Spannungsfunktion (27) berechnet werden:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= d_{11}^{**} \sigma_{x11} + d_{12}^{**} \sigma_{x12} + d_{21}^{**} \sigma_{x21} + d_{22}^{**} \sigma_{x22} \\ \sigma_{xn1} &= A_1 \cos \frac{x}{b} \varepsilon_n \cos \frac{x}{b} \delta_n - B_1 \sin \frac{x}{b} \varepsilon_n \sin \frac{x}{b} \delta_n \\ \sigma_{xn2} &= B_1 \cos \frac{x}{b} \varepsilon_n \cos \frac{x}{b} \delta_n + A_1 \sin \frac{x}{b} \varepsilon_n \sin \frac{x}{b} \delta_n \\ A_1 &= \left(1 - \frac{1}{2} a_n\right) \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n - \frac{1}{2} \beta_n \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n + \frac{1}{2} \frac{y}{b} \delta_n \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n \\ B_1 &= -\frac{1}{2} \beta_n \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n - \left(1 - \frac{1}{2} a_n\right) \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{y}{b} \delta_n \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n - \frac{1}{2} \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n \end{aligned} \right\} (33.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= d_{11}^{**} \sigma_{y11} + d_{12}^{**} \sigma_{y12} + d_{21}^{**} \sigma_{y21} + d_{22}^{**} \sigma_{y22} \\ \sigma_{yn1} &= A_2 \cos \frac{x}{b} \varepsilon_n \cos \frac{x}{b} \delta_n - B_2 \sin \frac{x}{b} \varepsilon_n \sin \frac{x}{b} \delta_n \\ \sigma_{yn2} &= B_2 \cos \frac{x}{b} \varepsilon_n \cos \frac{x}{b} \delta_n + A_2 \sin \frac{x}{b} \varepsilon_n \sin \frac{x}{b} \delta_n \\ A_2 &= \frac{1}{2} a_n \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n + \frac{1}{2} \beta_n \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n - \frac{1}{2} \frac{y}{b} \delta_n \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n \\ B_2 &= \frac{1}{2} \beta_n \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n - \frac{1}{2} a_n \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{y}{b} \delta_n \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n + \frac{1}{2} \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n \end{aligned} \right\} (33.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= d_{11}^{**} \tau_{xy11} + d_{12}^{**} \tau_{xy12} + d_{21}^{**} \tau_{xy21} + d_{22}^{**} \tau_{xy22} \\ \tau_{xyn1} &= A_3 \sin \frac{x}{b} \varepsilon_n \cos \frac{x}{b} \delta_n - B_3 \cos \frac{x}{b} \varepsilon_n \sin \frac{x}{b} \delta_n \\ \tau_{xyn2} &= B_3 \sin \frac{x}{b} \varepsilon_n \cos \frac{x}{b} \delta_n + A_3 \cos \frac{x}{b} \varepsilon_n \sin \frac{x}{b} \delta_n \\ A_3 &= -\frac{1}{2} (1 - a_n) \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n - \frac{1}{2} \beta_n \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n - \frac{1}{2} \frac{y}{b} \delta_n \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n \\ B_3 &= -\frac{1}{2} (1 - a_n) \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n + \frac{1}{2} \beta_n \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \varepsilon_n \sin \frac{y}{b} \delta_n - \frac{1}{2} \frac{y}{b} \delta_n \cos \frac{y}{b} \varepsilon_n \cos \frac{y}{b} \delta_n \end{aligned} \right\} (33.3)$$

Die nach den Gln. (33.1) und (33.2) errechneten Spannungen sind gestrichelt in Bild 9 dargestellt, soweit sie von den nach der Differenzenmethode errechneten abweichen. Dabei ist der Spannung σ_x nach Gl. (33.1) die konstante Spannung $2 c b$ hinzugefügt worden, um Übereinstimmung mit der Randbelastung bei der entsprechenden, nach der Differenzenmethode behandelten Scheibe zu erhalten. Die Übereinstimmung der nach *Weber* und *Levin* und der nach der Differenzenmethode errechneten Spannungswerte ist gut.

1.3 Die unendlich ausgedehnte Scheibe unter zwei gegenüberliegenden Laststreifen konstanter Größe

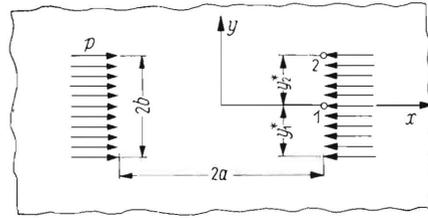


Bild 12.

Die mathematischen Ausdrücke für die Spannungen in der durch eine Einzelkraft belasteten unendlich ausgedehnten Scheibe werden von *Love* [54] angegeben. Mit der Bezeichnungswiese von **Bild 13** gilt:

$$\sigma_r = \frac{3m+1}{4m} \frac{P}{\pi} \frac{\cos \alpha}{r} = \frac{3m+1}{4m} \frac{P}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (34.1)$$

$$\sigma_t = -\frac{m-1}{4m} \frac{P}{\pi} \frac{\cos \alpha}{r} = -\frac{m-1}{4m} \frac{P}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (34.2)$$

$$\tau_{rt} = -\frac{m-1}{4m} \frac{P}{\pi} \frac{\sin \alpha}{r} = -\frac{m-1}{4m} \frac{P}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (34.3)$$

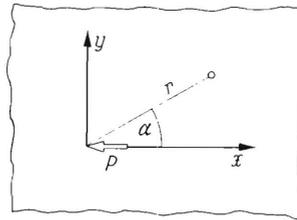


Bild 13. Einzelkraft in der unendlich ausgedehnten Scheibe.

Aus den Gln. (34) ergibt sich durch Umformen:

$$\sigma_x = \frac{m-1}{4m} \frac{P}{\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left(\frac{3m+1}{m-1} x^3 + x y^2 \right) \quad (35.1)$$

$$\sigma_y = \frac{m-1}{4m} \frac{P}{\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left(\frac{3m+1}{m-1} x y^2 - x^3 - 2 x y^2 \right) \quad (35.2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{m-1}{4m} \frac{P}{\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left(\frac{3m+1}{m-1} x^2 y + y^3 \right) \quad (35.3)$$

Tritt an Stelle der Einzellast ein Laststreifen in Richtung der y' -Achse nach **Bild 14**, dann überlagern sich in jedem Punkt der Scheibe die durch die in unterschiedlicher Entfernung vom betrachteten Scheibenpunkt befindlichen Lastdifferenziale dP verursachten Spannungsdifferenziale $d\sigma_x$, $d\sigma_y$ und $d\tau_{xy}$ zur Gesamtspannung σ_x , σ_y und τ_{xy} . Dies läßt sich mit der Bezeichnungswiese von Bild 14 mathematisch ausdrücken. Es gilt:

$$y = y' - y^* \quad (36)$$

$$dP = p(y^*) dy^* \quad (37)$$

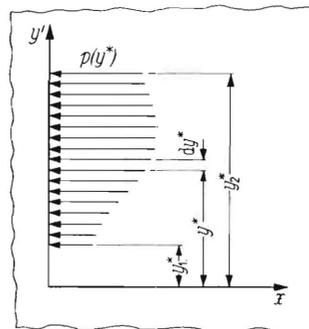


Bild 14. Laststreifen in Richtung der y' -Achse in der unendlich ausgedehnten Scheibe.

Aus den Gln. (35) bis (37) folgt:

$$d\sigma_x = \frac{m-1}{4\pi m} \frac{p(y^*) dy^*}{[x^2 + (y' - y^*)^2]^2} \left[\frac{3m+1}{m-1} x^3 + x(y' - y^*)^2 \right] \quad (38.1)$$

$$d\sigma_y = \frac{m-1}{4\pi m} \frac{p(y^*) dy^*}{[x^2 + (y' - y^*)^2]^2} \left[-x^3 + \left(\frac{3m+1}{m-1} - 2 \right) x (y' - y^*)^2 \right] \quad (38.2)$$

$$d\tau_{xy} = \frac{m-1}{4\pi m} \frac{p(y^*) dy^*}{[x^2 + (y' - y^*)^2]^2} \left[(y' - y^*)^3 + \frac{3m+1}{m-1} x^2 (y' - y^*) \right] \quad (38.3)$$

Für den Laststreifen konstanter Größe gilt:

$$p(y^*) = p \quad (39)$$

Aus (38) und (39) folgt, wenn statt y' nur y geschrieben wird:

$$\sigma_x = \frac{m-1}{4\pi m} p \int_{y_1^*}^{y_2^*} \frac{\frac{3m+1}{m-1} x^3 + x (y - y^*)^2}{[x^2 + (y - y^*)^2]^2} dy^* \quad (40.1)$$

$$\sigma_y = \frac{m-1}{4\pi m} p \int_{y_1^*}^{y_2^*} \frac{\left(\frac{3m+1}{m-1} - 2 \right) x (y - y^*)^2 - x^3}{[x^2 + (y - y^*)^2]^2} dy^* \quad (40.2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{m-1}{4\pi m} p \int_{y_1^*}^{y_2^*} \frac{\frac{3m+1}{m-1} x^2 (y - y^*) + (y - y^*)^3}{[x^2 + (y - y^*)^2]^2} dy^* \quad (40.3)$$

Zur Integration wird gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} t &= y - y^* \\ y^* &= y - t \\ dy^* &= -dt \\ t_1 &= y - y_1^* \\ t_2 &= y - y_2^* \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Aus (40) und (41) folgt:

$$\sigma_x = -p \frac{m-1}{4\pi m} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{3m+1}{m-1} x^3 + x t^2}{(x^2 + t^2)^2} dt \quad (42.1)$$

$$\sigma_y = -p \frac{m-1}{4\pi m} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left(\frac{3m+1}{m-1} - 2 \right) x t^2 - x^3}{(x^2 + t^2)^2} dt \quad (42.2)$$

$$\tau_{xy} = -p \frac{m-1}{4\pi m} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{3m+1}{m-1} x^2 t + t^3}{(x^2 + t^2)^2} dt \quad (42.3)$$

Das Endergebnis der Integration lautet:

(Gleichungen siehe nächste Seite)

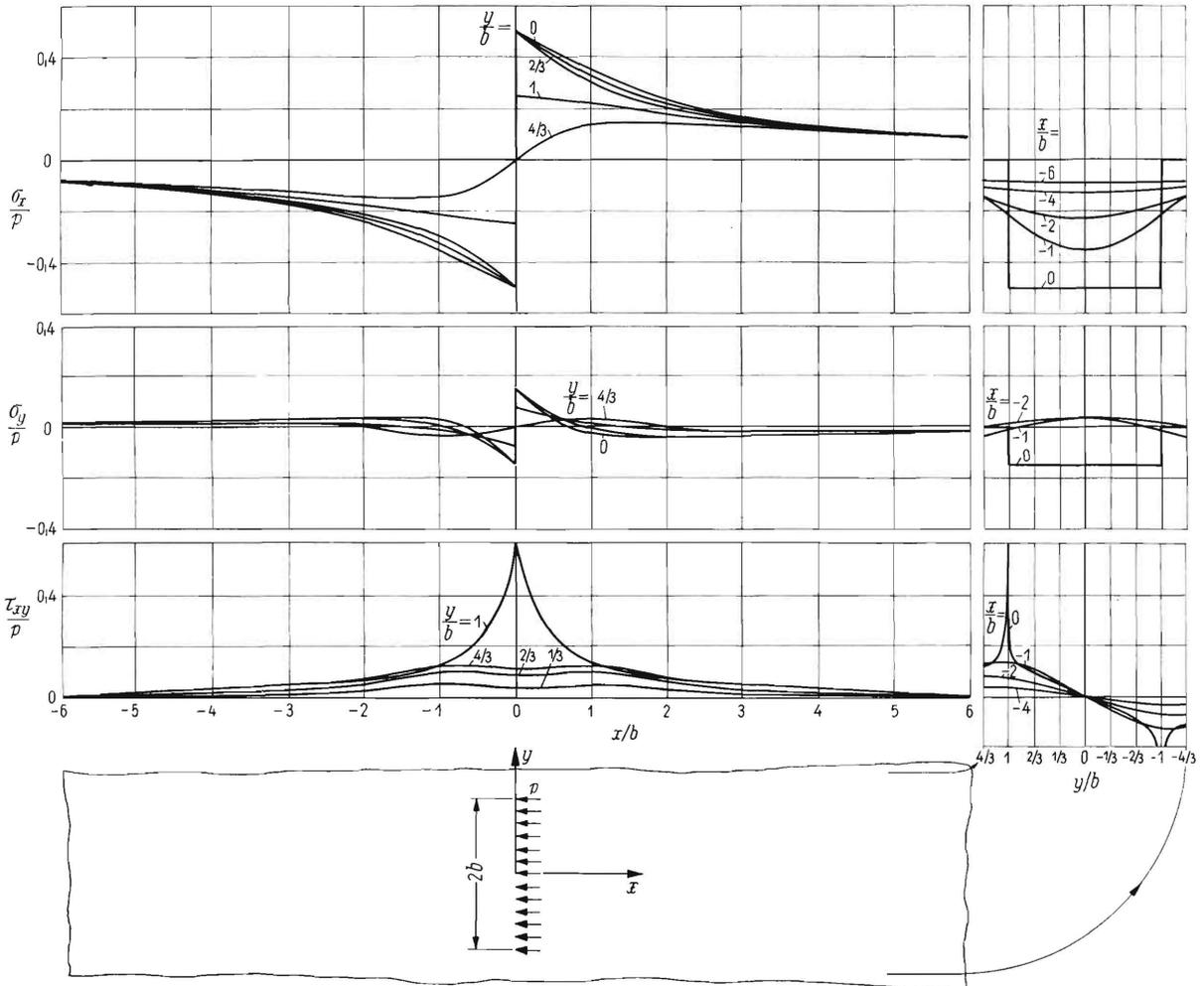


Bild 15. Spannungen in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter einem Laststreifen konstanter Größe.

$$\sigma_x = -\frac{p}{4\pi} \left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right) x \left[\frac{y - y_2^*}{x^2 + (y - y_2^*)^2} - \frac{y - y_1^*}{x^2 + (y - y_1^*)^2} \right] + 2 \left[\arctg \frac{y - y_2^*}{x} - \arctg \frac{y - y_1^*}{x} \right] \right\} \quad (43.1)$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{4\pi} \left\{ -\left(1 + \frac{1}{m}\right) x \left[\frac{y - y_2^*}{x^2 + (y - y_2^*)^2} - \frac{y - y_1^*}{x^2 + (y - y_1^*)^2} \right] + \frac{2}{m} \left[\arctg \frac{y - y_2^*}{x} - \arctg \frac{y - y_1^*}{x} \right] \right\} \quad (43.2)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{p}{8\pi} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left[\frac{(y - y_2^*)^2}{x^2 + (y - y_2^*)^2} - \frac{(y - y_1^*)^2}{x^2 + (y - y_1^*)^2} \right] + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left[\frac{(y - y_2^*)^4}{x^2 [x^2 + (y - y_2^*)^2]} - \frac{(y - y_1^*)^4}{x^2 [x^2 + (y - y_1^*)^2]} \right] + \frac{(y - y_1^*)^2}{x^2} - \frac{(y - y_2^*)^2}{x^2} + \ln [x^2 + (y - y_2^*)^2] - \ln [x^2 + (y - y_1^*)^2] \right\} \quad (43.3)$$

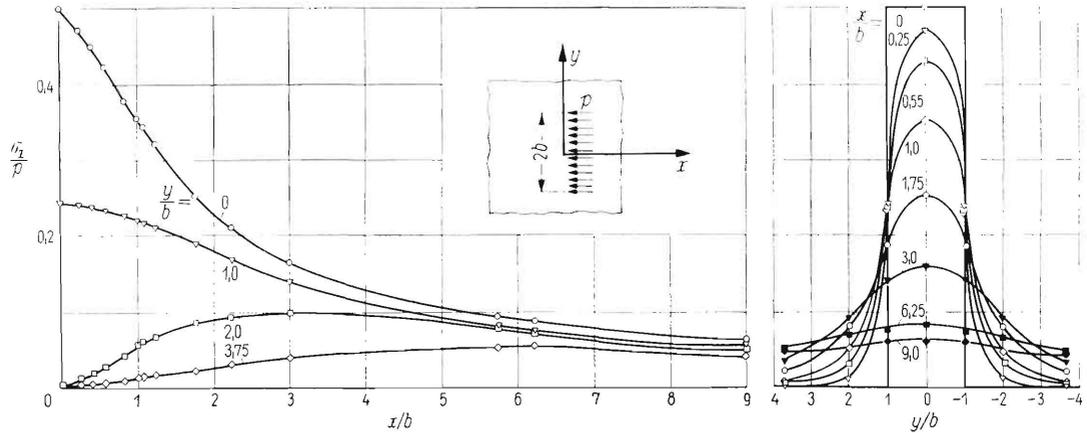


Bild 16. Spannung σ_x in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter einem Laststreifen konstanter GröÙe. Die Punkte sind mit Rücksicht auf die experimentelle Nachprüfung gewählt.

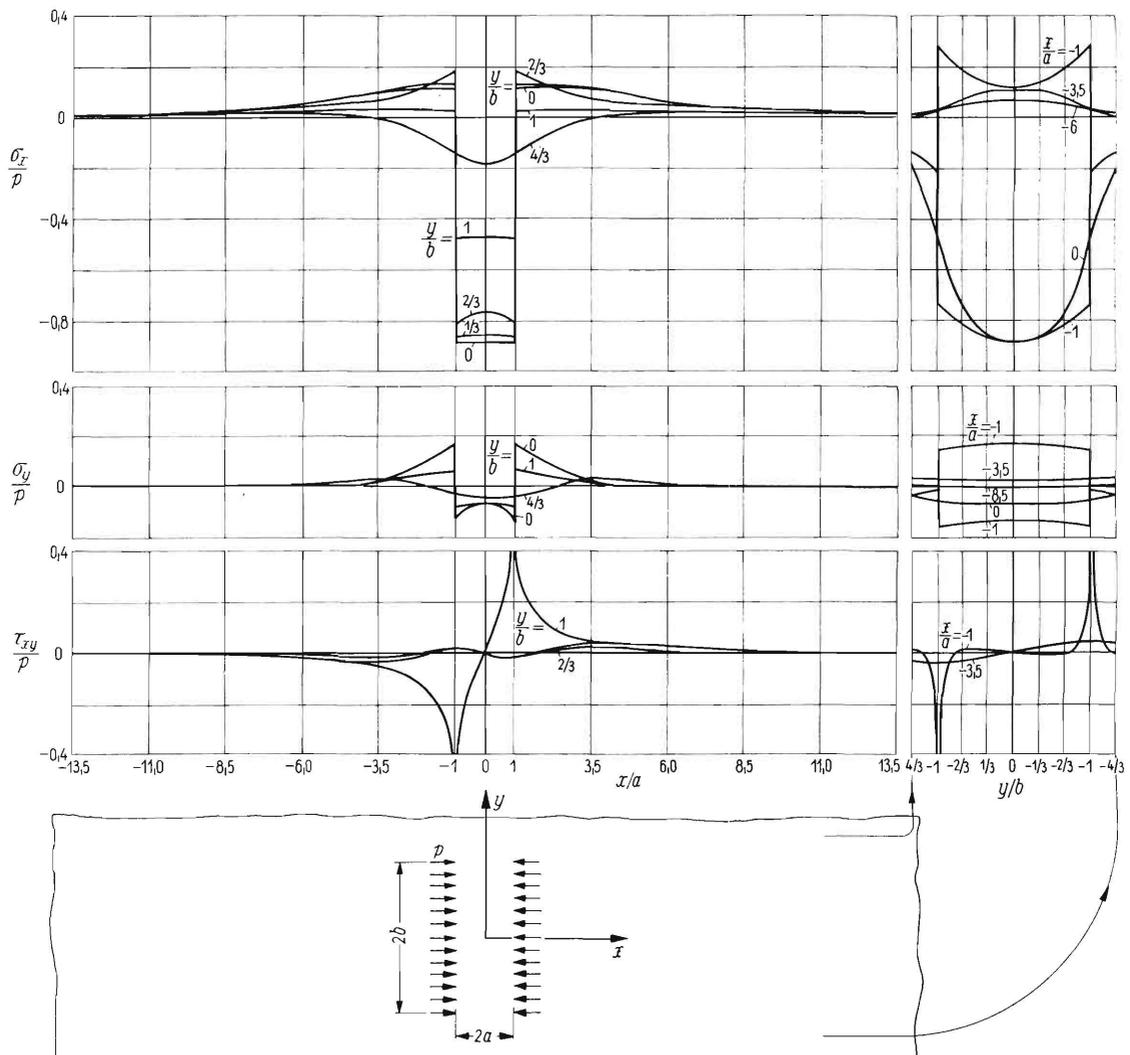


Bild 17. Spannungen in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter zwei gegenüberliegenden Laststreifen konstanter GröÙe (Verhältnis Streifenabstand zu Streifenlänge $a/b = 0,4$).

Die nach Gl. (43.1) errechneten Spannungen σ_x sind in den **Bildern 15 und 16** dargestellt. Die Last verteilt sich als Spannung σ_x je zur Hälfte auf die rechte (Zug) und linke (Druck) Scheibenhälfte. Mit der Entfernung vom Laststreifen verteilen sich diese Spannungen immer gleichmäßiger. Die Höchstspannung tritt immer in einer Linie senkrecht zur Laststreifenmitte auf. Quer zu den Spannungen σ_x treten Spannungen σ_y auf, die unmittelbar vor und hinter dem Laststreifen $1/m$ mal so groß wie die Spannungen σ_x sind. Die Schubspannungen τ_{xy} nehmen an den Laststreifenenden unendlich hohe Werte an, verursacht durch die besondere Unstetigkeit der Spannungen σ_x an dieser Stelle.

Betrachtet man nun zwei gegenüberliegende Laststreifen nach Bild 14, dann wird das resultierende Spannungsfeld gewonnen durch Superposition der durch die Laststreifen I und II verursachten Spannungskomponenten σ_x , σ_y , τ_{xy} . Die durch Laststreifen I verursachten Spannungen ergeben sich aus den Gln. (43.1) bis (43.3) durch die Transformation:

$$x = x' - a \quad (44)$$

Eine analoge Transformation wird für die durch Laststreifen II verursachten Spannungen durchgeführt:

$$x = x' + a \quad (45)$$

Die durch Laststreifen II verursachten Spannungen müssen von den durch Laststreifen I verursachten Spannungen subtrahiert werden. Die errechneten Spannungsfelder für die Abmessungsverhältnisse $a/b = 0,4$, $a/b = 1,0$ und $a/b = 3,0$ sind in den **Bildern 17 bis 19** dargestellt, wobei an Stelle von x' nur x gesetzt wird.

Bei Belastung der unendlich ausgedehnten Ebene durch zwei gegenüberliegende Laststreifen konstanter Größe bilden sich die Spannungen σ_x zwischen den Laststreifen als Druck, außerhalb der Streifen als Zug aus. Bei einem Abmessungsverhältnis $a/b = 1,0$ werden durchschnittlich etwa zwei Fünftel der Last als Zug, drei Fünftel als Druck in die Scheibe eingeleitet. Dies Verhältnis ist über die Streifenlänge nicht ganz konstant, in Streifenmitte ist der Druckspannungswert höher als an den Streifenenden. In einer Linie senkrecht zur Streifenmitte fällt die Druckspannung nur wenig zur Scheibenmitte hin ab, in Linien senkrecht zu den Streifenenden ist der Abfall sehr steil.

Die Spannungen σ_y sind in Umgebung des Laststreifens am höchsten. Die Schubspannungen τ_{xy} sind im ganzen Scheibebereich niedrig, ausgenommen an den Streifenenden, an denen die Schubspannungen unendlich groß werden.

Aus den Spannungen lassen sich die Verzerrungen errechnen, aus den Verzerrungen die Verschiebungen. Dabei finden die Gln. (17) und (20) Verwendung und es ergibt sich für die Verschiebung u für $x = a$:

$$u = -\frac{p}{4\pi E} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left\{ \left(3 - \frac{1}{m}\right) \frac{1}{2} \left[(y - y_2^*) \ln (y - y_2^*)^2 - (y - y_1^*) \ln (y - y_1^*)^2 - (y - y_2^*) \ln [4a^2 + (y - y_2^*)^2] + (y - y_1^*) \ln [4a^2 + (y - y_1^*)^2] \right] - 4 \left(1 - \frac{1}{m}\right) a \left(\arctg \frac{y - y_2^*}{2a} - \arctg \frac{y - y_1^*}{2a} \right) \right\} \quad (46)$$

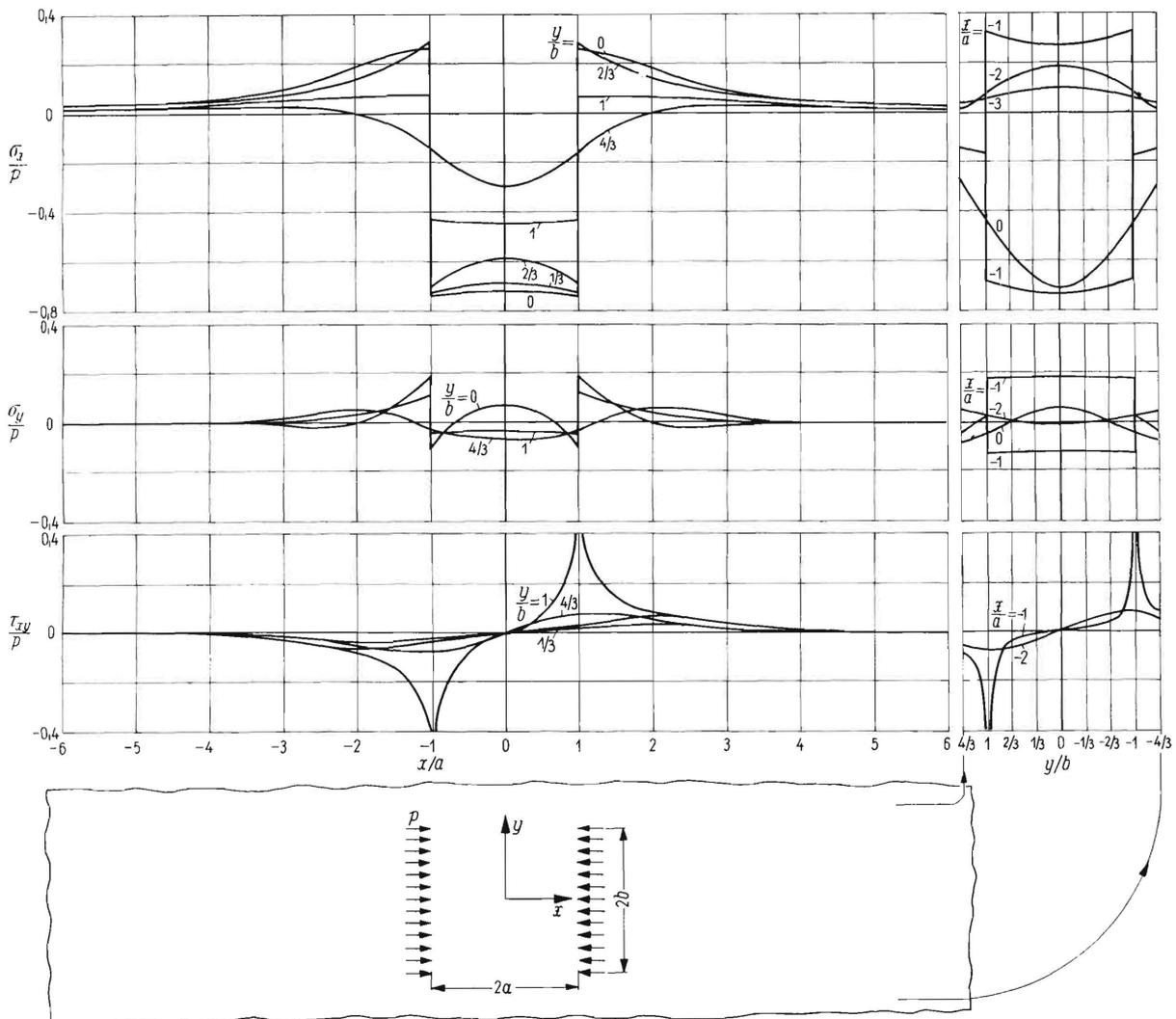


Bild 18. Spannungen in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter zwei gegenüberliegenden Laststreifen konstanter Größe (Verhältnis Streifenabstand zu Streifenlänge $a/b = 1,0$).

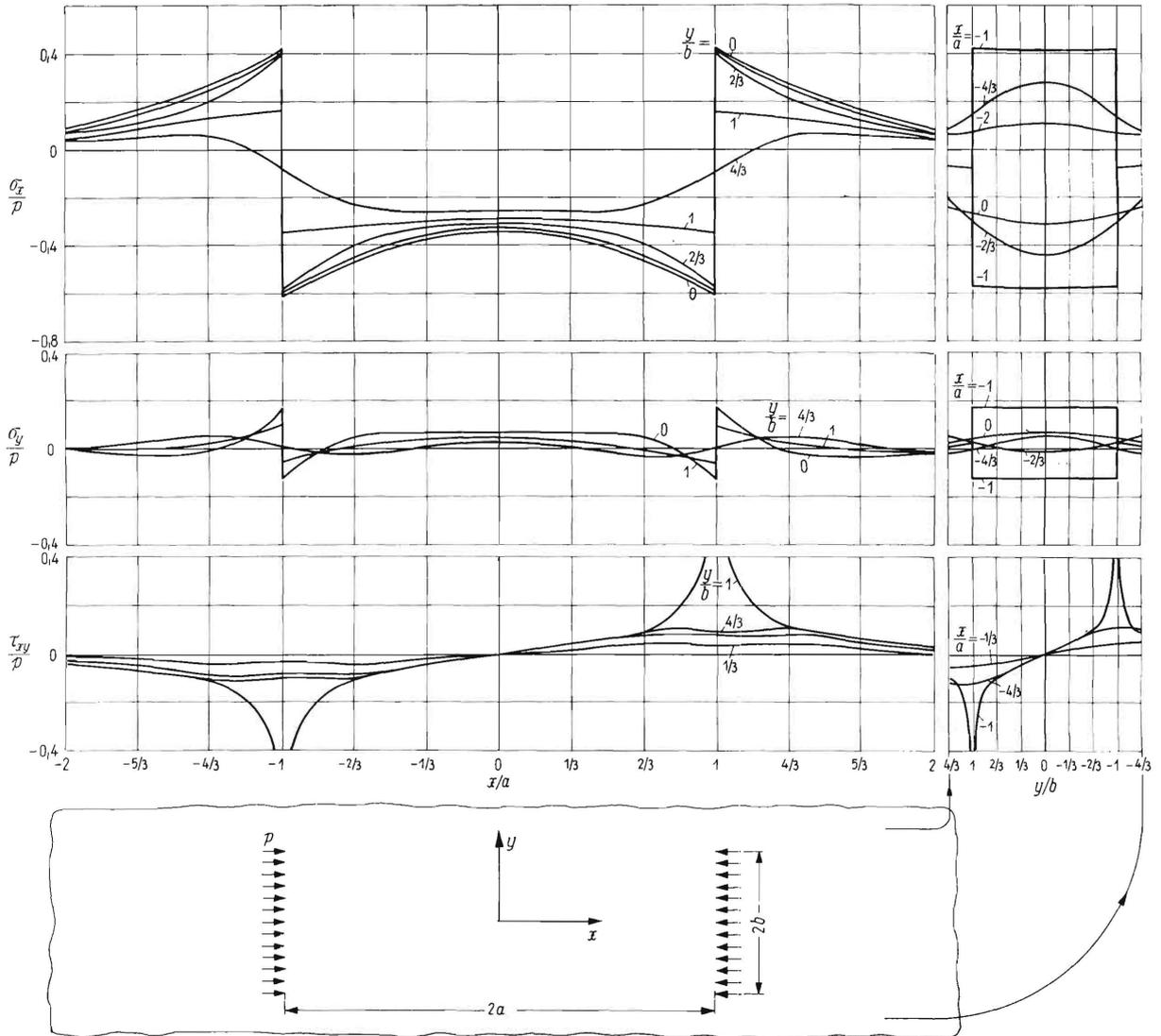


Bild 19. Spannungen in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter zwei gegenüberliegenden Laststreifen konstanter Größe. (Verhältnis Streifenabstand zu Streifenlänge $a/b = 3,0$).

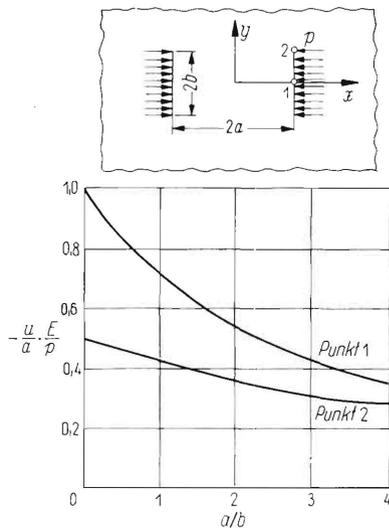


Bild 20. Bezogene Verschiebung u von Laststreifenende und Laststreifenmitte in Abhängigkeit vom Verhältnis Streifenabstand zu Streifenlänge bei der unendlich ausgedehnten Scheibe unter zwei gegenüberliegenden Laststreifen konstanter Größe.

In **Bild 20** ist die nach Gl. (46) errechnete bezogene Verschiebung u in Abhängigkeit vom Verhältnis Streifenabstand zu Streifenbreite a/b dargestellt. Die Verschiebung der Streifenmitte (Punkt 1) ist immer größer als die Verschiebung der Streifenenden (Punkt 2).

Weiter ist aus **Bild 20** ersichtlich, daß die Verschiebung u im Verhältnis zum Streifenabstand um so größer ist, je kleiner der Abstand der beiden Streifen ist. Dies findet seine Erklärung darin, daß bei kleinem Streifenabstand ein größerer Teil der Streifenspannung als Druck übertragen wird als bei großem Streifenabstand (s. Bilder 17 bis 19). Die Kurven in **Bild 20** haben die Abszissenachse als Asymptote.

1.4 Die unendlich ausgedehnte Scheibe unter zwei gegenüberliegenden Laststreifen parabolischer Form

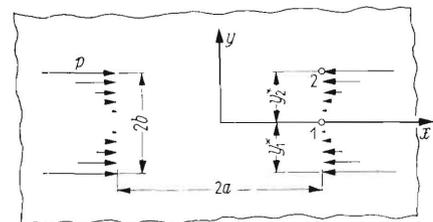


Bild 21

Es wird wieder zunächst vom Einzellaststreifen ausgegangen. Anstelle der Gl. (39) in Abschnitt 1.3 tritt die neue Gleichung für die parabolische Lastverteilung:

$$p(y^*) = p \left(\frac{y^*}{y_2} \right)^2$$

Aus den Gln. (38), (41) und (47) folgt:

$$\sigma_x = -\frac{m-1}{4\pi m} \frac{p}{y_2^2} \left\{ y^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{3m+1}{m-1} \frac{x^3 + x t^2}{(x^2 + t^2)^2} dt - \right.$$

$$- 2y \int_{t_1}^{t_2} \frac{3m+1}{m-1} \frac{x^3 t + x t^3}{(x^2 + t^2)^2} dt +$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t_2} \frac{3m+1}{m-1} \frac{x^3 t^2 + x t^4}{(x^2 + t^2)^2} dt \right\}$$

$$\sigma_y = -\frac{m-1}{4\pi m} \frac{p}{y_2^2} \left\{ y^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{m+3}{m-1} \frac{x t^2 - x^3}{(x^2 + t^2)^2} dt - \right.$$

$$- 2y \int_{t_1}^{t_2} \frac{m+3}{m-1} \frac{x t^3 - x^3 t}{(x^2 + t^2)^2} dt +$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t_2} \frac{m+3}{m-1} \frac{x t^4 - x^3 t^2}{(x^2 + t^2)^2} dt \right\}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{m-1}{4\pi m} \frac{p}{y^2} \left\{ y^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{3m+1}{m-1} \frac{x^2 t + t^3}{(x^2 + t^2)^2} dt - \right.$$

$$- 2y \int_{t_1}^{t_2} \frac{3m+1}{m-1} \frac{x^2 t^2 + t^4}{(x^2 + t^2)^2} dt +$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t_2} \frac{3m+1}{m-1} \frac{x^2 t^2 + t^5}{(x^2 + t^2)^2} dt \right\}$$

(47)

Das Ergebnis der Integration lautet:

$$\sigma_x = -\frac{p}{4\pi y_2^2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left[\frac{x(y-y_2^*)[y^2 - 2y(y-y_2^*) - x^2]}{x^2 + (y-y_2^*)^2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{x(y-y_1^*)[y^2 - 2y(y-y_1^*) - x^2]}{x^2 + (y-y_1^*)^2} \right] +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{m}\right) x(y-y_2^*) - \left(1 - \frac{1}{m}\right) x(y-y_1^*) +$$

$$+ 2\left(y^2 + \frac{1}{m}x^2\right) \left[\operatorname{arctg} \frac{y-y_2^*}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y-y_1^*}{x} \right] -$$

$$\left. - \left(1 - \frac{1}{m}\right) xy \left[\ln [x^2 + (y-y_2^*)^2] - \ln [x^2 + (y-y_1^*)^2] \right] \right\} \quad (49.1)$$

(48.1)

$$\sigma_y = -\frac{p}{4\pi y_2^2} \left\{ 2 \left[\frac{1}{m} y^2 - \left(1 + \frac{2}{m}\right) x^2 \right] \left[\operatorname{arctg} \frac{y-y_2^*}{x} - \right. \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \frac{y-y_1^*}{x} \right] - \left(1 + \frac{3}{m}\right) xy \left[\ln [x^2 + (y-y_2^*)^2] - \right.$$

$$\left. - \ln [x^2 + (y-y_1^*)^2] \right] +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{x(y-y_2^*)[x^2 + 2y(y-y_2^*) - y^2]}{x^2 + (y-y_2^*)^2} -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{x(y-y_1^*)[x^2 + 2y(y-y_1^*) - y^2]}{x^2 + (y-y_1^*)^2} +$$

$$\left. + \left(1 + \frac{3}{m}\right) x(y-y_2^*) - \left(1 + \frac{3}{m}\right) x(y-y_1^*) \right\} \quad (49.2)$$

(48.2)

$$\tau_{xy} = -\frac{p}{4\pi y_2^2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right) (y^2 - x^2) \left[\frac{(y-y_2^*)^2}{x^2 + (y-y_2^*)^2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{(y-y_1^*)^2}{x^2 + (y-y_1^*)^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right) y^2 + \right.$$

$$+ \left(1 + \frac{3}{m}\right) x^2 \left[\ln [x^2 + (y-y_2^*)^2] - \right.$$

$$\left. - \ln [x^2 + (y-y_1^*)^2] \right] - \frac{4}{m} xy \left[\operatorname{arctg} \frac{y-y_2^*}{x} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \frac{y-y_1^*}{x} \right] + \left(1 + \frac{1}{m}\right) 2y x^2 \left[\frac{y-y_2^*}{x^2 + (y-y_2^*)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{y-y_1^*}{x^2 + (y-y_1^*)^2} \right] + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left[\frac{1}{2} (y-y_2^*)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} (y-y_1^*)^2 - 2y(y-y_2^*) + 2y(y-y_1^*) \right] \right\} \quad (49.3)$$

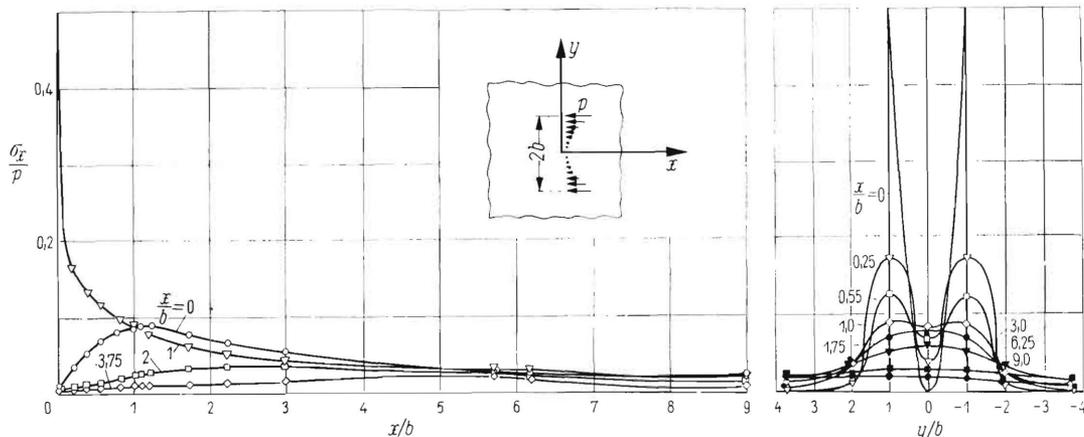


Bild 22. Spannung σ_x in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter einem Laststreifen parabolischer Form. Die Punkte sind mit Rücksicht auf die experimentelle Nachprüfung gewählt.

Die nach Gl. (49.1) errechneten Spannungen σ_x sind in **Bild 22** dargestellt. Die Last verteilt sich als Längsspannung σ_x je zur Hälfte auf die rechte (Zug) und linke (Druck) Scheibenhälfte. Mit der Entfernung vom Laststreifen verteilen sich diese Spannungen immer gleichmäßiger. Die Höchstspannung tritt anfangs in Nähe Streifenende, später in einer Linie senkrecht zur Streifenmitte auf.

Das Spannungsfeld bei zwei gegenüberliegenden Laststreifen wird wieder über die Transformation nach den Gln. (44) und (45) und nachfolgende Subtraktion gewonnen. Nach den Gln. (17) und (20) errechnen sich aus den Spannungen die Verzerrungen und Verschiebungen. Es ergibt sich für die Verschiebung u für $x = a$:

$$\begin{aligned}
 u = & -\frac{p}{4\pi E y_2^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 y_2^2 (y - y_2) \ln \frac{(y - y_2)^2}{4a^2 + (y - y_2)^2} - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 y_1^2 (y - y_1) \ln \frac{(y - y_1)^2}{4a^2 + (y - y_1)^2} + \\
 & + \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 - 2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{1}{3m} - \right. \\
 & - \left. \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{3}{m}\right) \frac{1}{2} \right] (y_1 - y_2) 4a^2 - \\
 & - 4 \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left[\frac{8}{3m} a^3 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) y^2 a \right] \left[\arctg \frac{y - y_2}{2a} - \right. \\
 & - \left. \arctg \frac{y - y_1}{2a} \right] - 2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) - \left[\frac{1}{3m} (y - y_2)^3 - \right. \\
 & - \left. \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) y^2 (y - y_2) \right] \ln \frac{(y - y_2)^2}{4a^2 + (y - y_2)^2} + \\
 & + 2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left[\frac{1}{3m} (y - y_1)^3 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) y^2 (y - \right. \\
 & - \left. y_1) \right] \ln \frac{(y - y_1)^2}{4a^2 + (y - y_1)^2} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{3}{m}\right) \frac{1}{2} y [(y - \\
 & - y_2)^2 \ln (y - y_2)^2 - (y - y_1)^2 \ln (y - y_1)^2] - \\
 & - [4a^2 + (y - y_2)^2] \ln [4a^2 + (y - y_2)^2] + \\
 & \left. + [4a^2 + (y - y_1)^2] \ln [4a^2 + (y - y_1)^2] \right\} \quad (50)
 \end{aligned}$$

In **Bild 23** ist die nach Gl. (50) errechnete bezogene Verschiebung u der Laststreifenpunkte 1 und 2 in Abhängigkeit vom Verhältnis Streifenabstand zu Streifenbreite a/b dargestellt. Gegenüber **Bild 20** fällt die abweichende Kurventendenz des Punktes in Laststreifenmitte bei kleinem Laststreifenabstand ins Auge. Bei kleinem Streifenabstand können zwischen den Streifen in der Mitte nur geringe Spannungen herrschen, also müssen auch die Verschiebungen klein sein. Der steilere Abfall der Kurve für die Verschiebungen des Streifenendpunktes ist aus der steilen Lastspannungsspitze am Streifenende zu erklären. Die bezogenen Verschiebungen sind bei allen Seitenverhältnissen

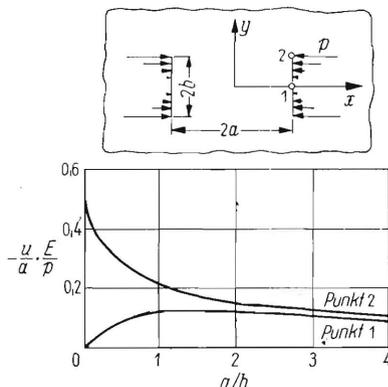


Bild 23. Bezogene Verschiebung u von Laststreifenende und Laststreifenmitte in Abhängigkeit vom Verhältnis Streifenabstand zu Streifenlänge bei der unendlich ausgedehnten Scheibe unter zwei gegenüberliegenden Laststreifen parabolischer Form.

kleiner als im Fall des Laststreifens konstanter Größe. Beide Kurven in **Bild 23** haben die Abszissenachse als Asymptote.

1.5 Die unendlich ausgedehnte Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern unter Zugbelastung im Unendlichen

Die in den Abschnitten 1.1 bis 1.4 abgeleiteten Gln. (4), (5), (14), (21), (43), (46), (49) und (50) für die Spannungen und Verschiebungen in Pflaster und unendlich ausgedehnter Scheibe gestatten unter Beachtung der geometrischen Zusammenhangsbedingungen (3) und der Schnittkraftgleichgewichtsbedingungen (2) die Errechnung der Spannungen und Verschiebungen in der unendlich ausgedehnten Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern unter Zugbelastung im Unendlichen.

Die für die Abmessungsverhältnisse $a/b = 0, a/b = 0,4, a/b = 1,0, a/b = 3,0, a/b = \infty, d_p/d_s = 0,5$ und $d_p/d_s = 1,0$ nach den genannten Gleichungen errechneten Bestimmungsgrößen der Spannungen in der Anschlußfläche σ_{BP}/σ_A und $\sigma_{BP} + \sigma_{CP}/\sigma_A$ sind in **Bild 24** und **25** dargestellt. Die in das Pflaster eingeleiteten Spannungen σ_{BP} und $\sigma_{BP} + \sigma_{CP}$ steigen an mit zunehmender Pflasterlänge und abnehmender Pflasterdicke. Die in die unendlich ausgedehnte Scheibe eingeleiteten Spannungen σ_{BS} und $\sigma_{BS} + \sigma_{CS}$ steigen an mit zunehmender Pflasterlänge und zunehmender Pflasterdicke. Die Spannungen am Ende der Anschlußfläche $\sigma_B + \sigma_C$ sind durchwegs höher als die Spannungen in der Mitte der Anschlußfläche σ_B . Für alle Kurven in **Bild 23** ist σ_{BP}/σ_A bzw. $\sigma_{BP} + \sigma_{CP}/\sigma_A = 1,0$ Asymptote, die Spannung σ_x kann im Pflaster nicht größer als σ_A werden.

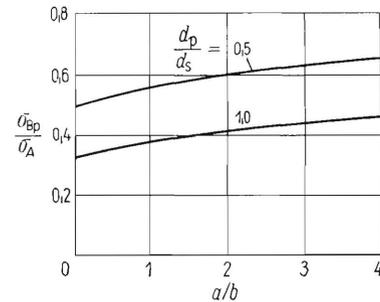


Bild 24. Spannung σ_{BP} bei der unendlich ausgedehnten Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis des Pflasters für zwei verschiedene Verhältnisse Pflasterdicke zu Scheibendicke.

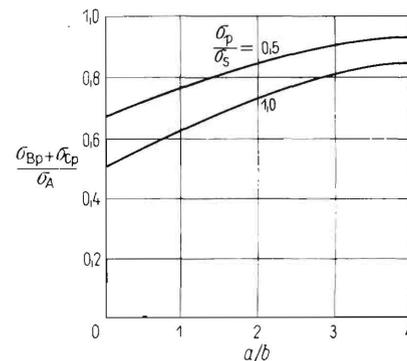


Bild 25. Spannung $\sigma_{BP} + \sigma_{CP}$ bei der unendlich ausgedehnten Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis des Pflasters für zwei verschiedene Verhältnisse Pflasterdicke zu Scheibendicke.

Bei bekannter Größe der Spannungen in der Anschlußfläche kann das Spannungsfeld in der unendlich ausgedehnten Scheibe und im Pflaster nach den schon genannten Gln. (4), (14), (43) und (49) in Abhängigkeit von den Abmessungsverhältnissen a/b und d_p/d_s bestimmt werden. Die Rechnung wird für die Spannung σ_x durchgeführt bei Abmessungsverhältnissen $a/b = 0,4, a/b = 1,0, a/b = 3,0$ und $d_p/d_s = 0,5$, wobei die Punkte, in denen die Spannung errechnet wird, unter Berücksichtigung der in Kapitel 2 dargestellten experimentellen Nachprüfung gewählt werden.

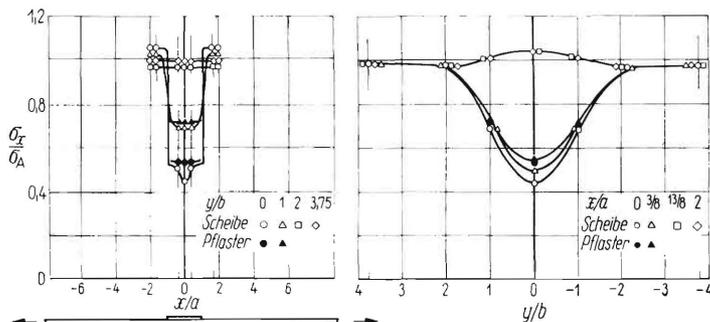


Bild 26. Theoretisch ermittelte Spannung σ_x für die zugbelastete unendlich ausgedehnte Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern (Seitenverhältnis $a/b = 0,4$).

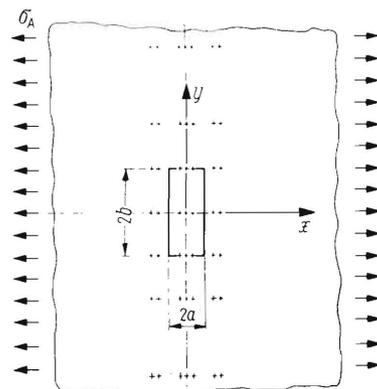


Bild 27. Theoretisch ermittelte Spannung σ_x für die zugbelastete unendlich ausgedehnte Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern (Seitenverhältnis $a/b = 1,0$).

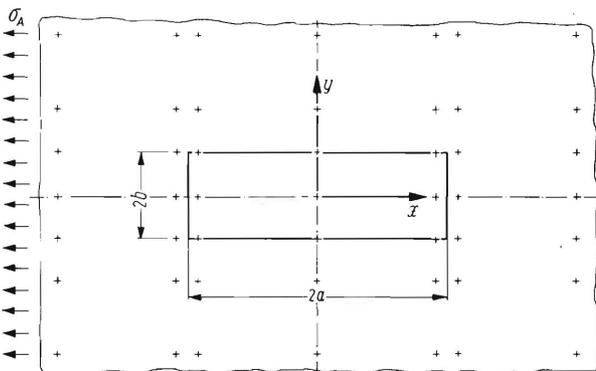
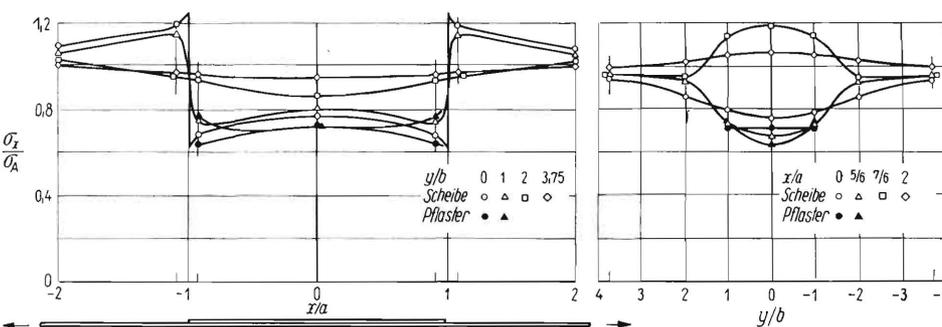
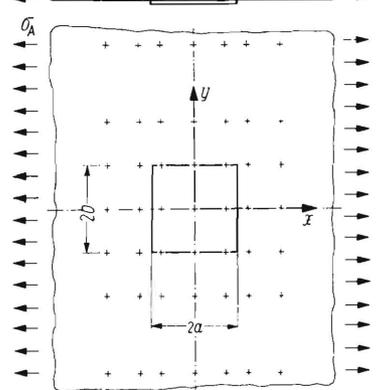
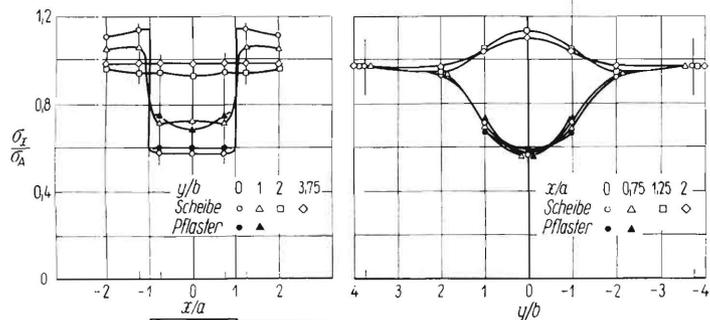


Bild 28. Theoretisch ermittelte Spannung σ_x für die zugbelastete unendlich ausgedehnte Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern (Seitenverhältnis $a/b = 3,0$).

In den **Bildern 26 bis 28** ist das Ergebnis der Rechnung für σ_x dargestellt, während das Ergebnis der Rechnung für σ_y lediglich in Bild 42 und 43 zum Vergleich errechneter und gemessener Spannungswerte verwendet wird. Die Spannungen σ_x in der unendlich ausgedehnten Scheibe steigen vor dem Pflaster an und erreichen in der Linie 5 mm vor dem Pflaster ihren Höchstwert in der Mitte des Pflasterandes. Neben dem Pflaster fallen die Spannungen σ_x ab, dieser Abfall ist in der Linie unmittelbar neben dem Pflaster am stärksten. Punkte auf dem Pflaster und Punkte gleicher Lage in der unendlich ausgedehnten Scheibe tragen in erster Näherung gleiche Spannung.

Da nach den Bildern 26 bis 28 die Spannungen σ_x in Scheibe und Pflaster annähernd gleich groß sind, kann bei den gegebenen Verhältnissen angenommen werden, daß auch die Verzerrungen ϵ_x und die Verschiebungen u in Pflaster und Scheibe annähernd gleich groß sind und daß ein zusätzlicher flankenseitiger oder flächenweiser Anschluß des Pflasters das Spannungsfeld nicht allzusehr ändert. Die Spannungsverteilung beim stirnseitig angeschlossenen Pflaster ist annähernd dieselbe wie beim ringsherum angeschlossenen Pflaster.

Die nach den Gln. (5), (21), (46) und (50) berechneten bezogenen Verschiebungen u der Anschlußfläche sind in **Bild 29** dargestellt.

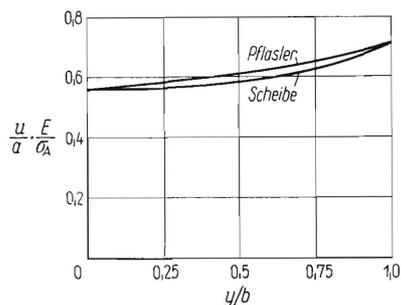


Bild 29. Bezogene Verschiebungen u der Anschlußfläche von Pflaster und unendlich ausgedehnter Scheibe für ein Seitenverhältnis des Pflasters $a/b = 1,0$.

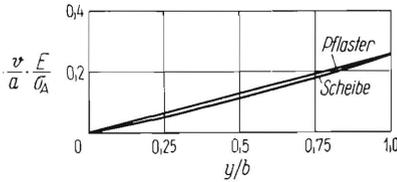


Bild 30. Bezogene Verschiebung v der Anschlußfläche von Pflaster und unendlich ausgedehnter Scheibe für ein Seitenverhältnis des Pflasters $a/b = 1,0$.

Die nach den Gln. (5) und (21) sowie aus den in den Bildern 27 und 42 dargestellten Spannungen berechneten bezogenen Verschiebungen v der Anschlußfläche sind in **Bild 30** dargestellt. Die Rechnung wird für ein Abmessungsverhältnis des Pflasters $a/b = 1,0$ durchgeführt. Die geometrischen Zusammenhangsbedingungen werden also verhältnismäßig gut erfüllt. Die für die näherungsweise Berechnung der Spannungen in Scheibe und Pflaster getroffenen Annahmen kommen der Wirklichkeit sehr nahe.

1.6 Anwendung der dargestellten Lösungsmethode auf die unendlich ausgedehnte Scheibe mit flankenseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern unter Zugbelastung im Unendlichen

Die beschriebene mathematische Behandlungsweise, nämlich die Annahme einer bestimmten Spannungsverteilung in den Anschlußflächen und die Erfüllung der geometrischen Zusammenhangsbedingungen in einzelnen Punkten der Anschlußfläche kann auch beim flankenseitig angeschlossenen Rechteckpflaster Anwendung finden. Die Annahme parabolisch verteilter Schubspannungen τ_{xy} in der Anschlußfläche nach **Bild 31** ist sicher nur eine sehr grobe Näherung, wie sich auf Grund nachträglicher Kontrollrechnungen für die Verschiebungen u der Anschlußfläche ergibt. Sie ist bei großem Abmessungsverhältnis

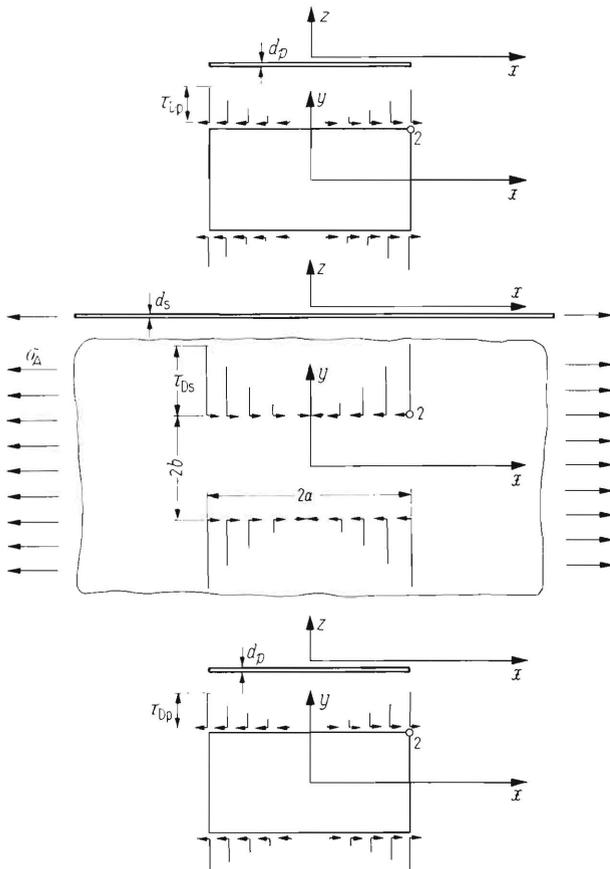


Bild 31. Für die theoretische Behandlung der der zugbelasteten Scheibe mit flankenseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern angenommene Spannungsverteilung in den Anschlußflächen, dargestellt für $d_p/d_s = 1,0$.

a/b sicher falsch, und auch bei kleinerem Abmessungsverhältnis ist in Wirklichkeit an der Pflasterecke kein unendlich steiler Abfall der Schubspannung τ_{yx} vorhanden.

Um den grundsätzlichen Rechnungsgang zu zeigen, wird im folgenden mit der Annahme parabolisch verteilter Schubspannungen τ_{yx} in den Anschlußflächen nach **Bild 31** die unendlich ausgedehnte Scheibe mit flankenseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern unter Zugbelastung im Unendlichen behandelt. Das Abmessungsverhältnis a/b ist 1,0, das Abmessungsverhältnis $d_p/d_s = 0,5$.

Die Schnittkraftgleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\tau_{Ds} ds dx = 2 \tau_{Dp} dp dx \tag{51}$$

Dabei ist τ_{Ds} die am Punkt 2 in der unendlich ausgedehnten Scheibe angreifende Schubspannung, τ_{Dp} die am Punkt 2 des Pflasters angreifende Schubspannung. τ_{Ds} und τ_{Dp} sind Bestimmungsgrößen der die Spannungsverteilung in der Schnittfläche kennzeichnenden Parabeln.

Aus Gl. (51) folgt:

$$\tau_{Ds} = 2 \frac{d_p}{d_s} \tau_{Dp} \tag{52}$$

Die Annahme parabolisch verteilter Spannungen in den Anschlußflächen bedingt, daß die geometrischen Zusammenhangsbedingungen in x -Richtung außer in der Mitte der Anschlußfläche aus Symmetriegründen nur noch in einem weiteren Punkt der Anschlußfläche erfüllt werden können. Dafür wird der Punkt 2 (**Bild 31**) gewählt. Die geometrischen Zusammenhangsbedingungen in y -Richtung können in keinem Punkt der Anschlußlinie erfüllt werden.

Ist u_{2As} die im Punkt 2 der unendlich ausgedehnten Scheibe durch σ_A verursachte Verschiebung in x -Richtung, u_{2Ds} die im Punkt 2 der unendlich ausgedehnten Scheibe durch die durch τ_{Ds} gekennzeichneten, parabolisch verteilten Spannungen verursachte Verschiebung, u_{2Dp} die im Punkt 2 des Pflasters durch die durch τ_{Dp} gekennzeichneten, parabolisch verteilten Spannungen verursachte Verschiebung, dann gilt:

$$u_{2As} - u_{2Ds} = u_{2Dp} \tag{53}$$

Die im folgenden durchzuführende mathematische Behandlung für die Abmessungsverhältnisse $a/b = 1,0$ und $d_p/d_s = 0,5$ umfaßt analog zu den Abschnitten 1.1 bis 1.4 die Errechnung der Spannungen in einer quadratischen Scheibe unter parabolisch verteilten Randschubspannungen nach der Differenzenmethode und die Errechnung der Spannungen in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter entsprechenden Laststreifen im Innern, ausgehend von dem Lösungsansatz von Love [54].

Die Anwendung der Differenzenmethode auf die quadratische Scheibe unter parabolischer Randschubspannungsverteilung geschieht in der in Abschnitt 1.2 dargestellten Art und Weise, wobei sich als Randbedingung für die Spannungsfunktion mit $\tau_{Dp} = p$ ergibt:

$$x = a: \quad F = 0 \tag{54.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{54.2}$$

$$y = b: \quad F = 0 \tag{55.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{p}{3 a^2} [x^3 - a^3] \tag{55.2}$$

Die errechneten Spannungen σ_x , σ_y , τ_{xy} sind in **Bild 32** dargestellt. Es treten hohe Zugspannungen σ_x am belasteten Rand auf, die mit den Schubspannungen des Randes und den Druckspannungen der Scheibenmitte im Gleichgewicht stehen. Es treten Druckspannungen σ_y am Rand und Zugspannungen σ_y in Scheibenmitte auf. Die Schubspannungen τ_{xy} nehmen zur Scheibenmitte hin rasch ab. Die Werte der Funktion F in kp lauten mit der in Abschnitt 1.2 verwendeten Indexverteilung bei Verwendung von $10 \cdot 10$ Maschen für $b = 5 \text{ mm}$ und $p = 1000 \text{ kp/mm}^2$:

(Zahlentafel siehe nächste Seite)

$F_{00} = -1836,207\,455\,31$	$F_{02} = -1842,443\,294\,56$	$F_{04} = -1181,609\,649\,31$
$F_{10} = -1699,040\,677\,04$	$F_{12} = -1719,476\,787\,97$	$F_{14} = -1131,566\,384\,89$
$F_{20} = -1316,385\,339\,29$	$F_{22} = -1367,458\,029\,52$	$F_{24} = -971,771\,119\,06$
$F_{30} = -781,042\,872\,85$	$F_{32} = -849,601\,001\,63$	$F_{34} = -690,231\,421\,55$
$F_{40} = -261,661\,896\,42$	$F_{42} = -307,646\,170\,95$	$F_{44} = -312,993\,570\,96$
$F_{01} = -1847,829\,627\,01$	$F_{03} = -1694,045\,871\,40$	
$F_{11} = -1713,514\,811\,35$	$F_{13} = -1597,743\,573\,65$	
$F_{21} = -802,339\,403\,08$	$F_{23} = -1311,700\,491\,45$	
$F_{31} = -802,339\,403\,08$	$F_{33} = -861,622\,242\,86$	
$F_{41} = -274,224\,508\,47$	$F_{43} = -342,500\,287\,23$	

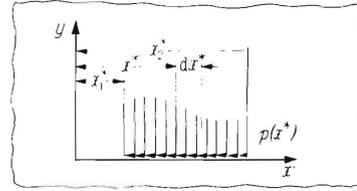


Bild 33. Laststreifen in Richtung der x-Achse in der unendlich ausgedehnten Scheibe.

Zur Berechnung des Spannungsfeldes in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter zwei gegenüberliegenden Streifen parabolisch verteilter Schublast wird analog Abschnitt 1.3 und 1.4 vom Einzelstreifen ausgegangen:

Für einen Laststreifen in Richtung der x-Achse nach **Bild 33** gilt:

$$x = x' - x^* \quad (56)$$

$$dP = p(x^*) dx^* \quad (57)$$

Aus den Gln. (35), (56), (57) folgt, wenn statt x' nur x geschrieben wird:

$$d\sigma_x = \frac{m-1}{4\pi m} \frac{p(x^*) dx^*}{[(x-x^*)^2 + y^2]^2} \left[\frac{3m+1}{m-1} (x-x^*)^3 + (x-x^*)y^2 \right] \quad (58.1)$$

$$d\sigma_y = -\frac{m-1}{4\pi m} \frac{p(x^*) dx^*}{[(x-x^*)^2 + y^2]^2} \left[\frac{3m+1}{m-1} (x-x^*)y^2 - (x-x^*)^3 - 2(x-x^*)y^2 \right] \quad (58.2)$$

$$d\tau_{xy} = \frac{m-1}{4\pi m} \frac{p(x^*) dx^*}{[(x-x^*)^2 + y^2]^2} \left[\frac{3m+1}{m-1} (x-x^*)^2 y + y^3 \right] \quad (58.3)$$

Die parabolische Schubspannungsverteilung ist gegeben durch:

$$p(x^*) = p \left(\frac{x^*}{x_2^*} \right)^2 \quad \text{für } 0 \leq x^* \leq x_2^* \quad (59.1)$$

$$p(x^*) = -p \left(\frac{x^*}{x_1^*} \right)^2 \quad \text{für } x_1^* \leq x^* \leq 0 \quad (59.2)$$

Zur Integration wird gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} w &= x - x^* \\ x^* &= x - w \\ dx^* &= -dw \\ x^{*2} &= x^2 - 2xw + w^2 \\ w_0 &= x - 0 \\ w_2 &= x - x_2^* \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Aus den Gln. (58), (59.1) und (60) folgt für die Spannungen σ_x und σ_y infolge der Schublast zwischen $x^* = 0$ und $x^* = x_2^*$:

$$\sigma_x = -\frac{m-1}{4\pi m} \frac{p}{x_2^{*2}} \left\{ x^2 \int_{w_0}^{w_2} \frac{\frac{3m+1}{m-1} w^3 + w y^2}{(w^2 + y^2)^2} dw - 2x \int_{w_0}^{w_2} \frac{\frac{3m+1}{m-1} w^4 + w^2 y^2}{(w^2 + y^2)^2} dw + \int_{w_0}^{w_2} \frac{\frac{3m+1}{m-1} w^5 + w^3 y^2}{(w^2 + y^2)^2} dw \right\} \quad (61.1)$$

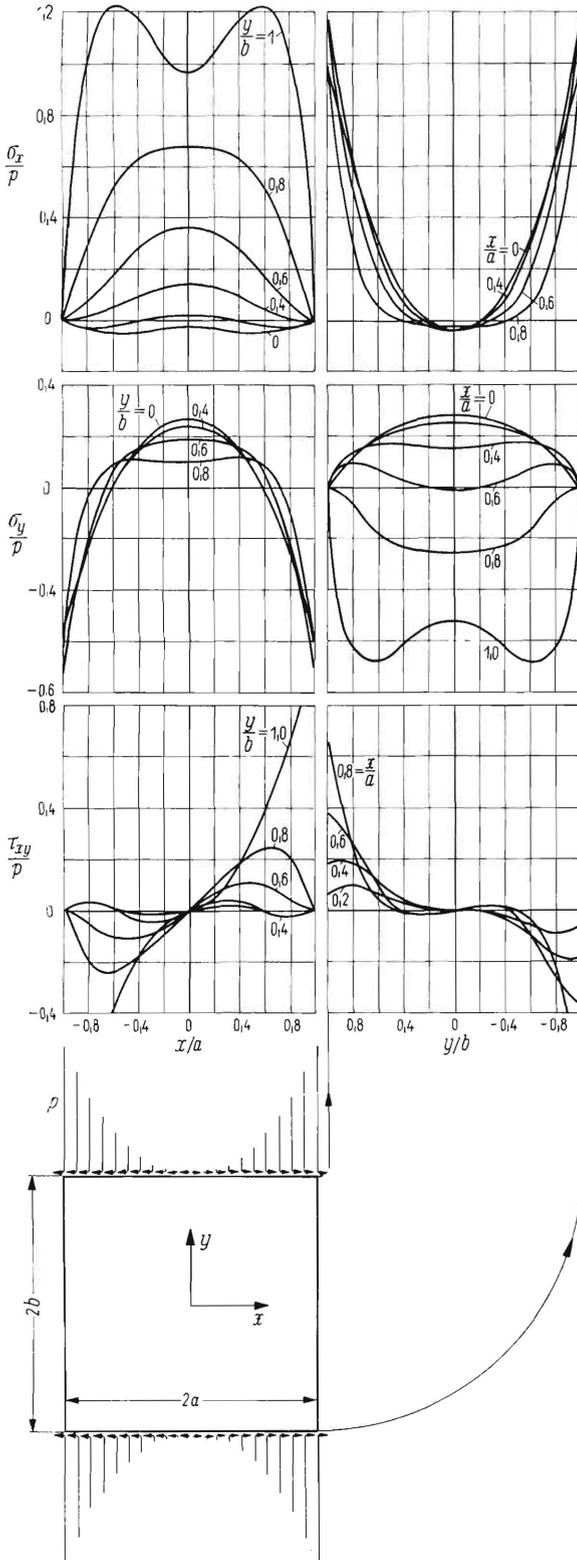


Bild 32. Spannungen in einer Rechteckscheibe mit Seitenverhältnis $a/b = 1,0$ unter Randschubspannungsverteilung parabolischer Form.

$$\sigma_y = -\frac{m-1}{4\pi m} \frac{p}{x_2^2} \left\{ x^2 \int_{w_0}^{w_2} \frac{3m+1}{m-1} \frac{w y^2 - w^3 - 2w y^2}{(w^2 + y^2)^2} dw - \right.$$

$$- 2x \int_{w_0}^{w_2} \frac{3m+1}{m-1} \frac{w^2 y^2 - w^4 - 2w^2 y^2}{(w^2 + y^2)^2} dw +$$

$$\left. + \int_{w_0}^{w_2} \frac{3m+1}{m-1} \frac{w^3 y^2 - w^5 - 2w^3 y^2}{(w^2 + y^2)^2} dw \right\} \quad (61.2)$$

Das Ergebnis der Integration lautet:

$$\sigma_x = -\frac{p}{4\pi x_2^2} \left\{ \ln(y^2 + w^2) \left[\frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{m} \right) x^2 - \frac{1}{2} \left(5 + \frac{3}{m} \right) y^2 \right] + \right.$$

$$+ 4 \left(2 + \frac{1}{m} \right) x y \operatorname{arctg} \frac{w}{y} + \left(3 + \frac{1}{m} \right) \left(-2xw + \frac{1}{2} w^2 \right) +$$

$$\left. + \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{-x^2 w^2 - 2x y^2 w + y^2 w^2}{y^2 + w^2} \right\} \Bigg|_{w_0}^{w_2} \quad (62.1)$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{4\pi x_2^2} \left\{ \ln(y^2 + w^2) \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) x^2 + \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{m} \right) y^2 \left. \right] - 4x y \operatorname{arctg} \frac{w}{y} +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{x^2 w^2 + 2x y^2 w - y^2 w^2}{y^2 + w^2} +$$

$$\left. + \left(1 - \frac{1}{m} \right) \left[2xw - \frac{1}{2} w^2 \right] \right\} \Bigg|_{w_0}^{w_2} \quad (62.2)$$

Die Spannungen σ_x und σ_y infolge der Schubbelastung zwischen $x^* = x_1^*$ und $x^* = 0$ ergeben sich aus den Gln. (58), (59.2) und (60). Gegenüber den Gln. (61) und (62) ändern sich nur die Vorzeichen und die Integrationsgrenzen.

Setzt man die Integrationsgrenzen ein mit $x_1^* = -5$ und $x_2^* = +5$, dann ergibt sich die Spannung σ_x infolge der Schubbelastung zwischen x_1^* und x_2^* zu:

$$\sigma_x = -\frac{p}{100\pi} \left\{ (1,65x^2 - 2,95y^2) \ln \frac{[y^2 + (x-5)^2][y^2 + (x+5)^2]}{[y^2 + x^2]^2} + \right.$$

$$+ 9,2xy \left(\operatorname{arctg} \frac{x-5}{y} + \operatorname{arctg} \frac{x+5}{y} - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) -$$

$$- \frac{1,3(x-5)}{y^2 + (x-5)^2} [x^2(x-5) + y^2(x+5)] -$$

$$- \frac{1,3(x+5)}{y^2 + (x+5)^2} [x^2(x+5) + y^2(x-5)] +$$

$$\left. + 2,5x^2 + 82,5 \right\} \quad (63)$$

Die nach Gl. (63) berechneten Spannungen σ_x in der Linie $y = 0$ sind in **Bild 34** dargestellt. Die Druckspannungen im mittleren Bereich gehen noch vor dem Streifenende auf Null zurück. Am Ende des Schubspannungstreifens, also dort, wo die Schubspannungen von dem endlichen Wert p auf Null abfallen, wird eine unendlich große Zugspannungsspitze erreicht. Die Zugspannungen nähern sich dem Wert Null bei größerer Entfernung vom Streifenende.

Aus den Spannungen σ_x und σ_y lassen sich nach der Gl. (17) die Verzerrungen ϵ_x und ϵ_y errechnen, aus den Verzerrungen durch Integration nach Gl. (20) die Verschiebungen u und v . Für die Verschiebung u infolge der Schubbelastung zwischen $x^* = 0$ und $x^* = x_2^*$ ergibt sich:

$$u = -\frac{p}{4\pi E x_2^2} \left\{ \ln(w^2 + y^2) \left[\frac{1}{6} \left(3 + \frac{2}{m} - \frac{1}{m^2} \right) w^3 - \right. \right.$$

$$- \frac{1}{2} \left(3 + \frac{2}{m} - \frac{1}{m^2} \right) x w^2 + \frac{1}{2} \left(3 + \frac{2}{m} - \frac{1}{m^2} \right) x^2 w -$$

$$- \frac{1}{2} \left(5 + \frac{6}{m} + \frac{1}{m^2} \right) x y^2 \left. \right] + \frac{1}{3} \left(3 + \frac{2}{m} - \frac{1}{m^2} \right) y^3 \operatorname{arctg} \frac{y}{w} +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left[- \left(1 + \frac{1}{m} \right) y^3 + 4x^2 y \right] \operatorname{arctg} \frac{w}{y} -$$

$$- \frac{2}{9} \left(3 + 4 \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} \right) w^3 + \frac{1}{2} \left(5 + 6 \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} \right) x w^2 -$$

$$- 4 \left(1 + \frac{1}{m} \right) x^2 w + \frac{2}{3} \left(3 + 4 \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} \right) y^2 w \left. \right\} \Bigg|_{w_0}^{w_2} \quad (64.1)$$

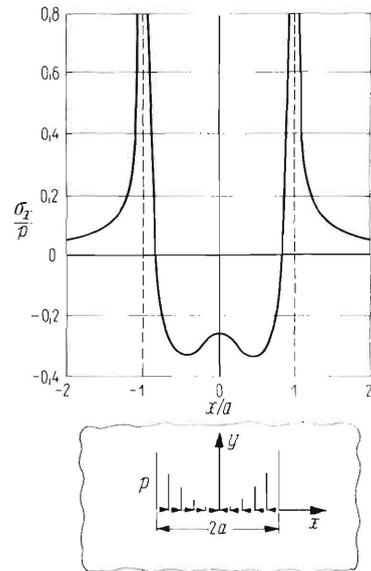


Bild 34. Spannung σ_x unter einem Schubspannungstreifen parabolischer Form in der unendlich ausgedehnten Scheibe.

Ein nur im Vorzeichen und in den Integrationsgrenzen sich unterscheidender Ausdruck ergibt sich für die Verschiebung u infolge der Schublast zwischen $x^* = x_1^*$ und $x^* = 0$. Mit den Integrationsgrenzen $x_1^* = -5$ und $x_2^* = +5$ ergibt sich für die Verschiebung u der Linie $x = 5$ infolge der Schubbelastung zwischen x_1^* und x_2^* zu:

$$u = -\frac{p}{100\pi E} \left\{ -17,22 y^2 \ln y^2 + (146 - 17,22 y^2) \ln(y^2 + 100) - \right.$$

$$- (73,2 - 17,22 y^2) 2 \ln(y^2 + 25) + 1,17 y^3 \left(\frac{3\pi}{2} + \right.$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{y}{10} - 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{5} \left. \right) + (130 y - 1,69 y^2) \left(\operatorname{arctg} \frac{10}{y} - \right.$$

$$\left. - 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{y} \right) + 147 \left. \right\} \quad (64.2)$$

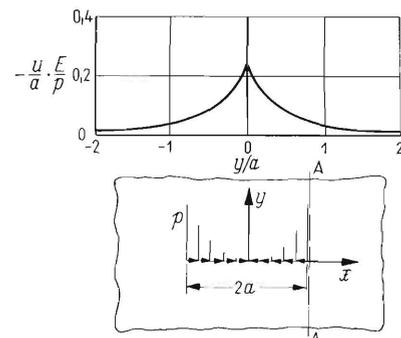


Bild 35. Bezogene Verschiebung u der Linie AA senkrecht zum Endpunkt eines Schubspannungstreifens parabolischer Form in der unendlich ausgedehnten Scheibe.

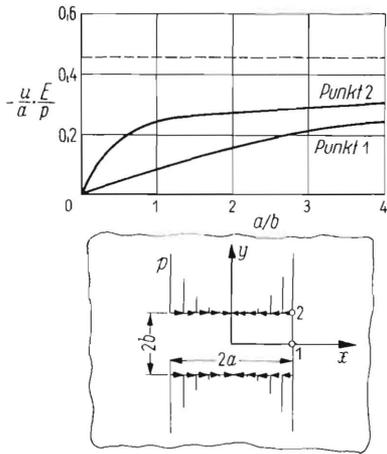
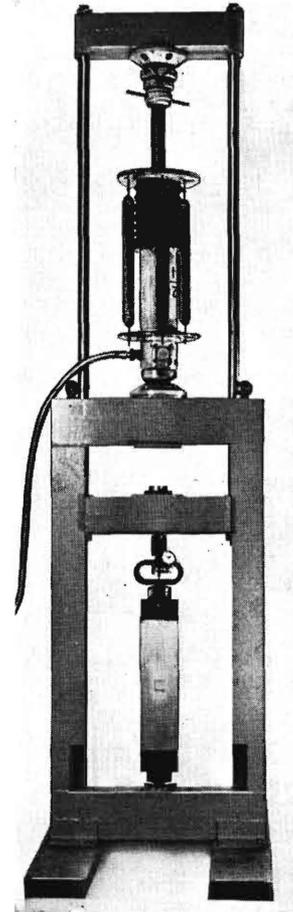


Bild 36. Bezogene Verschiebung u der Punkte 1 und 2 in der unendlich ausgedehnten Scheibe unter zwei Schubspannungstreifen parabolischer Form.

Bild 38. Zugstab und Kraftmeßbügel in der hydraulisch betriebenen Belastungsvorrichtung.



Die nach Gl. (64.2) berechneten bezogenen Verschiebungen u sind in **Bild 35** dargestellt. Sie nehmen von einem Höchstwert am Laststreifenende nach beiden Seiten hin stark ab und nähern sich bei großer Entfernung vom Laststreifenende dem Wert Null.

Wird mit Gl. (64.2) einmal die Transformation (65), zum anderen die Transformation (66) durchgeführt und werden die resultierenden Gleichungen addiert, dann kann damit die bezogene Verschiebung u an den Punkten 1 und 2 der unendlich ausgedehnten Scheibe unter zwei gegenüberliegenden Laststreifen nach **Bild 31** berechnet werden.

$$y = y' - b \quad (65)$$

$$y = y' + b \quad (66)$$

In **Bild 36** sind diese bezogenen Verschiebungen u dargestellt, wobei an Stelle von y' nur y gesetzt wird.

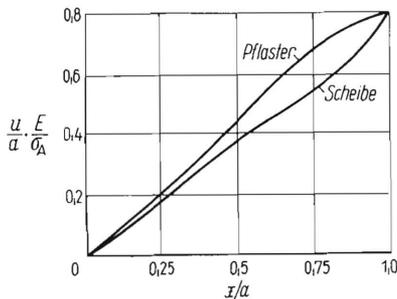


Bild 37. Bezogene Verschiebung u der Anschlußfläche von Pflaster und unendlich ausgedehnter Scheibe für ein Seitenverhältnis des Pflasters $a/b = 1,0$.

Mit den nach der Differenzenmethode und nach der Gl. (64.2) errechneten Verschiebung u im Punkt 2 des Pflasters und der unendlich ausgedehnten Scheibe ergibt sich bei Anwendung der Gln. (52) und (53) für τ_{DS}/σ_A der Wert 0,81. Zur Kontrolle der Genauigkeit des Näherungsansatzes für die Spannungen in der Anschlußfläche sind in **Bild 37** die nach den Gln. (21) und (64.2) errechneten bezogenen Verschiebungen u der Anschlußfläche dargestellt.

2. Das Spannungsfeld in einem breiten Zugstab mit beidseitig angeschlossenen Rechteckpflastern (Experiment)

Die Spannungsfelder in den Bildern 26 bis 28 werden auf Grund theoretisch abgeleiteter Gleichungen errechnet, die als Näherungslösungen anzusehen sind. Eine experimentelle Bestätigung ist daher notwendig.

Die unendlich ausgedehnte Scheibe wird im Versuch durch einen Zugstab ersetzt, dessen Breite und Länge die Pflasterabmessungen merklich übersteigt. Aus der theoretischen Lösung ist ja schon zu ersehen, daß die durch das Pflaster verursachten Spannungen mit der Entfernung vom Pflaster rasch abklingen, ein Zugstab genügend großer Breite und Länge kann also im vorliegenden Fall die unendlich ausgedehnte Scheibe ersetzen.

Zugstäbe und Pflaster werden aus 2 und 1 mm dickem Tiefziehblech St 13.04 mit verbesserter Oberfläche hergestellt, die Abmessungen sind aus **Bild 40** und **41** ersichtlich.

Eine einwandfreie Verbindung von Pflastern und Zugstab an den Stirnseiten des Pflasters macht große Schwierigkeiten. Sowohl das Schweißen als auch das Lötens einer Hohlkehlnaht verursacht durch das ungleichmäßige örtliche Erwärmen in den verhältnismäßig dünnen Blechen so große bleibende Verformungen, daß diese Bauteile trotz Nachrichtens für eine genaue Spannungsermittlung zum Zwecke des Vergleiches mit errechneten Werten ungeeignet sind. Der Versuch, den Wärmeverzug dadurch zu umgehen, daß an Stelle der Hohlkehlnaht eine Reihe



Bild 39. Induktiv wirkender Dehnungsaufnehmer mit magnetisch wirkender Aufspannvorrichtung.

von Kerbstiften als Verbindungselement zwischen Pflastern und Zugstab verwendet wird, hat keinen Erfolg. Die Kraftübertragung von der Bohrung des Zugstabes über den Kerbstift zur Bohrung des Pflasters ermöglicht so große Verschiebungen zwischen der Anschlußfläche des Pflasters und der Anschlußfläche des Zugstabes, daß das Pflaster keine nennenswerten Spannungen trägt.

Aus diesem Grunde werden die Spannungsmessungen an Zugstäben mit beidseitigen, flächenweise angeschlossenen Pflastern durchgeführt. Unter „flächenweisem Anschluß“ wird ein Aufkleben oder Verbinden in der ganzen Pflasterebene verstanden. Aus Abschnitt 1.5 geht hervor, daß das Spannungsfeld bei stirnseitigem und flächenweisem Anschluß der Pflaster weitgehend übereinstimmt. Als Verbindungsmittel wird das Zinnlot Casto-Tin verwendet, welches bei ca. 250°C dünnflüssig wird. Zugstab und Pflaster werden mit zwischengelegtem Lot auf-

einandergespannt und in einem Ventilatorrockenschrank auf ca. 300°C gleichmäßig erhitzt. Durch diese Maßnahmen gelingt es, den Wärmeverzug bis auf eine schwache Krümmung in Zugstablängsrichtung zu vermeiden. Die genannte schwache Krümmung läßt sich durch eine Vorlast bei der Spannungsmessung weitgehend beseitigen.

Die Zugstäbe werden in der in **Bild 38** dargestellten Art und Weise belastet. Sie werden zusammen mit einem vorgeschalteten Ringkraftmesser (Bauart Dr. Wazau) in eine hydraulisch betriebene Belastungsvorrichtung eingespannt. Es wird darauf geachtet, daß die Kraft zentrisch und genau in Richtung des Zugstabes eingeleitet wird. Die Höchstlast beträgt 3690 kp, die Vorlast 338 kp, der Differenz von 3352 kp entspricht eine Spannung im ungestörten Bereich des Zugstabes von 10,49 kp/mm².

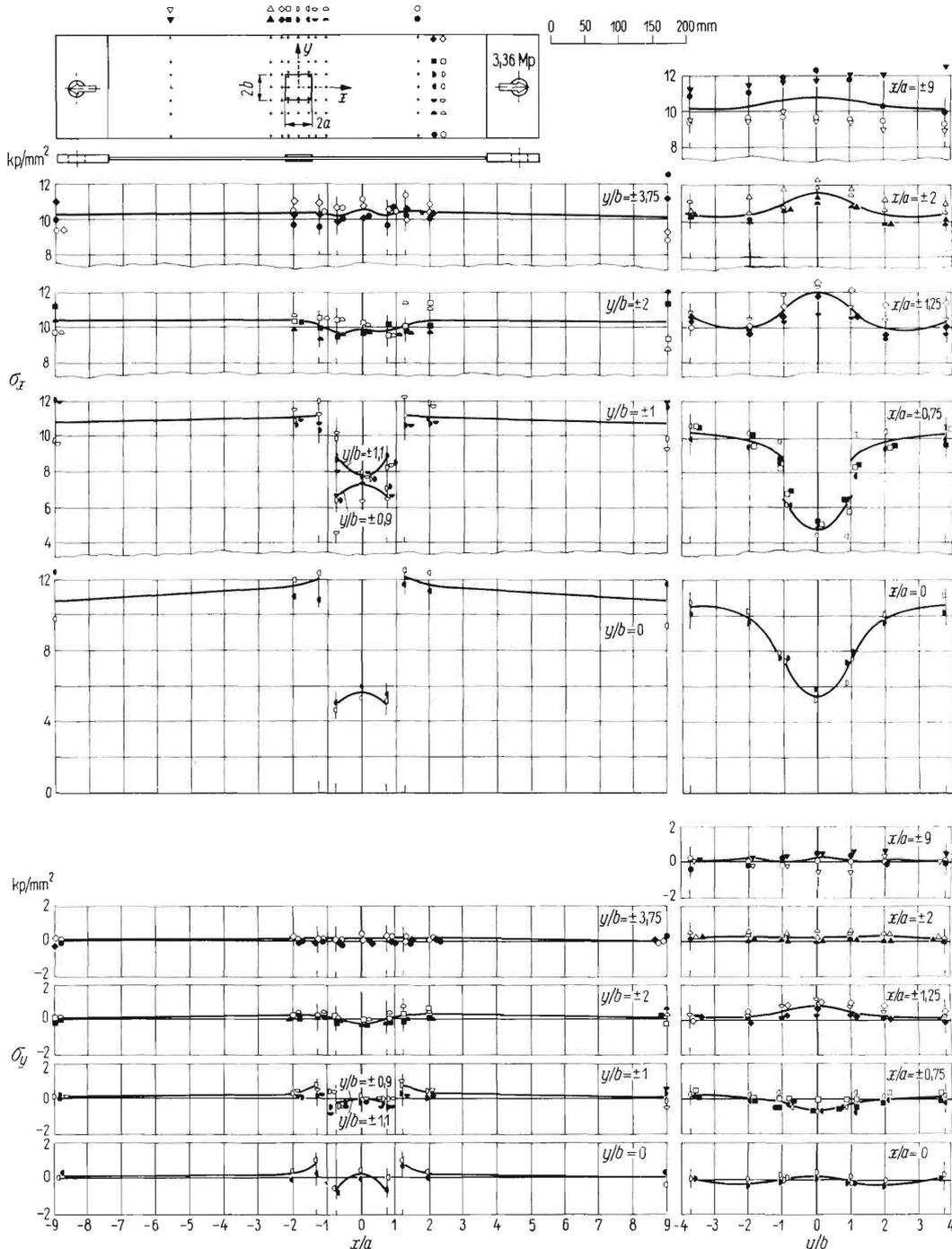


Bild 40. Gemessene Spannungen σ_x und σ_y in einem Zugstab mit beidseitigen, aufgelöteten Pflastern mit Seitenverhältnis $b = 1,0$. Die ausgezogenen Linien verlaufen durch die Mittelwerte der Spannungen sämtlicher Symmetriepunkte.

Zur Bestimmung der Spannungen wird ein induktiv wirkender Dehnungsaufnehmer nach *Thum, Svenson* und *Weiss* [55], **Bild 39**, verwendet. Die beiden Spitzen dieses Gebers, von denen eine fest, die andere beweglich ausgebildet ist, werden durch Federkraft in 2 mm Abstand („Meßstrecke“ l) in die Bauteiloberfläche gepreßt. Dehnt sich das Bauteil, dann ändert sich die Meßstrecke. Die Meßstreckenänderung Δl wird über eine mechanische Hebelübersetzung auf die als Anker dienende Membran zwischen zwei Spulen mit Eisenkernen übertragen. Der Anker ändert die Luftspalte und damit die Induktivitäten der Spulen, die als dritter und vierter Zweig in eine Wechselspannungsbrücke nach *Wheatstone* geschaltet sind. Die Verstimmung der Brücke, gemessen als Stromstärkenänderung am Brückenquerzweig, ist der Meßstreckenänderung Δl , bei kleinem Δl also der Verzerrung $\varepsilon = \Delta l/l$ direkt proportional. Über einen Eichwert können aus der Stromstärkenänderung am Brückenquerzweig die

Verzerrungen ε_x und ε_y bestimmt werden. Der Dehnungsaufnehmer wird an jeder Meßstelle zweimal aufgespannt, bei jeder Aufspannung wird das Bauteil zweimal be- und entlastet. Ein mittlerer Fehler von 1,0% von ε_x ist zu erwarten.

Die Spannungen σ_x und σ_y werden aus den Dehnungen ε_x und ε_y nach den bekannten Gln. (67.1) und (67.2) errechnet, wobei ein Elastizitätsmodul $E = 2,1 \cdot 10^4$ kp/mm² und eine *Poissonsche* Zahl $m = 10/3$ zugrunde gelegt werden:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \left(\frac{1}{m}\right)^2} \left(\varepsilon_x + \frac{1}{m} \varepsilon_y \right) \quad (67.1)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \left(\frac{1}{m}\right)^2} \left(\varepsilon_y + \frac{1}{m} \varepsilon_x \right) \quad (67.2)$$

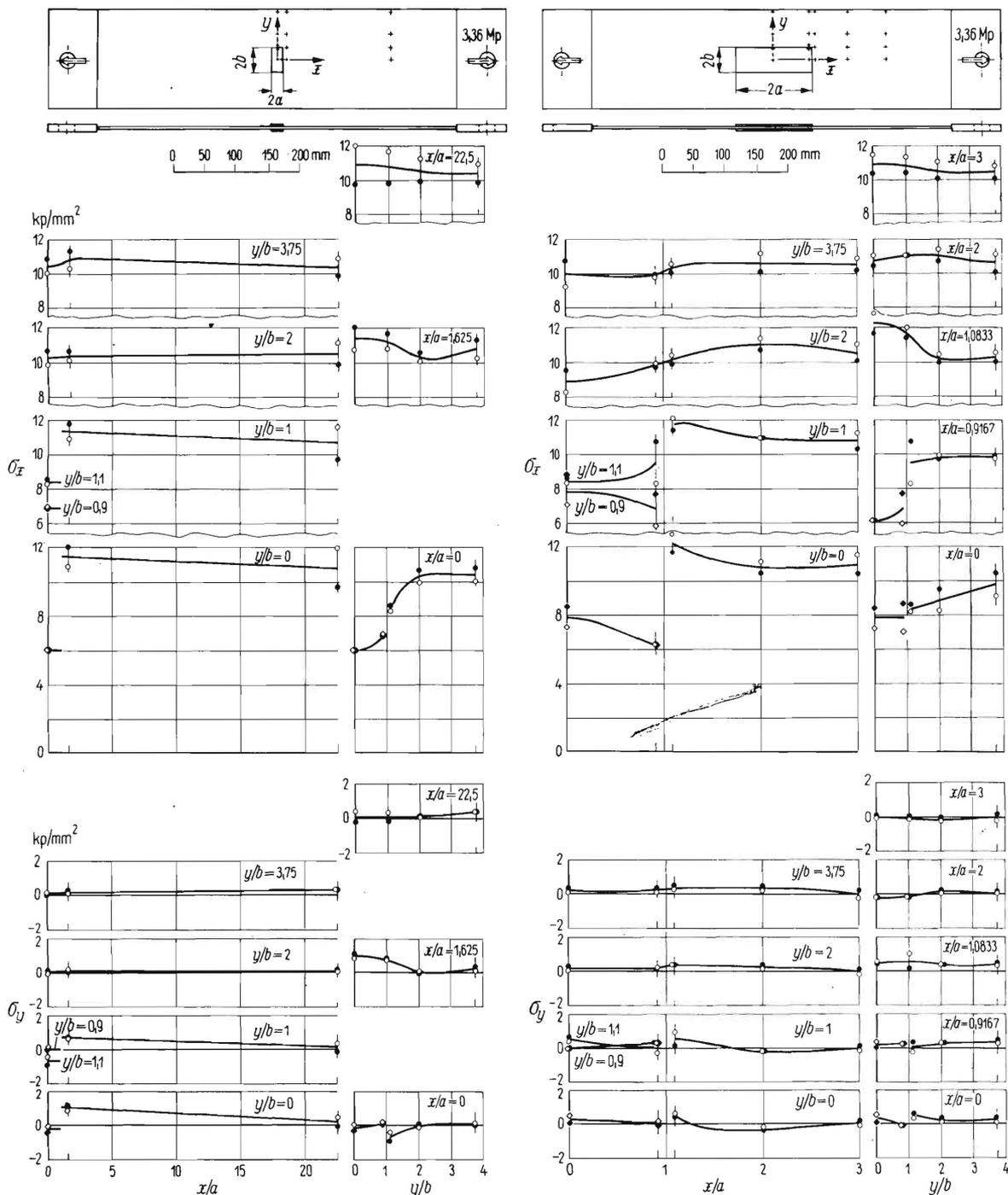


Bild 41. Gemessene Spannungen σ_x und σ_y in zwei Zugstäben mit beidseitigen, aufgelöteten Platern mit Seitenverhältnis $a/b = 0,4$ und $a/b = 3,0$. Die ausgezogenen Linien verlaufen durch die Mittelwerte der Spannungen sämtlicher Symmetriepunkte.

Die Meßpunkte auf Zugstab und Pflaster ordnen sich nach waagrechten und senkrechten Meßlinien, **Bild 40 und 41**. Waagrechte Meßlinien werden in die Mitte des Zugstabes, 5 mm vor und hinter den Pflasterend, im Abstand Pflasterlänge von der Zugstabmitte und in den ungestörten Bereich gelegt. Die Lage der Linien 5 mm vor und hinter der Pflasterkante ergibt sich unter Zugrundelegung der Annahme, daß in diesem Schnitt die Spannungen wieder gleichmäßig über Pflaster und Zugstabdicke verteilt, die Biegeeffekte der Kraftumlenkung also abgeklungen sind. Die senkrechten Meßlinien werden in Zugstabmitte, in Höhe Pflasterend, zwischen Pflasterend und Zugstabrand und an den Zugstabrand gelegt.

Bei allen Zugstäben wird jeweils an der Vorder- und Rückseite des Bauteiles gemessen, um überlagerte Biegespannungen erkennen zu können. Das Spannungsfeld des Zugstabes mit quadratischen Pflastern (Bild 40) wird vollständig ermittelt, das Spannungsfeld der beiden anderen Zugstäbe (Bild 41) wird nur in einem Symmetrieviertel ermittelt.

Das Ergebnis der Messung ist in Bild 40 und 41 dargestellt. Die weißen Symbole beziehen sich auf die Bauteilvorderseite, die schwarzen Symbole auf die Bauteilrückseite. In Bild 40

erhalten die Spannungswerte jeder Meßlinie ein eigenes Symbol, in Bild 41 erhalten die Spannungswerte von Zugstab und Pflaster eigene Symbole. Die genannte Zuteilung von Symbolen ist notwendig, um Spannungswerte und Meßpunkte einander eindeutig zuzuordnen.

Die trotz der sehr sorgfältigen Herstellung des Bauteiles auftretenden Unterschiede der Spannungswerte symmetrisch liegender Meßpunkte werden auf sehr kleine, die Spannungsverteilung trotzdem entscheidend beeinflussende Form- und Krafteinleitungungenauigkeiten zurückgeführt. Unter der Annahme, daß in erster Linie überlagerte Biegungen die genannten Unterschiede der Spannungswerte verursachen, wird das arithmetische Mittel der Spannungswerte von Symmetriepunkten errechnet und eine Kurve durch diese Mittelwerte gelegt. Diese „Mittelwertskurven“ werden für den Vergleich mit den errechneten Spannungswerten verwendet. Aus Bild 40 und 41 ist ersichtlich, daß die Spannungswerte einzelner Punkte zum Teil erheblich vom jeweiligen Mittelwert abweichen. Eine Einzelmessung ist also trotz hoher Genauigkeit des Meßgerätes und sorgfältiger Herstellung und Belastung des Bauteiles durchaus nicht allgemeingültig. Dies gilt zumindest für alle dünnwandigen Bauteile.

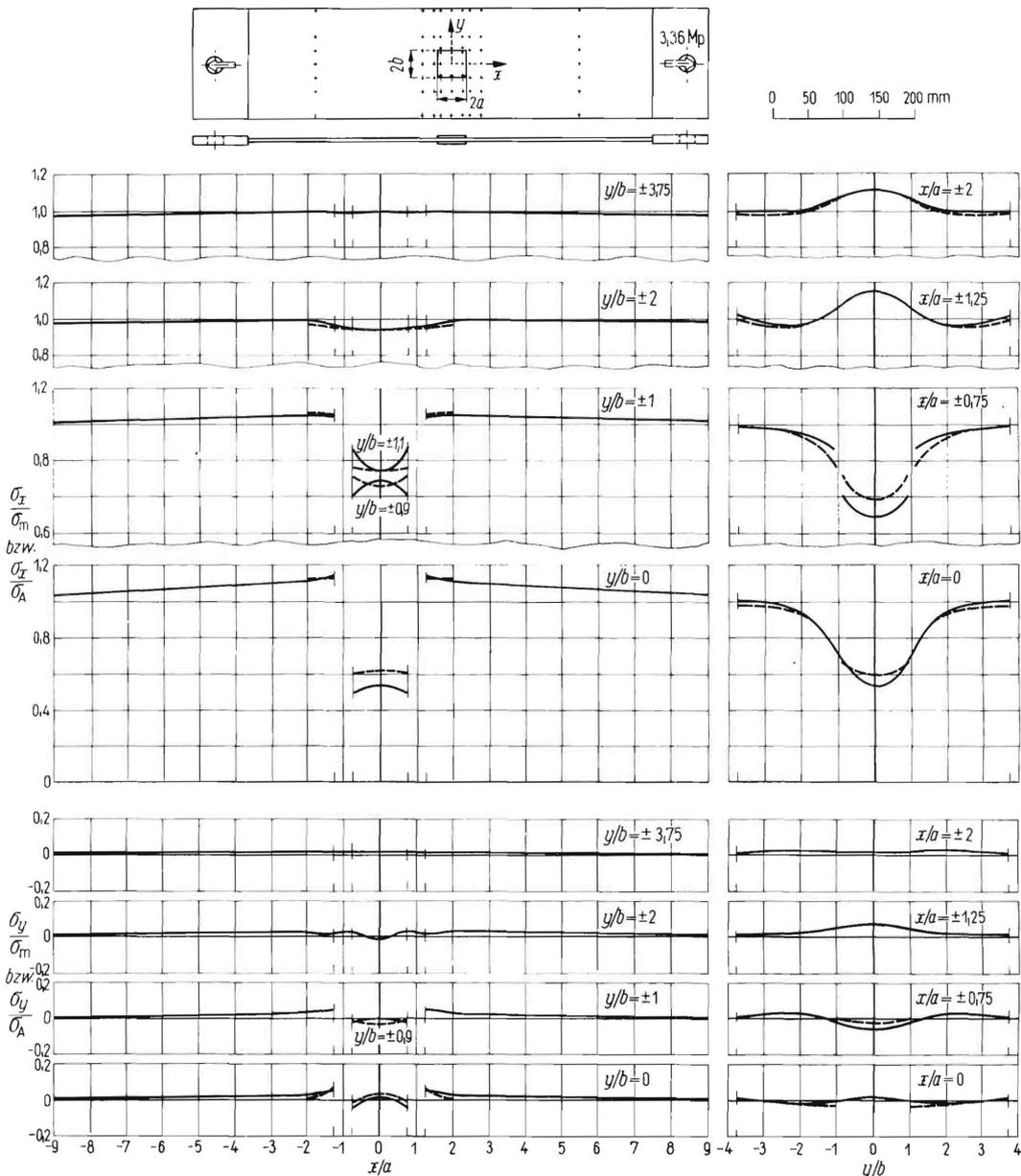


Bild 42. Vergleich der gemessenen Spannungen σ_x und σ_y (ausgezogene Linien) mit den entsprechenden errechneten Spannungen (gestrichelte Linien) bei einem Seitenverhältnis des Pflasters $a/b = 1,0$.

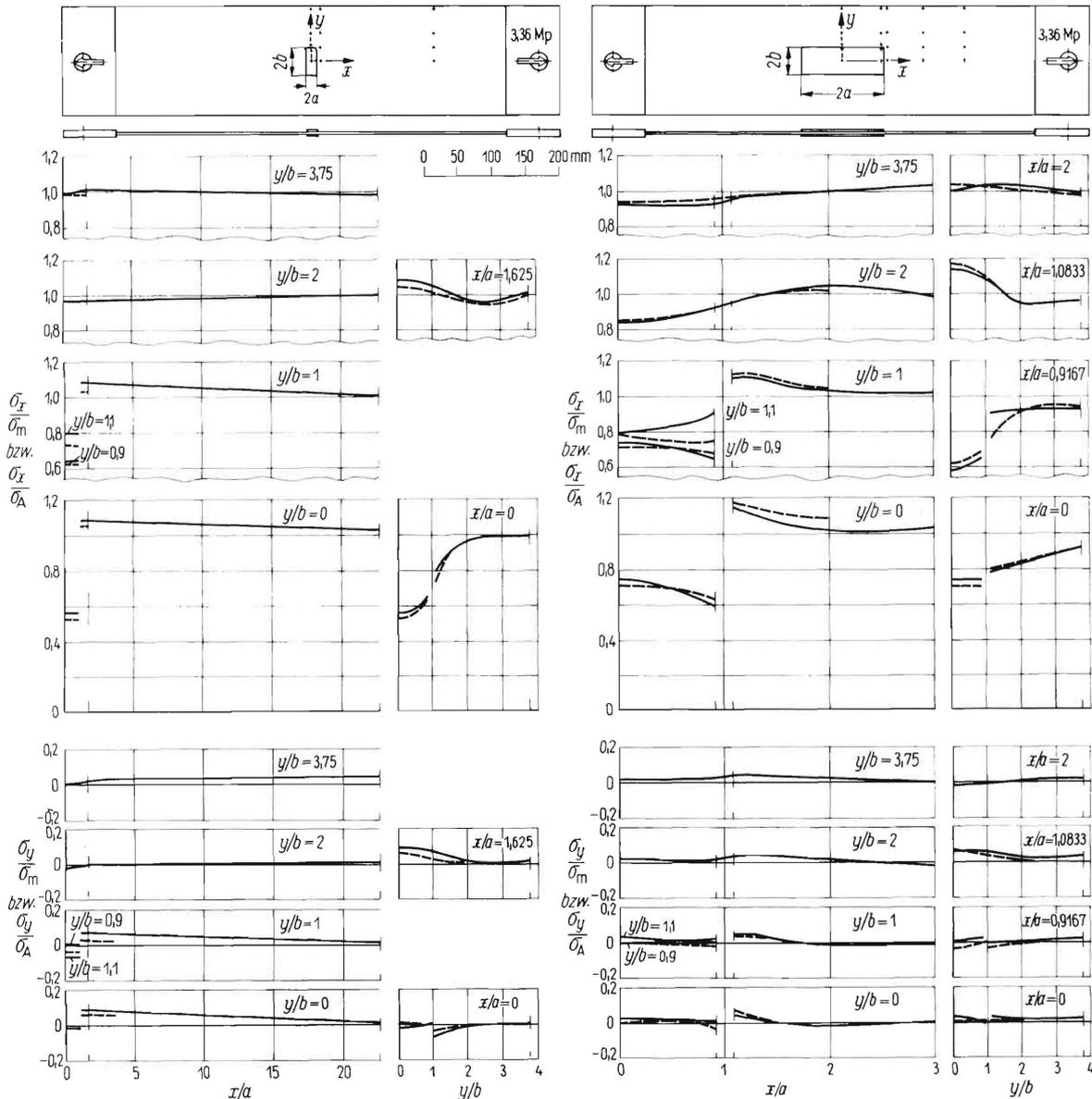


Bild 43. Vergleich der gemessenen Spannungen σ_x und σ_y (ausgezogene Linien) mit den entsprechenden errechneten Spannungen (gestrichelte Linien) bei Seitenverhältnissen des Pflasters $a/b = 0,4$ und $a/b = 3,0$.

3. Vergleich von errechneten und gemessenen Spannungen

Die in Bild 40 und 41 dargestellten Spannungsmittelwerte werden zum Zwecke des Vergleichs mit errechneten Spannungswerten auf die mittlere Spannung σ_m der Reihe $x/a = 22,5$ bzw. der Reihen $x/a = \pm 9$ bzw. der Reihe $x/a = 3$ bezogen. Diese mittlere Spannung beträgt bei dem Zugstab mit kurzen Pflastern ($a/b = 0,4$) $\sigma_m = 10,62 \text{ kp/mm}^2$, bei dem Zugstab mit quadratischen Pflastern ($a/b = 1,0$) $\sigma_m = 10,57 \text{ kp/mm}^2$, bei dem Zugstab mit langen Pflastern ($a/b = 3,0$) $\sigma_m = 10,69 \text{ kp/mm}^2$. Der Unterschied zu dem aus aufgebrachter Last und Nennquerschnitt des Zugstabes errechneten Wert von $10,49 \text{ kp/mm}^2$ erklärt sich aus nachweisbaren Abweichungen der tatsächlichen Blechdicke von der Nennblechdicke. Die bezogenen Spannungsmittelwerte σ_x/σ_m und σ_y/σ_m der Bilder 40 und 41 sind in den Bildern 42 und 43 als ausgezogene Linien dargestellt. Ihnen gegenübergestellt sind als gestrichelte Linien die errechneten Werte σ_x/σ_A der Bilder 26, 27 und 28 und die ebenfalls errechneten Werte σ_y/σ_A . Die gestrichelten Linien sind nur dort eingezeichnet, wo sie nicht mit den ausgezogenen Linien zusammenfallen, sie enden jeweils bei $x/a = \pm 2$.

Aus Bild 42 und 43 ist ersichtlich, daß errechnete und gemessene Spannungswerte zum Teil sehr genau übereinstimmen. Daß an manchen Stellen Unterschiede vorhanden sind, ist weniger auf

Mängel der Rechnung als auf Mängel der Versuchsdurchführung zurückzuführen. Anstelle der unendlich ausgedehnten Scheibe werden Zugstäbe verwendet, die Lötverbindung entspricht nur unvollkommen den bei der Rechnung gemachten Voraussetzungen, Form- und Krafteinleitungungenauigkeiten sind vorhanden.

4. Das Spannungsfeld in der Umgebung der Anschlußflächen

Es wird in den vorangegangenen Kapiteln gezeigt, daß das Spannungsfeld in einer gezogenen, unendlich ausgedehnten Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern außer in Umgebung der Anschlußflächen näherungsweise theoretisch dargestellt werden kann, sofern nur die Scheiben- und Pflasterdicken d_s und d_p genügend klein sind gegenüber der Länge $2a$ des Pflasters. Es wird darauf hingewiesen, daß in Umgebung der Anschlußflächen kein annähernd ebenes Spannungsfeld vorliegt. Auch wenn die Dicken von Pflaster und Scheibe klein sind gegenüber der Pflasterlänge, so sind diese Dicken dennoch endlich, und es müssen die Schnittkräfte aus der Mittelebene der Scheibe in die Mittelebene des Pflasters umgelenkt werden. Diese Umlenkung geschieht im allgemeinen über eine häufig als Hohlkehlnaht ausgebildete Schweiß- oder Lötnaht, die in Wirklichkeit an die Stelle der in der Theorie

angenommenen Anschlußfläche tritt. Im Bereich dieser Naht sind merkliche Spannungsstörungen zu erwarten, insbesondere werden der Ansatz und die Wurzel der Naht zu Spannungsspitzen Anlaß geben. Da die Spannungsspitzen für die zu erwartende Dauerschwingfestigkeit des Bauteiles maßgebend sind — die Ergebnisse dieser Arbeit werden ja im letzten Kapitel im Hinblick auf die Dauerschwingfestigkeit diskutiert — wird im folgenden versucht, unter Auswertung spannungsoptischer Versuche der Literatur und eigener spannungsoptischer Versuche Anhaltswerte für die Größe dieser Spannungsspitzen zu erhalten.

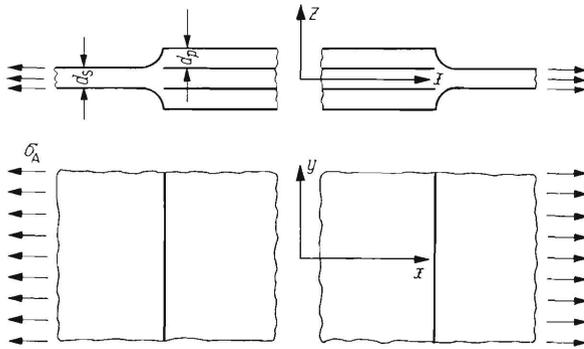


Bild 44. Scheibe mit unendlich breitem Pflaster.

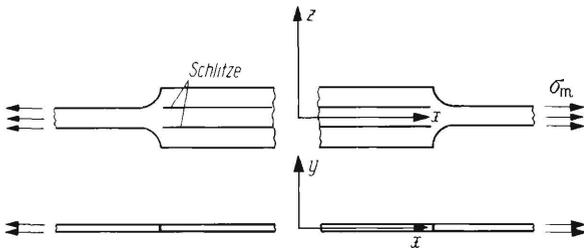


Bild 45. Doppelt abgesetzter Flachstab mit „Schlitzen“.

Es liegt nahe, von der Scheibe mit einem Pflaster, dessen Breite $2b$ unendlich ist, auszugehen, Bild 44. In einem solchen Bauteil liegt ein ebener Verzerrungszustand vor, es treten nur Verzerrungen in einer Ebene senkrecht zur y -Achse auf. Die Verteilung der Spannungen $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ in diesem Bauteil ist bekanntlich dieselbe wie die in einem doppelt abgesetzten Flachstab, in dem ein ebenes Spannungsfeld vorliegt, Bild 45. Dieser doppelt abgesetzte Flachstab weist „Schlitze“ auf, die den Auflageflächen zwischen Pflaster und Scheibe entsprechen.

Der doppelt abgesetzte Flachstab weist im Bereich der Naht ein Spannungsfeld auf, das mit dem in einem einfach abgesetzten Flachstab nach Bild 46 beobachteten Spannungsfeld übereinstimmt, wenn, wie vorausgesetzt, $2a \gg d_p$ und $2a \gg d_s$ (Prinzip von de Saint-Venant).

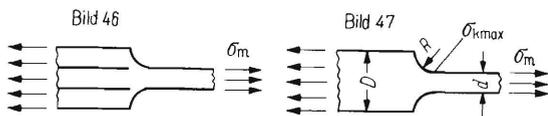


Bild 46. Einfach abgesetzter Flachstab mit „Schlitzen“.
Bild 47. Einfach abgesetzter Flachstab ohne „Schlitze“.

Aus der Literatur sind nur experimentelle Spannungsermittlungen an einfach abgesetzten Flachstäben ohne Schlitze nach Bild 47 bekannt. Ist σ_m die ungestörte Spannung des schmäleren Stabteiles, σ_{kmax} die höchste Spannung, die am Rand der Hohlkehle auftritt, dann läßt sich eine Formzahl γ_k definieren als das Verhältnis:

$$\gamma_k = \frac{\sigma_{kmax}}{\sigma_m} \tag{68}$$

Diese Formzahl γ_k wird von Timoshenko und Dietz [56], Maris [57], Coker und Filon [58], Weibel [59] und Frocht [60] für kreisförmige Hohlkehlen in Abhängigkeit von den Abmessungsverhältnissen D/d und R/d auf Grund spannungs-

optischer Versuche angegeben. Solakian [62] stellt fest, daß die genannte Formzahl bei spiralförmigen Hohlkehlen besonders klein ist.

Die Frage, inwieweit die Spannungsspitze der Hohlkehle sich ändert, wenn Schlitze in der Fortsetzung der Kante des schmäleren Stabteiles angebracht werden (Bild 46), läßt sich anhand folgender Überlegung klären. In der Fortsetzung der Kante des schmäleren Stabteiles wird die in Bild 48 oben dargestellte Spannungsverteilung geschätzt. Die Anbringung der Schlitze, die nur Druckspannungen übertragen können, ist verbunden mit der Anbringung der in Bild 48 unten dargestellten Belastung am Rand der Schlitze. Da $2a \gg d_p$ und $2a \gg d_s$, halten sich diese Randspannungen über die angrenzende Hohlkehlnaht im Gleichgewicht. Da die genannten Randspannungen verhältnismäßig klein sind und auf dem kürzesten Wege übertragen werden, entsteht eine ausgeprägte Spannungsspitze am Schlitzende, während die Spannungsspitze am Rundungsansatz nur geringfügig geändert wird, wenn die Schlitzenden genügend weit von der Hohlkehle entfernt bleiben. Die Formzahl des Flachstabes mit Schlitzen kann daher in erster Näherung der Formzahl des Flachstabes ohne Schlitz gleichgesetzt werden.

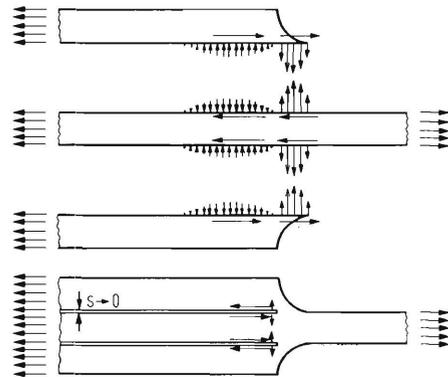


Bild 48. Geschätzte Spannungsverteilung im einfach abgesetzten Flachstab.

Im Zusammenhang mit der Frage nach der Größe der Formzahl für die Hohlkehle abgesetzter Flachstäbe sind die in Bild 49 und 50 dargestellten Ergebnisse eigener spannungsoptischer Versuche von Interesse. Die Versuche werden an einem doppelt abgesetzten Flachstab mit Schlitzen durchgeführt. Ein Mangel der Versuche ist es, daß die Bedingungen $2a \gg d_p$ und $2a \gg d_s$ nicht erfüllt sind. Aus den dargestellten Ergebnissen der Versuche ist zu ersehen, daß die Größe der Formzahl γ_k der Hohlkehle sich mit wechselnder Schlitzlänge nur wenig ändert, daß sie andererseits stark von der Form der Hohlkehle abhängt. Die flach ansteigende Hohlkehle mit Ausrundung am Ansatz der Hohlkehle ergibt eine besonders niedrige Formzahl.

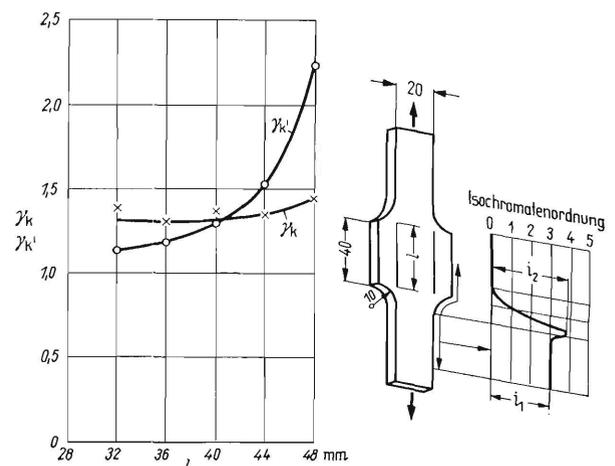


Bild 49. Spannungsoptisch ermittelte Formzahlen γ_k und γ_k' für einen doppelt abgesetzten Flachstab mit „Schlitzen“ in Abhängigkeit von der Schlitzlänge.

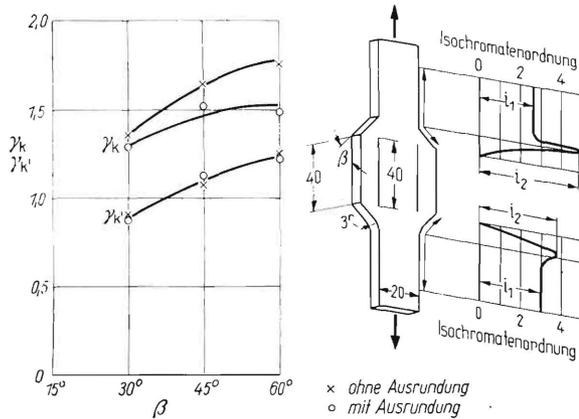


Bild 50. Spannungsoptisch ermittelte Formzahlen γ_k und γ_k' für einen doppelt abgesetzten Flachstab mit „Schlitzen“ in Abhängigkeit vom Anstiegswinkel der Hohlkehle.

In Bild 49 und 50 ist außerdem eine Formzahl γ_k' aufgenommen, die als Verhältnis der am Schlitzende beobachtbaren größten Isochromatenordnung zur Isochromatenordnung im ungestörten Zugstab definiert ist. Sie entspricht also dem Verhältnis der Hauptschubspannungen am Schlitzende zur Hauptschubspannung im ungestörten Zugstab. Da die am Schlitzende beobachtbare Isochromatenordnung aber von der Größe des verwendeten Modells abhängt, darf die Formzahl γ_k' nur zum Vergleich der Spannungen am Schlitzende bei gleicher Modellgröße dienen. Auch ein Vergleich mit der Formzahl der

Hohlkehle ist unzulässig. Theoretisch ergibt sich ja am Schlitzende eine unendlich große Spannung, und die tatsächlich an dieser Stelle auftretende Spannung hängt von der Größe gewisser Bausteine des Werkstoffes, bei Metallen von der Größe der Kristallite, ab. Neuber [62] gibt eine für errechnete, steile Spannungsspitzen sehr brauchbare Hypothese an, die aber im vorliegenden Fall einer spannungsoptisch gemessenen Spannungsspitze nicht weiterführt. Aus dem Verlauf der Kurven für γ_k' in Bild 49 und 50 ist lediglich ersichtlich, daß große Schlitzlängen, bei denen das Schlitzende der Hohlkehle nahekommt, sehr hohe Spannungsspitzen am Schlitzende zur Folge haben und daß die flach ansteigende Hohlkehle auch am Schlitzende besonders niedrige Spannungen zur Folge hat.

Es lassen sich also über die Größe der Spannungsspitzen im Bereich des Pflasteranschlusses eine ganze Reihe von Aussagen

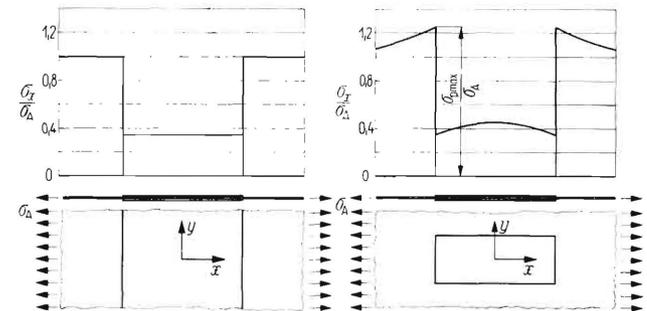


Bild 51. Verlauf der theoretisch ermittelten Spannungen σ_x bei unendlich und endlich großer Pflasterbreite.

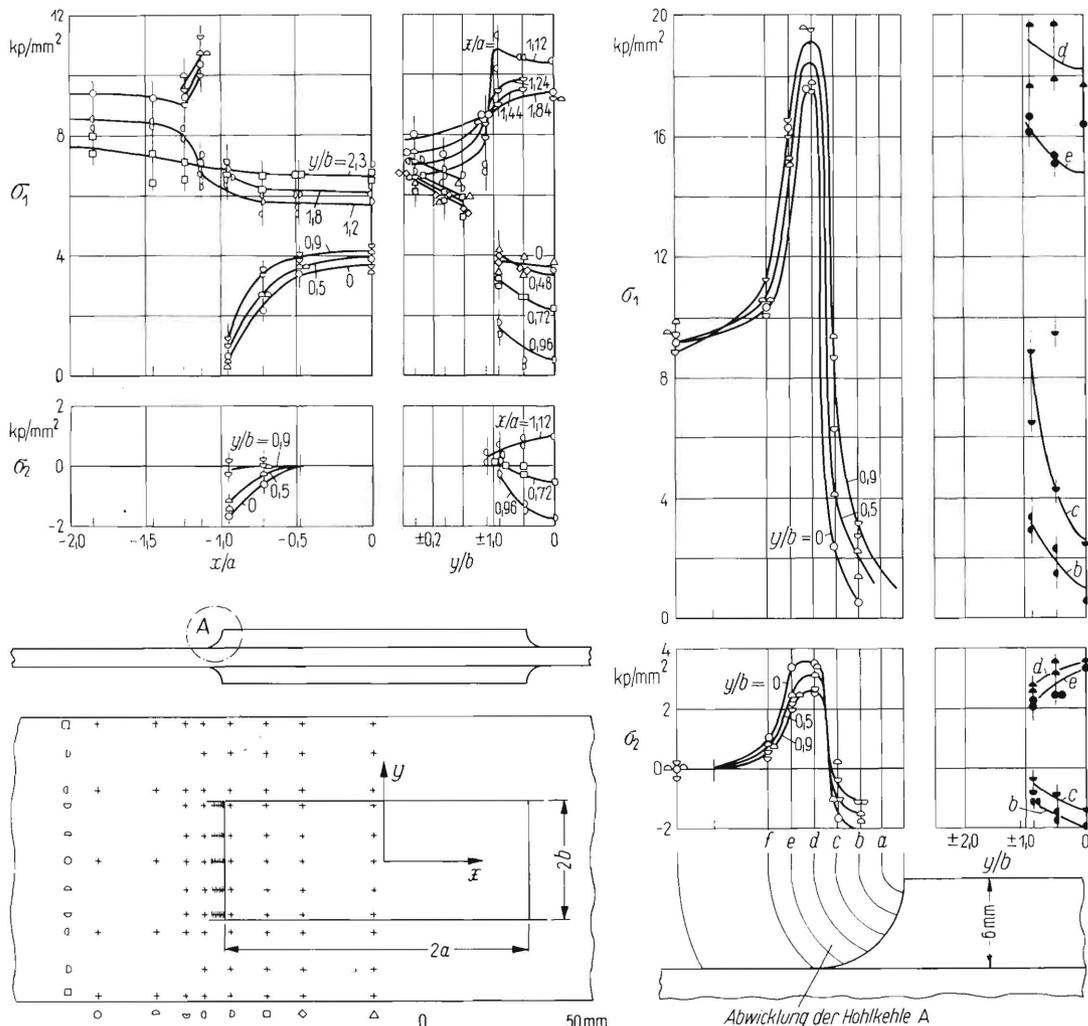


Bild 52. Gemessene Hauptspannungen σ_1 und σ_2 in einem Zugstab (s. Bild 53) mit beidseitigen, stirnseitig angeschweißten Laschen bei einer Zugkraft von 5 Mp.

machen, sofern nur die Pflasterbreite $2b$ unendlich groß ist. Im folgenden wird gezeigt, daß diese Aussagen in erster Näherung auch auf das Pflaster endlicher Breite $2b$ übertragen werden können.

Nach **Bild 51** unterscheidet sich das Pflaster endlicher Breite vom Pflaster unendlicher Breite darin, daß die nach dem in dieser Arbeit dargestellten Näherungsverfahren errechneten Spannungen σ_x in der unendlich ausgedehnten Scheibe vor dem Pflaster auf einen Maximalwert $\sigma_{p\max}$ ansteigen. Die Spannung $\sigma_{p\max}$ ist von der Lage des betrachteten Schnittes abhängig. Es läßt sich für die Scheibe mit einem Pflaster endlicher Breite eine Formzahl γ_p definieren als Verhältnis $\sigma_{p\max}/\sigma_A$:

$$\gamma_p = \frac{\sigma_{p\max}}{\sigma_A} \quad (69)$$

Da für die Ableitung der Näherungslösung angenommen wird, daß die Pflasterlänge $2a$ viel größer als die Scheibendicke d_s und auch viel größer als die Pflasterdicke d_p ist, muß die Pflasterlänge $2a$ auch viel größer sein als die die Nahtform kennzeichnenden Größen, etwa der Radius R bei einer kreisförmigen Hohlkehle. Der in **Bild 51** dargestellte Anstieg der Spannung σ_x ist dann gegenüber der Ausdehnung der Spannungsspitze eines entsprechenden abgesetzten Flachstabes sehr flach und es kann gesetzt werden

$$\sigma_m \approx \sigma_{p\max} \quad (70)$$

Aus den Gln. (68), (69) und (70) lassen sich folgende neue Gleichungen aufstellen:

$$\frac{\sigma_{k\max}}{\sigma_A} = \frac{\sigma_{k\max}}{\sigma_m} \frac{\sigma_{p\max}}{\sigma_A} \quad (71)$$

$$\gamma = \gamma_k \cdot \gamma_p \quad (72)$$

Die Größe der Spannungsspitzen im Bereich des Pflasteranschlusses ergibt sich also aus den nach dem Näherungsverfahren errechneten Maximalspannungen $\sigma_{p\max}$ und der Größe der Spannungsspitze des entsprechenden abgesetzten Flachstabes.

Vergleicht man die an entsprechenden technischen Bauteilen, also an Zugstäben mit „Laschen“, tatsächlich auftretenden Spannungsspitzen mit den nach Gl. (72) errechneten Spannungsspitzen, dann muß beachtet werden, daß bei technischen Bauteilen die Zugstabbreite oft in der Größenordnung der Laschenabmessungen liegt, die unendlich ausgedehnte Scheibe also nur unvollkommen angenähert wird und daß Ungenauigkeiten der Form und der Kräfteinleitung einen sehr starken Einfluß auf die Ausbildung des Spannungsfeldes haben. Letzteres geht aus den Spannungsmessungen an solchen Bauteilen von *Roš* und *Ceradini* [63] und von *Kloth* [64] hervor.

Ein solcher Vergleich wird für das in **Bild 52 und 53** dargestellte Spannungsfeld eines Zugstabes mit stirnseitig über eine Hohlkehlnaht abgeschlossen, beidseitigen Rechtecklaschen durchgeführt. Das genannte Bauteil weist die Abmessungsverhältnisse $a/b = 2,5$ und $d_p/d_s = 1,0$ auf.



Bild 53. Das Dehnungslinienbild des in **Bild 52** dargestellten Zugstabes (Verkleinerungsmaßstab 1:5,5). Der Zugstab ist mit Maybach-Reißlack überzogen. Die senkrecht zur größten Dehnung aufgetretenen Risse sind mit weißer Tusche nachgezogen.

Außerhalb des Bereiches der Anschlußnahten kann die Spannungsverteilung nach den Gln. (2), (3), (4), (5), (14), (21), (43), (46), (49), (50) in grober Näherung berechnet werden. In **Bild 54** sind errechnete und gemessene Spannungen gegenübergestellt.

Andererseits werden die in der Hohlkehle der Naht sich ergebenden Formzahlen $\gamma = 2,00$ in Nahtmitte und $\gamma = 2,17$ am Nahtende mit den nach Gl. (72) errechneten Formzahlen verglichen. Für einen dem Bauteil in **Bild 52 und 53** entsprechen-

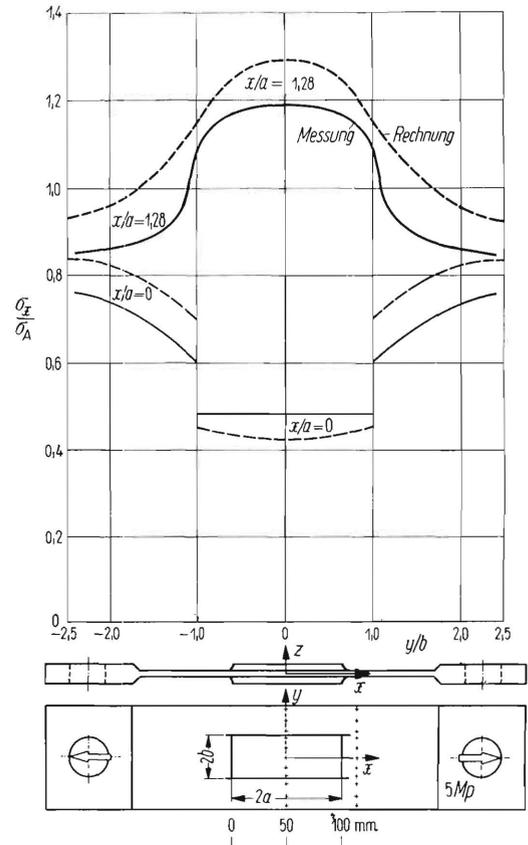


Bild 54. Vergleich von theoretisch und experimentell ermittelten Spannungen σ_x .

den abgesetzten Flachstab mit $D/d = 3,0$ und $R/d = 1,0$ ergibt sich nach *Rühl* [65] auf Grund einer Näherungsrechnung $\gamma_k = 1,20$ und nach *Frocht* [60] auf Grund spannungsoptischer Versuche $\gamma_k = 1,22$. Für die dem Bauteil in **Bild 52 und 53** entsprechende Scheibe mit Pflaster ergibt sich die Formzahl γ_p aus den obengenannten Gleichungen zu $\gamma_p = 1,35$ in der Mitte und $\gamma_p = 1,54$ am Ende des Pflasterandes. Nach Gl. (72) ergibt sich die Formzahl $\gamma = 1,63$ in Nahtmitte und $\gamma = 1,86$ am Nahtende. Der Unterschied zwischen errechneten und gemessenen Spannungswerten ist auf Form- und Meßungenauigkeiten zurückzuführen.

5. Konstruktive Folgerungen im Hinblick auf die Dauerschwingfestigkeit

In der Einleitung zu dieser Arbeit wird darauf hingewiesen, daß die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit im Hinblick auf die Dauerschwingfestigkeit interpretiert werden. Dabei wird davon ausgegangen, daß die wichtigste Maßnahme zur Erhöhung der Dauerschwingfestigkeit die ist, alle der Einfachheit halber bei ruhender Last und homogenem, isotropem, linear-elastischem Werkstoff ermittelten Spannungsspitzen durch konstruktive Maßnahmen möglichst niedrig zu halten.

Die in dieser Arbeit behandelte Scheibe mit Pflaster bzw. die entsprechende Ausführung der Praxis, der Zugstab mit Laschen weist am Nahtansatz und an der Nahtwurzel merkliche Spannungsspitzen auf, die Laschen stellen also bezüglich der Zeit- oder Dauerschwingfestigkeit keine „Verstärkung“ dar, wie man in der Schweißtechnik lange Zeit glaubte, als man Stumpfnahten mit Laschen abdeckte. An dauerschwingbeanspruchten Zug-elementen sollten also Laschen grundsätzlich vermieden werden. Oft werden aber Laschen von der Funktion des Bauteils vorgeschrieben, oder es sollen über Laschen Kräfte aufgenommen oder eingeleitet werden (z. B. Lagerung von Wellen und Achsen), oder es gelingt bei einem durch Querkraft gebogenen Stab eine tatsächliche Belastbarkeitserhöhung zu erreichen dadurch, daß man eine allseitig angeschweißte lange Lasche im Gebiet kleiner Biegespannungen beginnen läßt. In all diesen Fällen wird es

darauf ankommen, die bei ruhender Last und elastischem Werkstoffverhalten gemessenen Spannungsspitzen möglichst niedrig zu halten.

Aus den Ausführungen zum Rechteckpflaster geht hervor, daß kurze Laschen und Laschen mit kleiner Scheibendicke die Spannungsspitzen im Zugstab vor der Lasche herabmindern. Da das Spannungsfeld der unendlich ausgedehnten Scheibe nach den Bildern 17 bis 19 an den Laschenecken Schubspannungsspitzen aufweist, ist den Laschenecken besondere Beachtung zu schenken. Es ist zu erwarten, daß ein Abschrägen nach **Bild 55** oder noch besser ein Abrunden der Laschenecken nach **Bild 56** eine wesentliche Verkleinerung dieser Spannungsspitzen bringt.

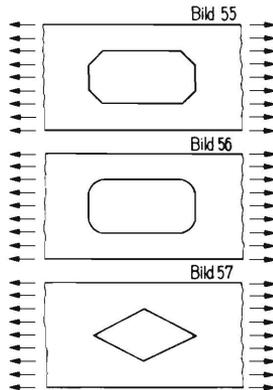


Bild 55. Rechteckpflaster mit abgeschrägten Ecken.

Bild 56. Rechteckpflaster mit abgerundeten Ecken.

Bild 57. Rautenpflaster.

Bekanntlich weist ja ein rechteckiger starrer Einschuß mit abgerundeten Ecken nach *Sawin* [14] in der Anschlußlinie keine besonders hohen Schubspannungen auf.

Wesentlichen Einfluß auf die Größe der Spannungsspitzen hat nach den Ausführungen des vorangegangenen Kapitels die Form der Naht und die Lage der Nahtwurzel. Eine flach ansteigende Naht mit Ausrundung des Nahtansatzes und hoher „Einbrand“ der Naht sind anzustreben. Ein Abschrägen der Laschen wirkt in dieser Richtung, wie man sich an Schnittflächen in Richtung der äußeren Zuglast leicht klarmacht. Allerdings bringt ein starkes Abschrägen, also eine Lasche nach **Bild 57**, keinen Vorteil. Diese Bauform entfernt sich von dem in dieser Arbeit behandelten Problem so stark, daß die Ergebnisse dieser Arbeit nicht mehr anwendbar sind.

Folgende konstruktiven Empfehlungen sind also angebracht. Rechtecklaschen auf Zuelementen sind möglichst kurz und möglichst dünn auszuführen, die Ecken sind abzuschärfen oder

abzurunden. Als Schweißnaht empfiehlt sich eine flach ansteigende Hohlkehlnaht, die um die Rundung oder die Abschrägung herumzuführen ist. Einbrandkerben am Rundungsansatz und mangelnder Einbrand an der Nahtwurzel sind zu vermeiden.

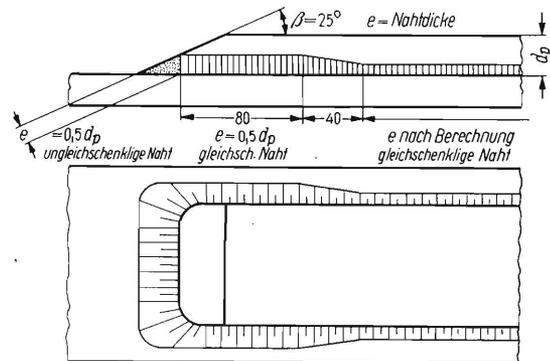


Bild 58. Ausbildung der Gurtplattenenden nach der Bundesbahnvorschrift für geschweißte Eisenbahnbrücken DV 848.

Die einzige Vorschrift, die heute in Deutschland für dauerschwingbeanspruchte Schweißverbindungen vorhanden ist, die Bundesbahnvorschrift für geschweißte Eisenbahnbrücken DV 848 [66] schreibt für Gurtplattenenden eine Ausführung nach **Bild 58** vor, die den oben aufgeführten Konstruktionsrichtlinien entspricht. Die Ausführung nach **Bild 58** ist auf Grund von Dauerschwingversuchen entwickelt worden, die der Deutsche Ausschuß für Stahlbau in den Jahren 1935 bis 1937 in der Materialprüfungsanstalt der Technischen Hochschule Stuttgart unter Prof. O. Graf im Zusammenhang mit der geplanten, obengenannten Bundesbahnvorschrift durchführen ließ [67]. Die Tatsache, daß die Beachtung der Spannungsfelder zu denselben Bauformen führt wie Dauerschwingversuche, unterstreicht die große Bedeutung der Spannungsermittlung für die konstruktive Entwicklung.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Spannungsfeld in der zugbelasteten, unendlich ausgedehnten Scheibe mit stirnseitig angeschlossenen, beidseitigen Rechteckpflastern unterschiedlicher Dicke und unterschiedlichen Abmessungsverhältnisses nach Methoden der klassischen Elastizitätstheorie bestimmt. Das angegebene Verfahren wird auf flankenseitig und ringsherum angeschlossene beidseitige Rechteckpflaster ausgedehnt. Die errechneten Spannungsfelder werden mit gemessenen Spannungsfeldern verglichen. Konstruktive Folgerungen im Hinblick auf die Dauerschwingfestigkeit werden aufgezeigt.

Formelzeichen

A_1, A_2, A_3 Funktionen	—	p	Größtspannung	kp/mm ²	σ	Normalspannung	kp/mm ²
B_1, B_2, B_3 Funktionen	—	p^*	Randspannung	kp/mm ²	σ_A	Normalspannung im Unendlichen	kp/mm ²
D Dicke	mm	q	Koordinatenabstand	mm	σ_B	Normalspannung in Pflastermittelpunkt	kp/mm ²
E Elastizitätsmodul	kp/mm ²	s	Schlitzdicke	mm	$\sigma_B + \sigma_C$	Normalspannung am Pflasterende	kp/mm ²
F Airysche Spannungsfunktion	kp	t	Koordinatenabstand	mm	τ	Schubspannung	kp/mm ²
P Kraft	kp	u	Verschiebung in x -Richtung	mm	τ	Schubspannung am Pflasterende	kp/mm ²
R Radius	mm	v	Verschiebung in y -Richtung	mm	φ	biharmonische Funktion	—
a halbe Pflasterlänge	mm	w	Koordinatenabstand	mm	$\Delta, \Delta', \Delta''$	Operatorzeichen	—
a_n komplexer Koeffizient	—	x, x', x^*	Koordinatenabstände	mm	Indices:	P Punkt	—
b halbe Pflasterbreite	mm	y, y', y^*	Koordinatenabstände	mm		k Kerbe	—
b_n komplexer Koeffizient	—	z	Koordinatenabstand	mm		m ganze Zahl 0, 1, 2, 3 ...	—
c Spannungskoeffizient	kp/mm ⁴	α	Winkel	—		\bar{m} gemittelter Wert	—
d Operatorzeichen	—	a_n	Koeffizient	—		max maximaler Wert	—
d Dicke	mm	β	Winkel	—		n ganze Zahl 0, 1, 2, 3 ...	—
d_{nm} Spannungskoeffizient	kp/mm ²	β_n	Koeffizient	—		p Pflaster	—
e Nahtdicke	mm	γ	Formzahl	—		r polare Koordinatenrichtung	—
f Verschiebungsfunktion	mm	γ_n	komplexer Koeffizient	—		s Scheibe	—
i_1, i_2 Isochromatenordnungen	—	δ	Operatorzeichen	—		t polare Koordinatenrichtung	—
l Länge	mm	δ_n	Koeffizient	—		w wahrer Wert	—
m Poissonsche Zahl	—	ϵ	Dehnung	mm/mm		x, y, z kartesische Koordinatenrichtung	—
		ϵ_n	Koeffizient	—			

Schrifttum

- [1] Melan, E.: Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ing. Arch. **3** (1932) Nr. 2 S. 123/29.
- [2] Reißner, E.: Note on the problem of the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet. Proc. Nat. Acad. Sci. **26** (1940) S. 300/05.
- [3] Pflüger, A.: Halbscheibe mit Randglied. Ein Spannungsgleichnis zum Problem der tragenden Linie. Z. f. angew. Math. u. Mech. **25/27** (1947) Nr. 7 S. 177/85.
- [4] Buell, E. L.: On the distribution of plane stress in a semi-infinite plate with partially stiffened edge. J. Math. Phys. **26** (1948) S. 223.
- [5] Benscoter, S. V.: Analysis of a single stiffener in an infinite sheet. J. appl. Mech. **16** (1949) Nr. 3 S. 153/69.
- [6] Koiter, W. T.: On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quart. J. Mech. appl. Math. **8** (1955) Nr. 1 S. 164/78.
- [7] Brown, E. H.: The diffusion of load from a stiffener into an infinite elastic sheet. Proc. Roy. Soc. **A 239** (1957) S. 296/310.
- [8] Pflüger, A.: Die Scheibe mit Linienpflaster. Abh. d. Braunschw. Wiss. Ges. **12** (1960) S. 66/76.
- [9] Buftler, H.: Scheibe mit endlicher, elastischer Versteifung. VDI-Forsch.-Heft 485. Düsseldorf: VDI-Verlag 1961.
- [10] Donnell, L. H. und Th. v. Kármán: Anniv. Vol., Cal. Inst. Tech. (1941) S. 293.
- [11] Hardiman, N. J.: Ph. D. Thesis, Univ. of London 1951, S. 82.
- [12] Hardiman, N. J.: Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate. Quart. J. Mech. appl. Math. **7** (1954) S. 226.
- [13] Kaiser, G.: Die Scheibe mit elliptischem Kern. Ing.-Archiv **30** (1961) Nr. 4, S. 275/87.
- [14] Savin, G. N.: Spannungserhöhung am Rande von Löchern. Berlin: VEB Verlag Technik 1956.
- [15] Gray, C. A. M.: Polynomial approximations in plane elastic problems. Quart. J. Mech. appl. Math. **4** (1951) S. 444/48.
- [16] Winslow, A. M.: Stress solutions for rectangular plates by conformal transformation. Quart. J. Mech. appl. Math. **10** (1957) S. 160/68.
- [17] Szelagowski, F.: Rectangular plate acted on by an external load. Bulletin de l'académie polonaise des sciences. Série des sciences techniques **10** (1962) Nr. 3, S. 91/99.
- [18] Durić, M.: Solution du problème de la plaque rectangulaire à l'aide des fonctions orthogonales des oscillations transversales d'une poutre. Publ. Inst. Math. Acad. Serbe des Sciences **3** (1950) S. 79/88.
- [19] Hajdin, N.: Contribution à la solution du problème plan. Publ. Inst. Math. Acad. Serbe des Sciences **5** (1953) S. 53/62.
- [20] Kuno, J.: Philosophical Magazine (1932).
- [21] Okubo, H.: Stress systems in an isotropic rectangular plate. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers **7** (1941) Nr. 28 I, S. 23/28 und **8** (1942) Nr. 33 I, S. 185.
- [22] Okubo, H.: Stress systems in an aeolotropic rectangular plate. Z. angew. Math. Mech. **21** (1941) Nr. 3, S. 162/76.
- [23] Girkmann, K.: Flächentragwerke. Wien: Springer-Verlag 1959. S. 89.
- [24] Parkus, H.: Der wandartige Träger auf drei Stützen. Österr. Ing. Arch. **2** (1948) S. 185/200.
- [25] Föppl, A. und L.: Drang und Zwang. München u. Berlin: Verlag Oldenbourg 1920.
- [26] Timoshenko, S.: The approximate solution of two-dimensional problems in elasticity. Philosophical Magazine **47** (1924) S. 1095/1104.
- [27] Timoshenko, S. und J. Goodier: Theory of elasticity. New York, Toronto, London: Mc Graw Hill 1950.
- [28] Goodier, N.: Compression of rectangular blocks and the bending of beams by non-linear distribution of bending forces. Trans. ASME **54** (1932) S. 173/83.
- [29] Conway, H. D., L. Chow und G. Morgan E.: Analysis of deep beams. Trans. ASME, J. appl. Mech. **73** (1951) S. 163/72.
- [30] Guzmán, A. M. und C. J. Luisoni: Solución variacional del problema de la viga rectangular simplemente apoyada de gran altura. Ciencia y Técnica **111** (1948) Nr. 555, S. 149, Buenos Aires.
- [31] Kantorovich, L. V. und V. J. Krylov: Approximate methods of numerical analysis. 1950.
- [32] Hamada, M.: Stress distribution in a rectangular plate subject to forces acting in its plane. Bulletin of JSME **1** (1958) Nr. 4, S. 367/74.
- [33] Wegner, U.: Ein neues Verfahren zur Berechnung der Spannungen in Scheiben. Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens **13** (1942) Nr. 4, S. 144/49.
- [34] Levin, G.: Neuer Ansatz zur Lösung von Problemen an rechteckigen Platten und Scheiben. Dipl.-Arb. am Mathem. Institut der TH Braunschweig (unveröffentlicht).
- [35] Bortsch, R.: Die Ermittlung der Spannungen in beliebig begrenzten Scheiben. Sitz.-Ber. Akademie d. Wiss. Wien, math.-naturwiss. Klasse, Abt. IIa, **138** (1929).
- [36] Bay, H.: Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetonwänden. Diss. TH Stuttgart 1931.
- [37] Bay, H.: Wandartiger Träger und Bogenscheibe. Stuttgart: Verlag Konrad Wittwer 1960.
- [38] Beyer, K.: Die Statik im Eisenbetonbau. **2**. Berlin 1934 S. 733.
- [39] Habel, A.: Zwei Spannungsaufgaben des Bunkerbaues. Ing. Arch. **5** (1934) S. 265.
- [40] Beer, H. und G. R. A. Piscitelli: Determination de las tensiones en el timpano de sistemas pegados. Technica Univ. Nacional de Tucuman **1** (1952) Nr. 6, S. 325.
- [41] Varvak, P. M.: Schriftenreihe über technische Mechanik. Institut für Bauwesen Kiew **3** (1936) S. 143 (russisch).
- [42] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differenzgleichungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1951. S. 443.
- [43] Mudrak, W.: Zur Randbedingung bei Scheibenlösungen mit Differenzen. Bauingenieur **31** (1956) S. 20.
- [44] Dubas, P.: Calcul numérique des plaques et des parois minces. Publ. d. l'inst. d. statique appliquée ETH Zürich (1955) Nr. 27.
- [45] Southwell, R. V.: Relaxation methods in engineering science. New York: Oxford Univ. Press 1940.
- [46] Southwell, R. V.: Relaxationsmethoden in der theoretischen Physik. New York: Oxford Univ. Press 1946.
- [47] Fox, L.: Mixed boundary conditions in the relaxational treatment of biharmonic problems (plain strain or stress). Proc. Roy. Soc. London **189 A** (1947) S. 535.
- [48] Fox, L.: Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations. Proc. Roy. Soc. London **190 A** (1947) S. 31.
- [49] Bleich, F.: Der gerade Stab mit Rechteckquerschnitt als ebenes Problem. Bauing. **4** (1923) Nr. 9, S. 255/59; Nr. 10, S. 304/07; Nr. 11, S. 327/31.
- [50] Hovgaard, W.: Stress distribution in welds. J. Math. Phys. **4** (1933) S. 56/247.
- [51] L'Hermite: Calcul des parois planes et des poutres-cloisons en béton armé. Génie civ. **102** (1933) S. 393.
- [52] Iyengar, Sundara Raja K. T.: Der Spannungszustand in einem elastischen Halbstreifen und seine technischen Anwendungen. Diss. Th Hannover 1960.
- [53] Fadle, J.: Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe. Ing.-Archiv **11** (1940) S. 125/49.
- [54] Love, A. E. H.: Theory of elasticity. Cambridge 1927, S. 214.
- [55] Tuhm, A., O. Svenson und H. Weiss: Neuzeitliche Dehnungsmeßgeräte. Forsch. Arb. Geb. Ing. Wes. **9** (1938) S. 229/34.
- [56] Timoshenko und Dietz: Stress concentration produced by holes and fillets. Trans. ASME **47** (1925) S. 199.
- [57] Maris, H. B.: Photoelastic investigation of the tensile test specimen. J. Opt. Soc. Am. **15** (1927) S. 203.
- [58] Coker und Filon: A treatise on photoelasticity. Cambridge Univ. Press 1931, S. 564.
- [59] Weibel, E. E.: Studies in photoelastic stress determination. Trans. ASME **56** (1934).
- [60] Frocht, M. M.: Factors of stress concentration photoelastically determined. Trans. ASME, J. appl. Mech. **57** (1935) S. 167.

- [61] Solakian, F.: Trans. ASME 56 (1934) S. 655.
 [62] Neuber, H.: Kerbspannungslehre. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1958. S. 164.
 [63] Roš, M. und G. Ceradini: Statische und Ermüdungsversuche mit aufgeschweißten und aus dem vollen Stahlmaterial herausgearbeiteten, verschieden geformten Laschenkörpern sowie mit überlapptem Stoß. Ber. Nr. 168 der Eidgen. Materialprüfungs- und Versuchsanstalt für Industrie, Bauwesen und Gewerbe, Zürich, Juni 1949.
 [64] Kloth, W.: Atlas der Spannungsfelder in technischen Bauteilen. Düsseldorf: Verlag Stahleisen m. b. H. 1961.
 [65] Rühl, K.: Die Tragfähigkeit metallischer Baukörper. Berlin 1952.
 [66] DV 848 Bundesbahnvorschrift für geschweißte Eisenbahnbrücken. Ausgabe 1955.
 [67] Graf, O.: Versuche über den Einfluß der Gestalt der Enden von aufgeschweißten Laschen in Zuggliedern und von aufgeschweißten Gurtverstärkungen an Trägern. Ber. d. Dt. Ausschusses für Stahlbau, Ausgabe B, H. 8. Berlin: Springer-Verlag 1937.

Der Arbeitsvorgang bei der Drahtwälzgege

Von **Walter Söhne**, Braunschweig-Völkenrode

Die Aufgaben der Geräte für die Nachbearbeitung des Bodens nach dem Pflügen bestehen darin, grobe Schollen zu Krümeln zu zerkleinern, die raue Ackeroberfläche einzuebnen, große Zwischenräume und Poren zu beseitigen und so für das Aufgehen der Saat optimale Umweltbedingungen zu schaffen.

Grobe Schollen können durch Walzen verschiedener Form, vor allem Rauwalzen (Stern-, Cambridge- und Croskillwalzen), die die Schollen von oben zerdrücken, durch von oben eindringende Stacheln und durch den Anstoß von horizontal sich bewegenden Eggenzinken zerkleinert werden. Eine raue Ackeroberfläche wird durch Eggen oder Schleppen eingeebnet. Die großen Zwischenräume zwischen den Schollen werden beim Zerkleinern derselben sowohl beim Walzen wie beim Eggen durch Krümel aufgefüllt. Zur Beseitigung großer Zwischenräume in einer Tiefe von 10–20 cm benutzt man den Untergrundpacker.

Neben diesen älteren, konventionellen Geräten haben nach dem Kriege besondere Wälzgegen aus Stachelsternen und zwischen diesen verspannten Drähten, die eine Drahtwalze bilden, sogenannte Kombikrümler, zunehmend an Bedeutung gewonnen, **Bild 1**. Im folgenden soll der Arbeitsvorgang dieser Geräte an Hand von Bahnkurven der Stachelspitzen und der Spanndrähte untersucht werden, um deren besondere, auffallend günstige Wirkung zu erklären.

Die Bahnkurve eines Punktes am Außendurchmesser eines mit Schlupf abrollenden Rades oder einer Walze, **Bild 2**, läßt sich durch die Gleichungen

$$x = r[(1 - \sigma) \omega t - \sin \omega t]$$

$$y = r(1 - \cos \omega t)$$

und die Geschwindigkeit durch die Gleichungen

$$v_x = r \omega (1 - \sigma - \cos \omega t)$$

$$v_y = r \omega \sin \omega t$$

darstellen. $r \omega t (1 - \sigma)$ ist der von der Achse zurückgelegte Weg und $r \omega (1 - \sigma)$ die Geschwindigkeit der Achse. ωt bedeutet den Winkel im Bogenmaß aus dem Produkt der Winkelgeschwindigkeit ω und der Zeit t .

Läuft ein Rad ohne Schlupf σ , so beschreibt die Bahnkurve eines Punktes auf dem Radaußendurchmesser in der Berührung mit einer starren Bodenoberfläche eine Zykloiden spitze. Diese Zykloiden spitze entartet zu einer Zykloiden schleife bei positivem Schlupf (antreibendes, ziehendes Rad) und zu einem offenen gekrümmten Bogenverlauf bei negativem Schlupf oder Rutsch (gezogenes Rad mit Bremswiderstand). Ein nur aus Stachelsternen oder nur aus einer Drahtwalze bestehendes Gerät würde annähernd schlupf- oder rutschlos abrollen. Bei einer Wälzgege, die aus beiden kombiniert ist, laufen die Stachelsterne mit Schlupf und die Drahtwalze mit Rutsch ab.

Eine Drahtwälzgege, auch Kombikrümler genannt, mit einem über die Spitzen gemessenen Durchmesser von 28,6 cm und einem rechnerischen Umfang von 89,6 cm legt bei verschiedenen Bodenzuständen und Geschwindigkeiten die in **Tafel 1** angegebenen Wege zurück; der im Mittel zurückgelegte Weg beträgt danach

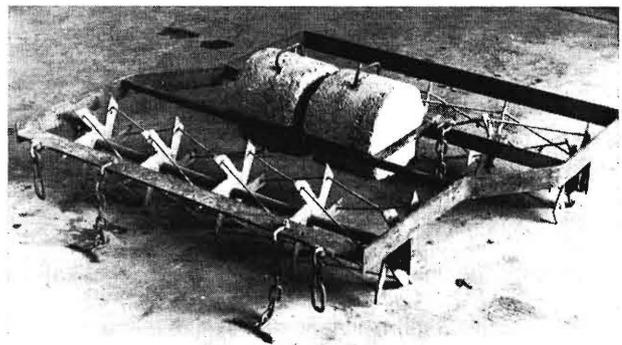


Bild 1. Drahtwälzgege (Kombikrümler).

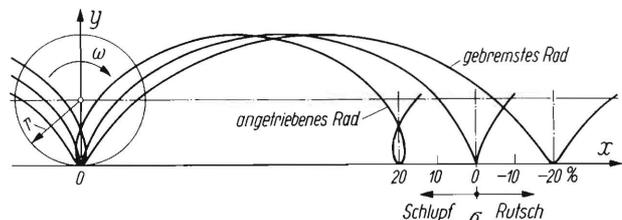


Bild 2. Zykloiden eines starren Rades auf starrer Fahrbahn, ohne und mit 20% Schlupf bzw. Rutsch.

Tafel 1. Zurückgelegter Weg der Wälzgege nach 10 Umläufen*.)

		Durchmesser cm	Umfang (errechnet) cm		
Stachelsterne		28,6	89,6		
Drahtwalze		21,0	66,0		
neben den Stachelsternen in der Mitte zwischen den Stachelsternen		19,4	60,9		
Zustand des Lößbodens	Belastung des Gerätes mit Zusatz- gewichten kp	zurückgelegter Weg Arbeitsgeschwindigkeit in km/h			
		0,6 cm	5,0 cm	7,0 cm	9,0 cm
abgesetzt, fest	0	800	770	770	835
abgesetzt, fest	50	790	790	790	835
gepflügt	0	790	770	750	790
gepflügt	50	765	755	780	770
gepflügt und geeegt	0	800	760	790	—
gepflügt und geeegt	50	790	770	770	770
gepflügt und geeegt	140	800	745	830	—

*.) Die Messungen wurden von Herrn Klügel, Institut für Bodenbearbeitung der FAL, durchgeführt.

Privatdozent Dr.-Ing. Walter Söhne ist Abteilungsleiter im Institut für landtechnische Grundlagenforschung (Direktor: Prof. Dr.-Ing. W. Batel) der Forschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode.