

DRUCKVERTEILUNG IM BODEN UND BODENVERFORMUNG UNTER SCHLEPPERREIFEN

Von Walter Söhne

In früheren Arbeiten des Verfassers [1 bis 3] wurde bereits über das mechanische Verhalten des Ackerbodens bei Belastungen, die Druckverteilung in der Berührungsfläche zwischen Reifen und Boden und die Verformbarkeit des Ackerbodens berichtet. Daran anschliessend soll im folgenden für einige Schlepper- und Ackerwagenreifen die Druckverteilung und die davon herrührende Bodenverdichtung bei verschiedenen Böden und verschiedenem Bodenzustand bestimmt werden.

Ein im Boden durch einen darüberrollenden Schlepper- oder Ackerwagenreifen entstehendes Druckspannungsfeld hängt von der Grösse der Last, der Grösse der Berührungsfläche zwischen Reifen und Boden und der Verteilung des Flächendruckes in dieser Berührungsfläche, sowie von der Bodenart, der Feuchtigkeit und der Lagerungsdichte des Bodens ab. Man kann die Spannungsverteilung im Boden mit hinreichender Genauigkeit durch Messungen oder durch Rechnung nach halb empirischen Formeln bestimmen, wie sie u. a. von Fröhlich [4] entwickelt worden sind.

Druckverteilung im Boden und in der Berührungsfläche

Als Ergebnis zahlreicher Druckmessungen wurde festgestellt, dass die Druckverteilung im Boden unter einer Last von der Druckverteilung in einem homogenen, isotropen, dem Hookeschen Gesetz gehorchenden Körper, die durch eine strenge Rechnung erfasst werden kann, abweicht. Je nachgiebiger ein Boden mit zunehmender Feuchtigkeit ist, und je geringer seine Kohäsion beim Übergang vom bindigen Boden zum Sandboden ist, umso mehr konzentriert sich die Druckspannung zur Lastachse hin. Fröhlich hat diese Tatsache berücksichtigt, indem er in die strengen Formeln von Boussinesq [4] den sogenannten Konzentrationsfaktor eingeführt hat. In einem Anhang am Schluss dieses Aufsatzes wird auf die „Berechnung der Druckverteilung im Boden“ und auf die besonderen Verhältnisse unter Reifen näher eingegangen. Im folgenden werden nur die Ergebnisse dieser rechnerischen Untersuchungen gezeigt.

Weiterhin ist die Verteilung des Flächendruckes in der Berührungsfläche zwischen Reifen und Boden

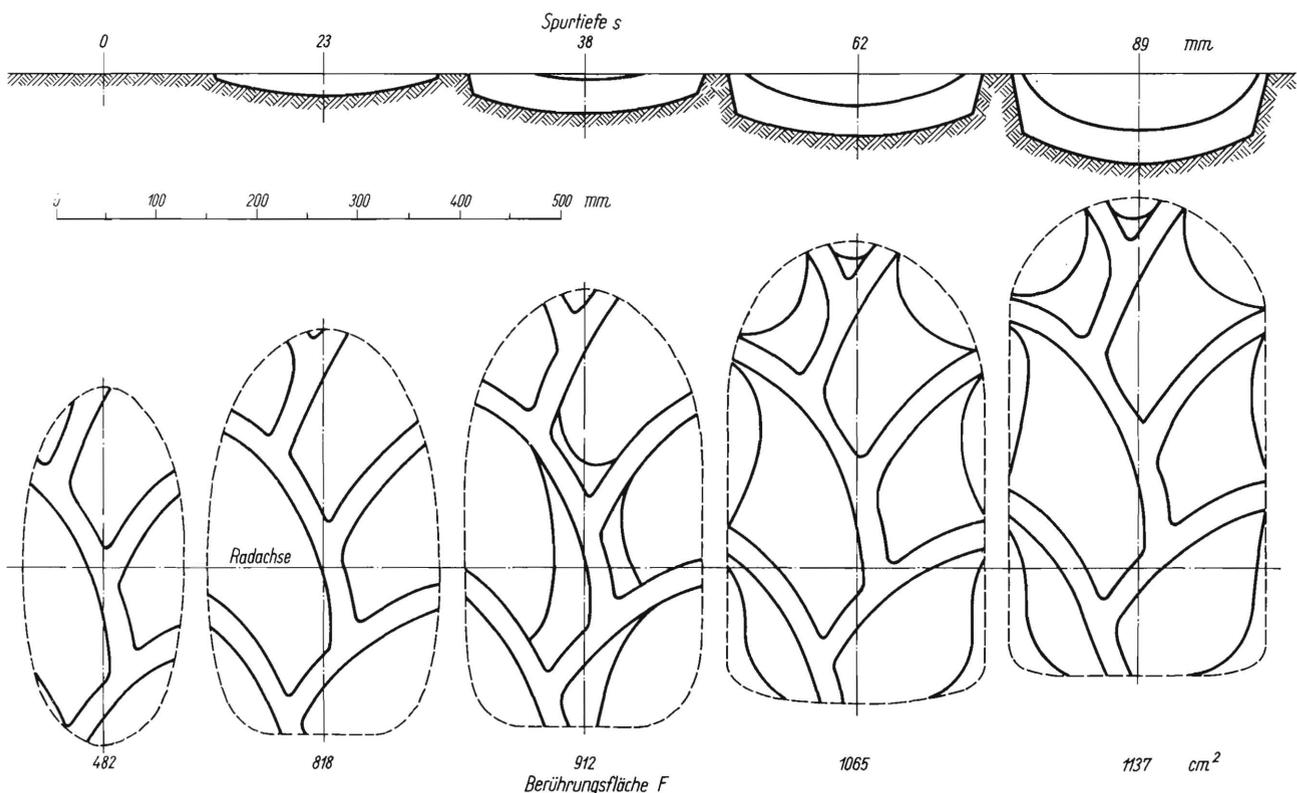


Bild 1. Ausgemessene Berührungsflächen zwischen Reifen und Boden bei verschieden nachgiebigem Boden.
Reifen 9-40 AS, 0,84 atü, 700 kg Radlast.

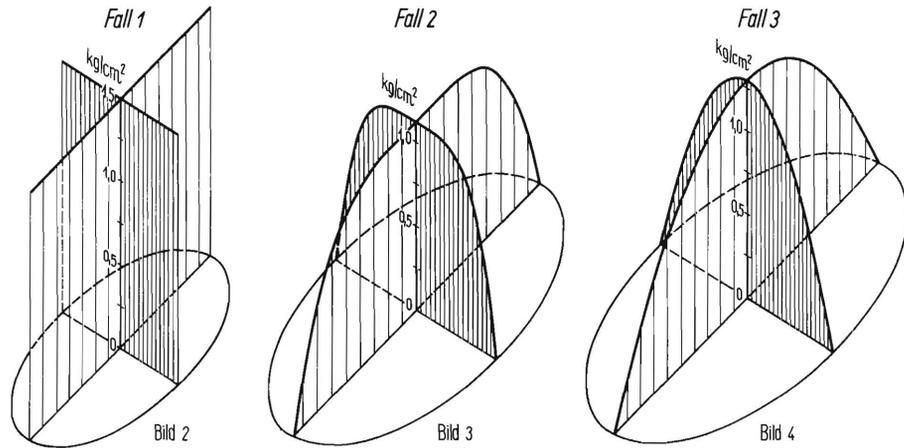


Bild 2 bis 4. Flächendrücke in der Berührungsfläche zwischen Reifen und Boden, gerechnet für den Reifen 9-24 AS, 0,84 atü und 500 kg Radlast (weitere Daten siehe Zahlentafel 1).

Fall 1: gleichmässiger Flächendruck (harter, trockener, dichtgelagerter Boden)

Fall 2: Flächendruck nach einer Parabel 4. Potenz (normal gelagerter und normal feuchter Boden)

Fall 3: parabolische Verteilung des Flächendruckes (sehr nachgiebiger, nasser Boden).

von Bedeutung. Dabei wird zunächst von unprofilierten Reifen ausgegangen. Der Einfluss der Profilierung wird weiter unten diskutiert. Nach Messungen von Kraft [5] kann man bei grossvolumigen Reifen auf hartem, trockenem Boden, der sich nur elastisch verformt, eine in erster Näherung gleichmässige Druckverteilung annehmen. Je nachgiebiger ein lockerer Boden ist, umso tiefer wird die Spur, die ein Reifen hinterlässt, und umso grösser wird die Berührungsfläche (Bild 1). Zwar nimmt der mittlere Flächendruck entsprechend ab. Man kann dann aber den Flächendruck in der Berührungsfläche, wie auch Messungen zeigen ([3] Bild 8), nicht mehr als gleichmässig annehmen. Vielmehr hängt der Verlauf des Flächendruckes in der Berührungsfläche dann auch von der Eindrückungstiefe des Reifens in den Boden ab. Erfolgt schliesslich bei nassem Boden neben der Bodenverdichtung unter dem Reifen auch ein seitliches Ausweichen, also ein Fließen des Bodens zu den Rändern der Berührungsfläche, dann wird an den Rändern der Flächendruck noch mehr abgebaut, und die Last konzentriert sich noch mehr zur Lastmitte hin. Damit ergeben sich Flächendrücke, wie sie etwa in Bild 2 bis 4 dargestellt sind. Für die folgenden Rechnungen wurden daher die Flächen-

drücke nach Bild 2, 3 und 4 angenommen und zwar für dicht gelagerten, harten, trockenen, bindigen Boden (Fall 1), der sich nur noch elastisch verformt, ein gleichmässiger Flächendruck, ferner für einen Ackerboden in normaler Lagerungsdichte und normaler Feuchtigkeit (Fall 2) eine Verteilung, die durch eine Parabel 4. Potenz dargestellt wird und bei der der maximale Flächendruck gleich dem 1,5-fachen des mittleren Flächendruckes ist, und schliesslich für einen sehr nachgiebigen, nassen Boden (Fall 3), der schon etwas plastisch fliesst, eine Verteilung, die durch eine Parabel dargestellt wird, und bei der der maximale Flächendruck gleich dem Doppelten des mittleren Flächendruckes ist. Das Integral des Flächendruckes über der Fläche ist natürlich in allen drei Fällen gleich.

Weiterhin wurden für Fall 1 der Konzentrationsfaktor $\nu = 4$, für den Fall 2 $\nu = 5$ und für Fall 3 $\nu = 6$ gewählt¹⁾. Es ist anzunehmen, dass die meisten Druckverteilungen bei verschiedenen Bodenarten mit verschiedener Lagerungsdichte und bei verschiedenen Feuchtigkeiten innerhalb der von den Fällen 1 und 3 dargestellten Grenzen liegen, und dass im allgemeinen Fall 2 die Druckverteilungen bei normaler Lagerungsdichte und Feuchtigkeit wiedergibt.

Zahlentafel 1. Daten der untersuchten Reifen

1) s. auch Anhang.

Reifen	Last kg	Reifen- innen- druck atfl	Fall 1					Fall 2					Fall 3				
			p_m kg/cm ²	p_{max} kg/cm ²	Berüh- rungs- fläche cm ²	Ellipsen- halb- messer a cm b cm		p_m kg/cm ²	p_{max} kg/cm ²	Berüh- rungs- fläche cm ²	Ellipsen- halb- messer a cm b cm		p_m kg/cm ²	p_{max} kg/cm ²	Berüh- rungs- fläche cm ²	Ellipsen- halb- messer a cm b cm	
7-24 AS	300	0,84	1,4	1,4	214	11,6	5,5	0,75	1,13	400	15,8	8,1	0,65	1,3	462	17,9	8,7
9-24 AS	500	0,84	1,4	1,4	357	14,9	7,6	0,75	1,13	667	20,4	10,4	0,65	1,3	769	21,9	11,2
11-28 AS	750	0,84	1,4	1,4	536	18,3	9,3	0,75	1,13	1000	25,0	12,7	0,65	1,3	1155	26,3	13,7
13-30 AS	1000	0,84	1,4	1,4	714	21,1	10,8	0,75	1,13	1333	28,8	14,7	0,65	1,3	1539	31,0	15,8
170-20AW	750	3,0	3,3	3,3	227	11,9	6,1	1,60	2,40	469	17,1	8,7	1,35	2,7	556	18,6	9,5
210-20AW	1500	4,0	4,4	4,4	341	14,6	7,4	2,30	3,45	653	20,2	10,3	1,90	3,8	789	22,2	11,3

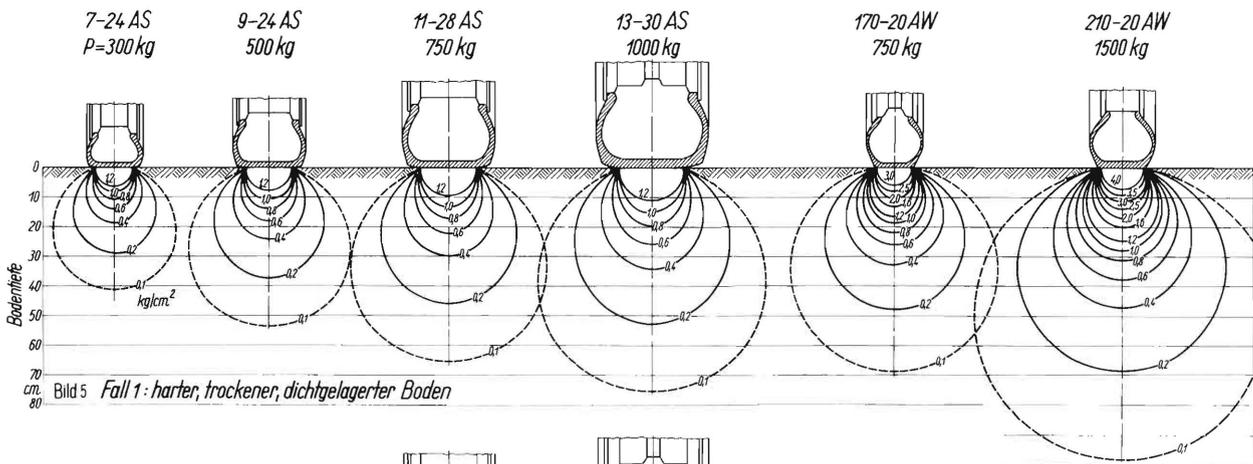


Bild 5 Fall 1: harter, trockener, dichtgelagerter Boden

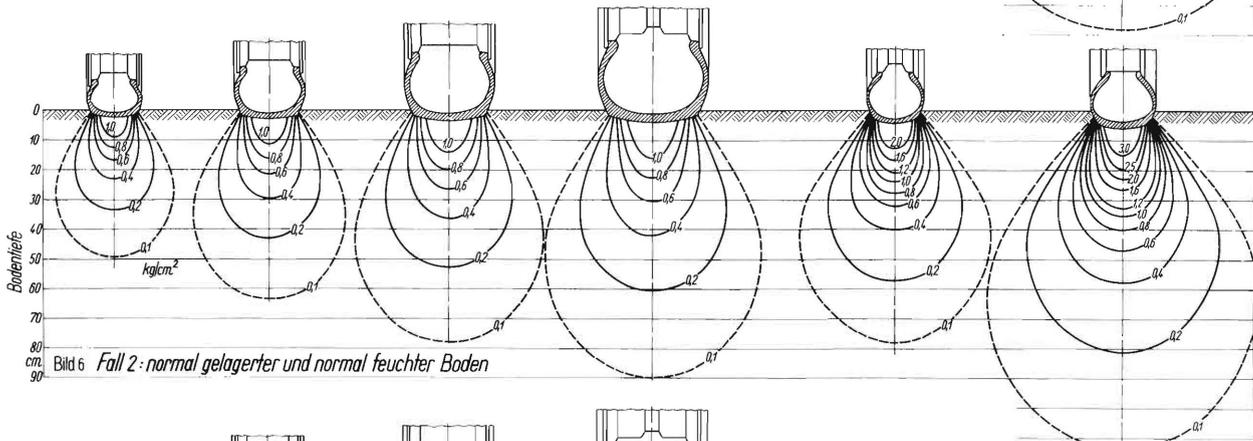


Bild 6 Fall 2: normal gelagerter und normal feuchter Boden

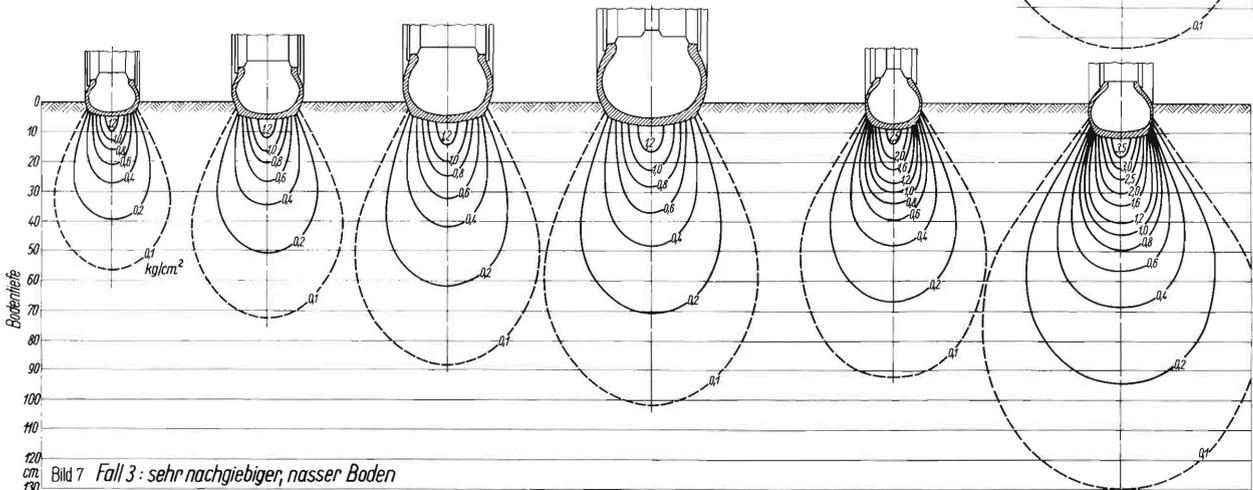


Bild 7 Fall 3: sehr nachgiebiger, nasser Boden

Bild 5 bis 7. Errechnete Linien gleicher Hauptdruckspannungen (Druckzwiebeln), bei verschiedenen Bodenzuständen und unter verschiedenen Schlepper- und Ackerwagenreifen (ohne die vom Bodengewicht herrührenden Druckspannungen gerechnet).

Die untersuchten Schlepper- und Ackerwagenreifen, sowie die der Rechnung zu Grunde gelegten Radlasten, Luftdrücke, die Grösse der Berührungsflächen und die mittleren und maximalen Flächendrücke für die drei Fälle der Druckverteilung in der Berührungsfläche gehen aus Zahlentafel 1 hervor.

Bild 5 bis 7 gibt nun die Druckverteilungen im Boden unter den verschiedenen Radlasten für die Fälle 1 bis 3 wieder. Dabei sind die Linien gleicher Hauptspannung eingezeichnet. Aus dem Bild ist zunächst zu ersehen, wieviel tiefer die Druckzwiebeln bei grösseren Radlasten herunterreichen, obwohl der Flächendruck p_m und p_{max} an der Oberfläche der gleiche ist. Weiterhin kann man dem Bild entnehmen, wie

sich die Festigkeit des Bodens auf die Form der Druckzwiebeln auswirkt. Bei hartem, trockenem, dicht gelagertem Boden (Fall 1) haben die Linien gleicher Hauptspannung annähernd Kreisform. Je nachgiebiger der Boden (von Fall 1 über Fall 2 nach Fall 3) wird, umso schlanker werden die Druckzwiebeln. Durch das seitliche Ausweichen des Bodens konzentriert sich der Druck zur Lastachse, und die Druckzwiebeln reichen tiefer herab. Ein Vergleich des Schlepperreifens 11-28 AS und des Ackerwagenreifens 170-20 AW zeigt, wieviel kleiner die Drücke unter dem grossvolumigen Schlepperreifen mit 0,84 atü Innendruck gegenüber dem kleineren Ackerwagenreifen mit 3,0 atü Innendruck sind.

In geringer Bodentiefe hat also der Flächendruck in der Berührungsfläche einen entscheidenden Einfluss, während es in grösserer Bodentiefe auf die Gesamtlast, also das Produkt aus Flächendruck mal Lastflächengrösse ankommt.

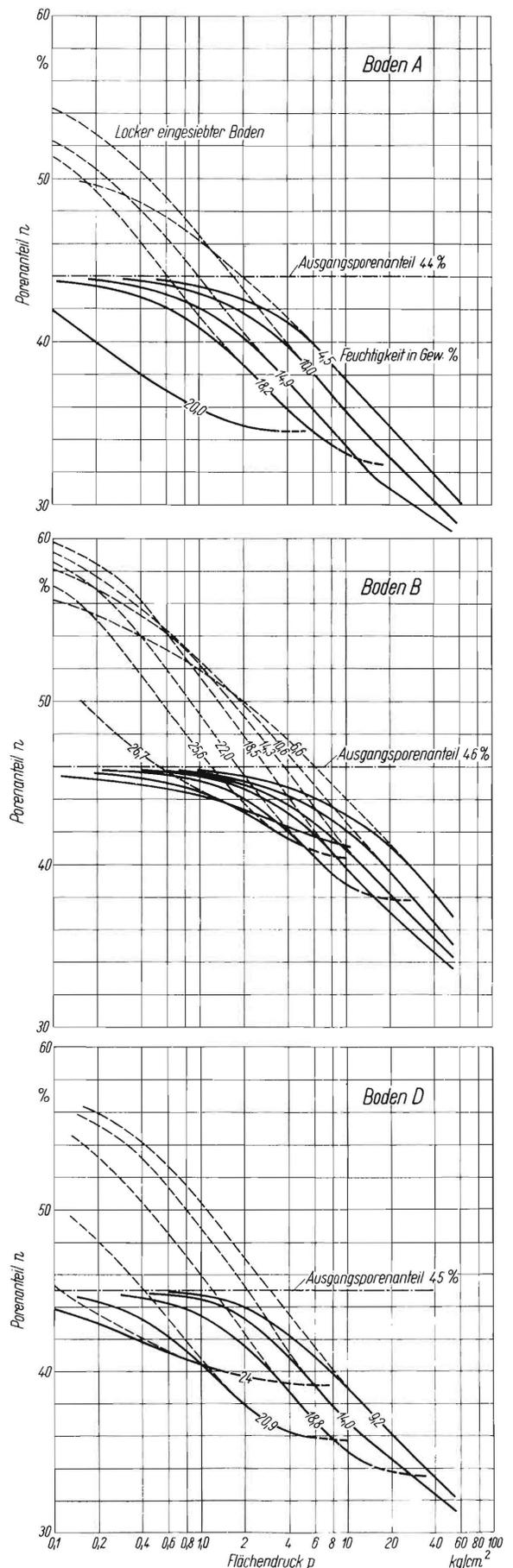
Bodenverdichtung unter Reifen

Als zweite Frage soll nun untersucht werden, wie sich der Boden als Folge der Druckspannung verformt, insbesondere wie er sich verdichtet, d.h. wie sich sein Porenvolumen verringert. In einer früheren Arbeit [2] waren schon die Ergebnisse zahlreicher Verdichtungsversuche verschiedener Böden mit verschiedener Feuchtigkeit mitgeteilt. Dabei war beobachtet worden, – und das wurde inzwischen durch eine Reihe weiterer Versuche bestätigt, – dass bei Ackerböden im allgemeinen die Verdichtungskurve des natürlich gelagerten Bodens mit zunehmendem Druck in die Kurve des locker eingesiebten Bodens hereinläuft. Lediglich bei reinem Sand sowie bei nassem, lehmigem Ton ergaben sich Abweichungen von dieser Gesetzmässigkeit.

In Bild 8 bis 10 sind nun die Verdichtungskurven von Ackerböden verschiedener Feuchtigkeit in natürlicher Lagerung, wie man sie einige Monate nach der Bearbeitung in der Ackerkrume antrifft, und in lockerem Zustand wiedergegeben. Unter Verdichtungskurve ist die Beziehung zwischen dem aufgebrauchten Druck und der dadurch hervorgerufenen Verringerung des Porenanteils zu verstehen. Dabei ist der Druck aus Gründen einer übersichtlichen Darstellung im logarithmischen Massstab wiedergegeben. In dem Bereich, in dem die Verdichtungskurven des natürlich gelagerten Bodens in die Kurven des locker eingesiebten Bodens eingelaufen sind, ergibt sich z.B. für den feinsandigen Lehm B mit 14 % Feuchtigkeit bei einem Druck von $5,5 \text{ kg/cm}^2$ ein Porenanteil von 44%. Erhöht man den Druck auf das zehnfache, also auf 55 kg/cm^2 , so verringert sich der Porenanteil um 10% auf 34%. Eine jeweilige Druckerhöhung in diesem Bereich von 25% bewirkt eine Verdichtung um etwa 1% Porenanteil. Einen solchen Dichteunterschied kann man aber gerade noch mit dem Pyknometer messen. Eine Verdoppelung des Druckes ruft eine zusätzliche Verdichtung von rund 3% Porenanteil hervor. Diese Kurven gelten für kurzzeitige Belastung, wie sie unter rollenden Rädern auftreten.

Bild 8 bis 10. Verdichtungskurven natürlich gelagerter Ackerböden bei verschiedenem Ausgangsporenanteil und verschiedener Feuchtigkeit.

Bodenart	Grob-sand %	Fein-sand %	Schluff %	Ton %
Boden A: lehmiger Sandboden	45	37	12	6
Boden B: feinsandiger Lehm Boden	12	54	26	8
Boden D: lehmiger Tonboden	18	25	31	26



Dabei lässt sich ein nasser Boden nur so weit verdichten, bis das Wasser allen Porenraum ausgefüllt hat. Die Kurven laufen dann in Horizontalen aus. Wenn bei lang andauernden Belastungen dem Wasser Zeit gelassen wird zu entweichen, ergibt sich eine weitere Verdichtung, auf deren Gesetzmässigkeit hier nicht eingegangen werden kann.

Wie entscheidend der Einfluss der Feuchtigkeit auf die Verdichtbarkeit der Böden ist, geht besonders aus der Darstellung in Bild 11 bis 13 hervor, bei der die Porenanteile aufgetragen sind, die sich bei konstantem Druck von 0,2, 0,5, 1, 2, 5 und 10 kg/cm² ergeben. Die Ergebnisse dieser Verdichtungsversuche sind nun auf die Druckspannungsfelder unter Reifen übertragen, damit ergeben sich die Verdichtungskurven nach Bild 14 bis 22. Diesen Bildern ist folgendes zu entnehmen:

a.) Trockene Böden in normaler Lagerungsdichte, die in der ganzen Ackerkrume weniger als 10% Feuchtigkeit enthalten, werden unter Schlepper- und Ackerwagenreifen nicht verdichtet. Eine solche geringe Feuchtigkeit ist jedoch nur sehr selten und nur bei unbewachsenem Boden anzutreffen.

b.) Nach Bild 14 wird der lehmige Sandboden A bei 10 Gew.% Feuchtigkeit, d.h. im Übergang zwischen trockenem Zustand und normaler Ackerfeuchtigkeit und bei einem normalen Porenanteil der Ackerkrume von 44% von den Schleppern um 1% (auf 43%) und von den Ackerwagen um 3 bzw. 4% auf 41 bzw. 40% Porenanteil verdichtet.

c.) Bei einem Ausgangsporenanteil von 50%, also im ziemlich lockeren Zustand, einige Wochen nach der Bearbeitung und bei einer höheren Feuchtigkeit von 16%, die man aber noch als normale Ackerfeuchtigkeit ansprechen kann, wird derselbe lehmige Sandboden A unter Schlepperrädern auf 41% und unter Ackerwagenrädern auf 38 bzw. 37% Porenanteil verdichtet (Bild 15). Unter der Voraussetzung, dass ein Porenanteil von 37–38% die Grenze darstellt, unterhalb derer eine Beeinträchtigung des Pflanzenwachstums zu erwarten ist, ist die Verdichtung unter Schlepperreifen mit niedrigem Luftdruck also noch völlig ungefährlich, während sie bei vollbeladenen Ackerwagen mit 6t Gesamtgewicht die Grenze schon überschreitet.

d.) Im nassen Zustand, also bei 19 und mehr Gew.% Feuchtigkeit, ist der Boden A dagegen sehr verdichtungsempfindlich und wird unter Schlepperreifen auf 36% und unter Ackerwagenreifen auf 35 bzw. 34% Porenanteil verdichtet (Bild 16). Bei schweren Schleppern ist die verdichtete Zone nicht nur breiter, sondern auch tiefer und reicht in den Untergrund herein. Bei vollbeladenen Ackerwagen ist diese Tiefenwirkung noch ausgeprägter. Jedoch verformt sich der Boden dabei so stark plastisch, dass man ihn in diesem Zustand wegen des hohen Rollwiderstandes kaum mit vollbeladenen Ackerwagen befahren wird. Ausserdem ist eine so hohe

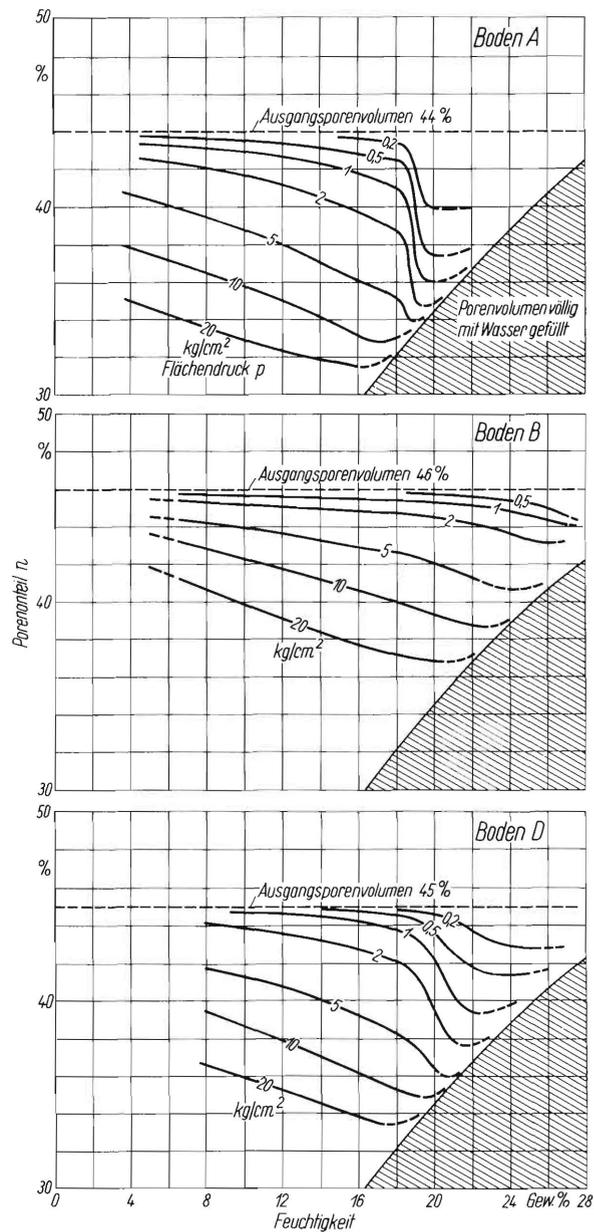


Bild 11 bis 13. Verdichtung natürlich gelagerter Böden bei konstanten Drücken in Abhängigkeit von der Feuchtigkeit.

Feuchtigkeit bei diesem lehmigen Sandboden nur nach schweren Regengüssen zu erwarten. Da die Sättigungsfeuchtigkeit, die der Boden mit eigener Kraft zu halten vermag, bei 18,0% liegt und das überschüssige Wasser schon nach 1–2 Tagen durchgesickert ist und der Boden dann wieder befahren und auch gepflügt werden kann, können schädliche Verdichtungen vermieden werden.

e.) Beim feinsandigen Lehm Boden B ist die ganze Kurvenschar in einen Bereich höherer Porenanteile gerückt als beim lehmigen Sandboden A, d.h. der Boden B ist viel weniger verdichtungsempfindlich. Im ziemlich trockenen Zustand bei 10,6% Feuchtigkeit und bei einer normalen Lagerungsdichte von 46% wird der Boden B unter Schlepperreifen nicht spürbar und unter schweren Ackerwagenreifen um nur 2% auf 44% Porenanteil verdichtet (Bild 17).

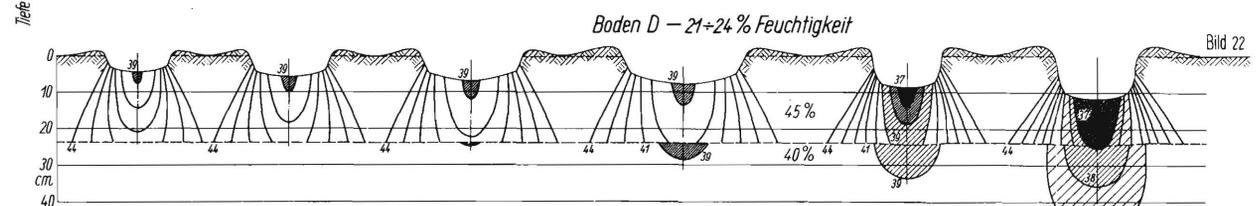
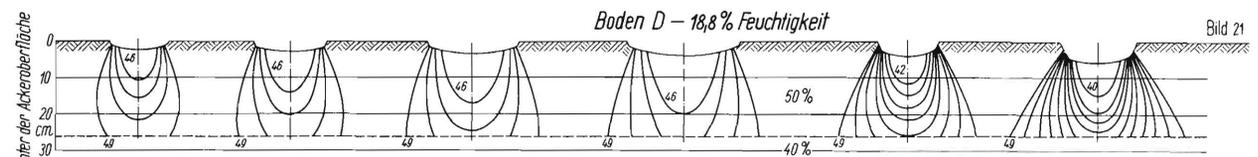
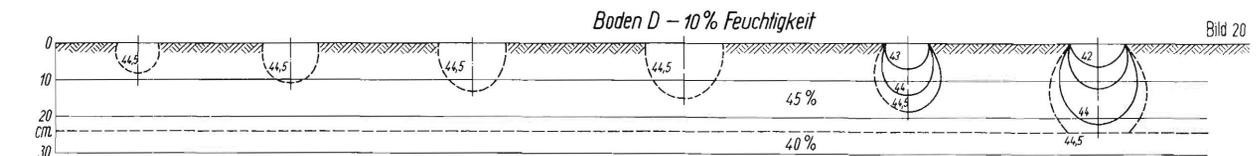
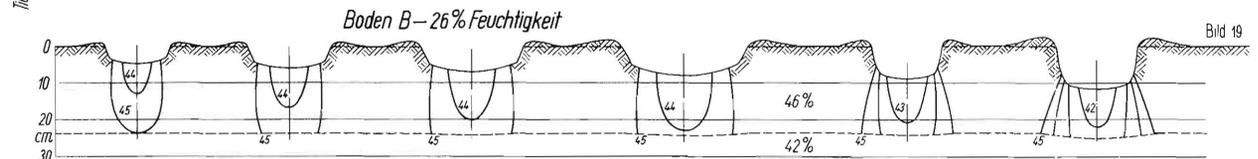
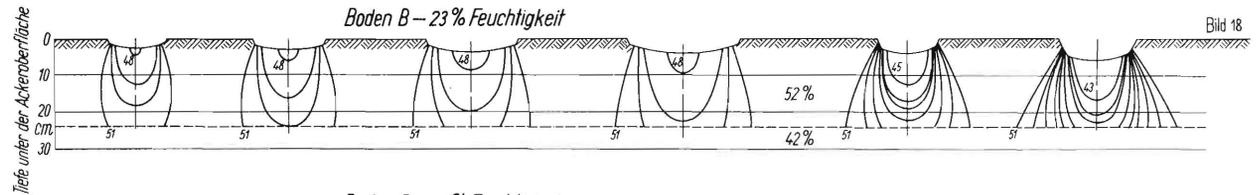
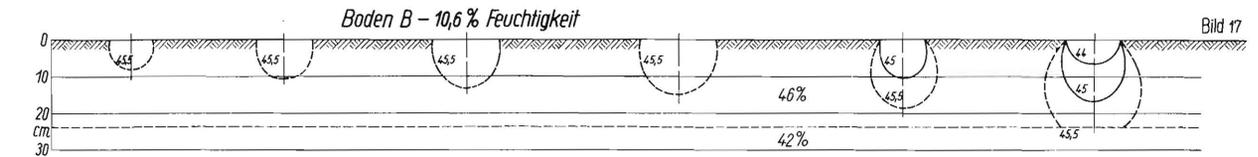
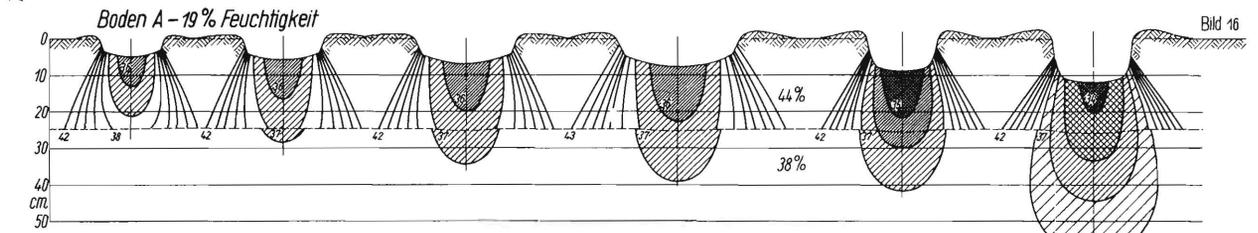
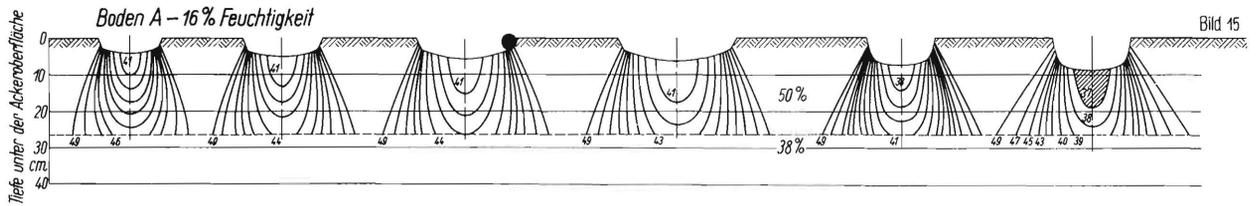
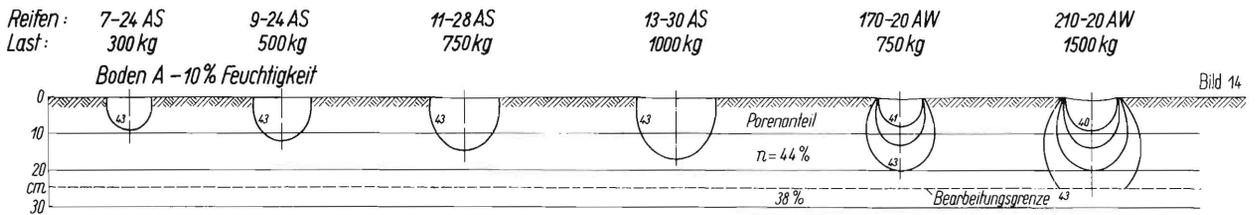


Bild 14 bis 22. Errechnete Linien gleicher Porenanteile unter Schlepper- und Ackerwagenreifen bei verschiedenen Bodenzuständen. Beim Vergleich des ursprünglichen Porenanteils mit dem Porenanteil unter den Reifen erkennt man die Verdichtung. Boden A: lehmiger Sandboden, Boden B: feinsandiger Lehmboden, Boden D: lehmiger Tonboden.

f.) Bei einem Ausgangsporenanteil von 52%, d.h. im ziemlich lockeren Zustand und bei 23% Feuchtigkeit, d.i. für den Boden *B* etwa die obere Grenze der normalen Ackerfeuchtigkeit, ergeben sich unter Schlepperreifen Verdichtungen auf nur 48% und unter Ackerwagenreifen auf 45 bzw. 43% (Bild 18).

g.) Im nassen Zustand schliesslich bei 26% Feuchtigkeit und bei normalem Ausgangsporenanteil von 46% wird der feinsandige Lehm Boden *B* unter Schlepperreifen auf 44% Porenanteil und unter Ackerwagenreifen auf 42% verdichtet (Bild 19). Daraus ergibt sich, dass dieser Boden auch im nassen Zustand nur wenig verdichtungsempfindlich ist. (Ganz ähnlich wie der lehmige Sandboden *B* verhält sich ein Lössboden *C*, der ebenfalls im nassen Zustand nur eine geringe Verdichtbarkeit zeigt.)

h.) Der untersuchte schwere, lehmige Tonboden *D* wird im trockenen Zustand bei 10% Feuchtigkeit und einem Ausgangsporenanteil von 45% nur unter Ackerwagenreifen um 2 bzw. 3% verdichtet (Bild 20).

i.) In lockerer Lagerung mit 50% Porenanteil und bei einer Feuchtigkeit von 18,8%, d.i. im oberen Bereich der normalen Ackerfeuchtigkeit, wird der Boden *D* unter Schlepperreifen auf 46% und unter Ackerwagenreifen auf 42 bzw. 40% verdichtet (Bild 21). Das ist unter Schlepperreifen noch völlig belanglos, unter vollbeladenen Ackerwagen aber schon recht beträchtlich.

k.) Im nassen Zustand (20 bis 24% Feuchtigkeit) schliesslich wird der Boden *D* unter Schlepperrädern auf 39% und unter vollbeladenen Ackerwagen auf fast 36% verdichtet (Bild 22). Dabei reicht die verdichtete Zone unter schweren Schleppern und unter Ackerwagen auch erheblich in den Untergrund herein. Die Grenze, unterhalb derer mit einer Beeinträchtigung des Pflanzenwachstums gerechnet werden kann, wurde infolge der geringeren Luft- und Wasserdurchlässigkeit dieses Bodens mit 39–40% Porenanteil angenommen. Sie liegt höher, wenn der Boden etwa an der Oberfläche austrocknet. Im Institut für Bodenbearbeitung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft wurden von *Czeratzki* zahlreiche Porenvolumenmessungen unter Schlepperreifen durchgeführt, deren Ergebnisse mit den auf Grund unserer Verdichtungsversuche errechneten Bodenverdichtungen im wesentlichen übereinstimmen.

Welche Fehler könnten nun bei den vorstehenden Untersuchungen aufgetreten sein?

1. Es wurde von unprofilierten Schlepperreifen ausgegangen. Auf hartem, trockenem Boden übertragen die Reifenstollen das Gesamtgewicht, und die Flächendrücke sind unter den Stollen 3–4 mal so hoch, wie in den angenommenen Lastflächen. Sie werden aber schon in einer Tiefe von 6–9 cm auf die gesamte Lastfläche verteilt; ausserdem ist der trockene Boden so unempfindlich, dass auch die erheblich höheren Flächendrücke keine wesent-

lichen Verdichtungen hervorrufen können. Auf nachgiebigerem Boden mit einer gewissen Spurtiefe verteilt sich die Last auf Reifenstollen und Nuten, und der Druck unter den Stollen ist nicht so sehr viel höher als unter den Nuten. Ein wirklich empfindlicher Boden im nassen Zustand verformt sich schliesslich so stark plastisch, dass vermutlich unter Stollen und Nuten nur noch ein geringer Druckunterschied vorhanden sein dürfte.

2. Die Messung des Druckes im Boden ist nicht ganz einfach. Eine Druckmessdose müsste, um exakt zu messen, ebenso hart wie der umgebende Boden oder unendlich dünn sein. Sie ist aber entweder härter als der umgebende Boden, was zu einer Konzentration der Kraftlinien zur Messdose führt oder weicher, was eine Umgehung der Messdose durch die Kraftlinien zur Folge hat. Ausserdem darf beim Einbringen der Messdose in den Boden die ursprüngliche Lagerungsdichte nicht stark gestört werden. Man muss also etwa mit einem dünnwandigen Stechzylinder von 2–3fachem Durchmesser der Messdose eine Bodenprobe bis zu der gewünschten Tiefe entnehmen, die Messdose in der Sohle einbringen und anschliessend die Bodenprobe möglichst ungestört in ihre ursprüngliche Lage zurück bringen. Den Schlitz für das Druckrohr zum Indikator muss man wieder auffüllen und dabei so fest stampfen, dass er etwa die gleiche Härte und Dichte wie der natürlich gelagerte Boden hat. Der ganze Vorgang lässt sich am leichtesten bei bindigem Boden mit normaler Ackerfeuchtigkeit und Dichte durchführen. Bei hartem, trockenem, bindigem Boden und bei lockerem Sandboden ergeben sich die grössten Schwierigkeiten. Aus diesem Grunde ist es nicht leicht, durch Messungen festzustellen, welcher Konzentrationsfaktor zu wählen ist und welche Druckverteilung in der Lastfläche vorhanden ist. Andererseits hat aber ein Fehler von 25% in der Druckmessung oder Rechnung nur einen maximalen Verdichtungsfehler von 1% Porenanteil zur Folge. Eine Genauigkeit von 25% bei der Bestimmung der Druckspannungen dürfte aber zu erreichen sein.

3. Die Belastungen unter einer hydraulischen Presse bei den Verdichtungsversuchen (Bild 8 bis 10) dauerten natürlich länger als die Belastungen unter einem rollenden Rad. In Bild 23 sind die Ergebnisse von Parallelversuchen bei 15,8 und 22,3% Feuchtigkeit, aber verschiedener Verformungsgeschwindigkeit bzw. Belastungsdauer wiedergegeben. Die Geschwindigkeit, mit der der Kolben in den Zylinder hereingedrückt wurde, betrug dabei ohne Unterbrechung 120 und 20 mm/min. Ausserdem wurden Verdichtungsversuche mit einer Eindrückungsgeschwindigkeit von 20 mm/min durchgeführt, wobei die Belastung bei einzelnen Laststufen 1/4, 1, 3, 9 und 27 min konstant gehalten

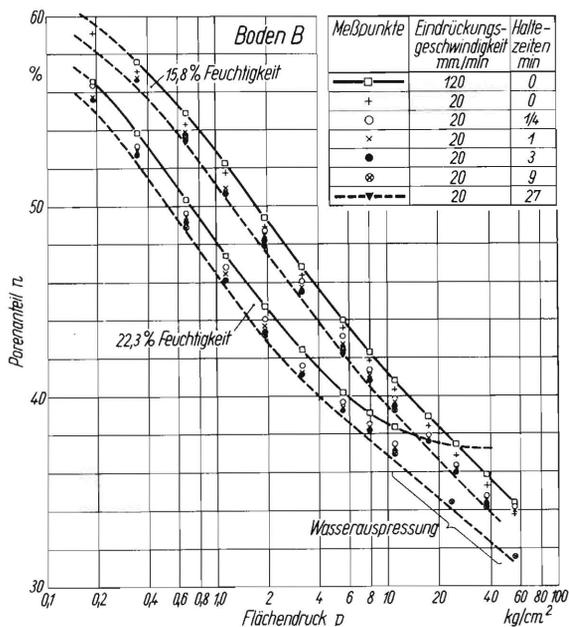


Bild 23. Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit auf die Verdichtbarkeit des lockeren feinsandigen Lehmbodens B bei zwei verschiedenen Feuchtigkeiten.

wurde. Die Gesamtunterschiede betragen hierbei etwa 1,6% Porenanteil. Infolge der längeren Belastungsdauer bei den Verdichtungsversuchen ergeben sich gegenüber der Verdichtung unter rollenden Rädern etwas zu ungünstige Werte.

- Die Verdichtungsversuche wurden bei verhinderter Seitenausdehnung gemacht, während der Boden auf dem Acker im lockeren und feuchten Zustand seitlich etwas ausweichen kann. Ausserdem können die horizontalen Verschiebungen infolge des Rollwiderstandes oder des Schlupfes zusätzliche Verdichtungen zur Folge haben. Die Fehler unter 3 und 4 heben sich zum Teil auf, so dass der verbleibende Fehler nicht allzu gross sein dürfte.
- Von Einfluss auf die Verdichtbarkeit ist es ferner, ob die Böden erst kurz vor dem Verdichtungsversuch bis zum gewünschten Wassergehalt angefeuchtet wurden oder ob eine gewisse Zeit zwischen Anfeuchten und Verdichten verging. Die Tonbestandteile brauchen nämlich eine gewisse Zeit, um das Wasser bei gleichzeitigem Quellen aufzunehmen. Dadurch erscheint der gerade angefeuchtete Boden „nasser“ zu sein als ein abgelagerter Boden mit gleicher Feuchtigkeit. Das Wasser wurde in feinen Tröpfchen auf den lockeren Boden aufgesprüht, wobei derselbe laufend gut gemischt wurde. Auf diese Weise wurde eine gleichmässige Feuchtigkeitsverteilung erzielt.

Der erst kurz vor dem Versuch angefeuchtete Boden lässt sich leichter verdichten als der abgelagerte Boden. Bild 24 zeigt den Unterschied zwischen beiden Versuchsreihen. Er beträgt im Mittel bei gleichem Druck und gleicher Feuchtigkeit etwa 1% Porenvolumen. Ein ähnlicher, noch

etwas grösserer Unterschied besteht zwischen einem Boden, der gerade bis zum gewünschten Wassergehalt angefeuchtet war, und einem von höherer Feuchtigkeit bis zum gewünschten Wassergehalt abgetrocknetem Boden.

Es ist nicht anzunehmen, dass die bisher untersuchten Ackerböden ein umfassendes Bild aller möglichen Verhältnisse wiedergeben. Es ist denkbar, dass es Böden gibt, die sowohl nach der günstigen wie auch nach der ungünstigen Seite von dem bisher gewonnenen Bild abweichen. Schliesslich müsste auch noch der Einfluss des Garezustandes, sowie des Humus- und Kalkgehaltes auf die Verdichtbarkeit untersucht werden.

Für den Landwirt ist die wichtigste Frage natürlich, wie sich die Bodenverdichtungen auf Pflanzenwuchs und Erträge auswirken, bzw. wie er durch richtigen Einsatz von Schlepper und Gerät Schäden vermeiden kann. Dabei bedarf die Frage, welche geringsten Porenanteile für die verschiedenen Getreide- und Hackfruchtarten noch zulässig sind, einer weiteren Untersuchung. Im Institut für Bodenbearbeitung wurden zahlreiche Untersuchungen durchgeführt, die sich vor allem mit der betriebswirtschaftlichen und der acker- und pflanzenbaulichen Seite des Problems beschäftigen [6].

Das plastische Fliessen des Bodens

Neben der Verdichtung kann gleichzeitig ein plastisches Fliessen des Bodens eintreten, wenn die Schubspannungen die Fliessfestigkeit überschreiten. Durch das Fliessen, also das Ausweichen des Bodens, erklärt sich auch der Abbau der Druckspannung

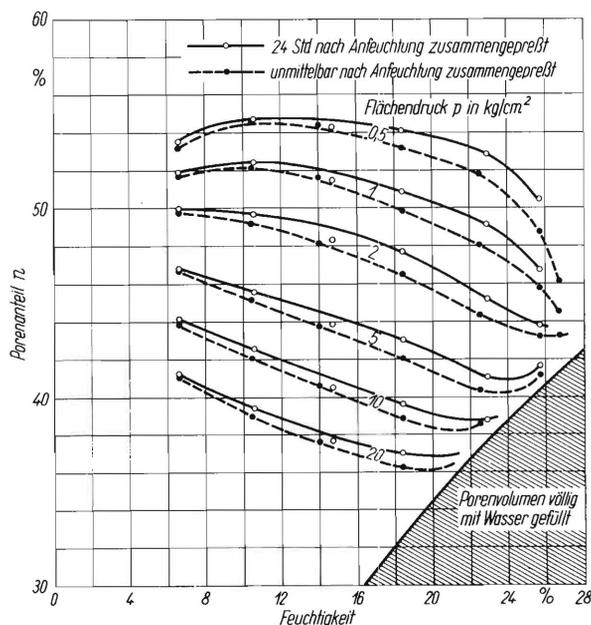


Bild 24. Vergleich der Verdichtbarkeit von lockeren Bodenproben gleicher Feuchtigkeit, die unmittelbar nach dem Anfeuchten bzw. 24 Std. nach dem Anfeuchten verdichtet wurden.

Boden B: feinsandiger Lehm

in der Randzone der Lastflächen. Dabei hat die Grösse der Lastflächen einen entscheidenden Einfluss. Bei starkem plastischen Fliessen nasser Böden bilden sich tiefe Radspuren aus. Dabei nimmt der Rollwiderstand von Ackerwagen und -maschinen stark zu, während die Zugkraft von Schleppern bei steigendem Schlupf abnimmt. Durch tiefe Radspuren können im bestellten Feld die Pflanzenwurzeln zerrissen werden; sie erschweren ausserdem spätere Arbeitsgänge und beanspruchen, wenn sie ausgetrocknet sind, die Maschinen durch Stösse.

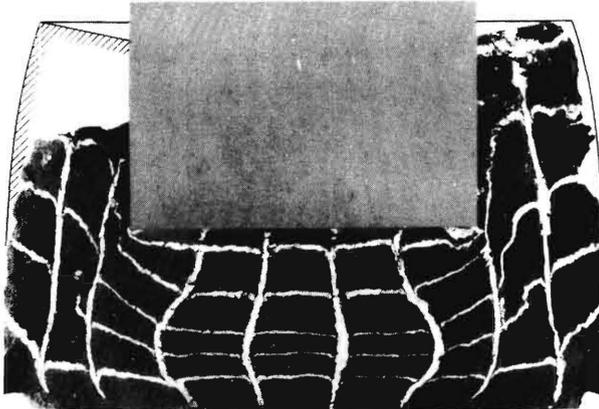


Bild 25. Plastische Bodenverformung einer mit Kreideschichten und Gipssträngen präparierten Bodenprobe unter einem Stempel in einem Zylinder.

Die Bestimmung des plastischen Fliessens in Abhängigkeit von der Schubspannung ist nicht ganz einfach, zumal sie im allgemeinen gleichzeitig mit der Verdichtung auftritt. Bei den Versuchen nach Bild 25 wurde in einem mit natürlich gelagertem Boden gefüllten Zylinder ein Stempel hereingedrückt, dessen Querschnitt etwa $\frac{1}{3}$ des Zylinderquerschnittes betrug. Dabei quoll der Boden zwischen Stempel und Zylinderwand hoch und nahm die Zylinderwand mit. Zwischen der Unterlage und Zylinderwand bildete sich ein Schlitz, durch den der Boden plastisch herausquellen konnte. Die aufgebrachte Kraft erreichte einen Maximalwert, wenn der Schlitz eine gewisse Breite erreicht hatte, und fiel dann wieder ab. Die auf diese Weise bestimmten Maximaldrücke hingen ganz entscheidend von der Feuchtigkeit ab, wie aus Bild 26 hervorgeht. Auch ein relativ trockener Boden verformte sich plastisch, aber die dazu notwendigen Drücke sind bei 10% Feuchtigkeit rund hundertmal so hoch wie bei demselben Boden mit 26 bis 28% Feuchtigkeit. Die Maximalwerte, aufgetragen über der Feuchtigkeit, für Bodenproben mit einem Ausgangsporenanteil von 43 und 48% zeigen, dass bei trockenem Boden mit grösserer Dichte die Kräfte erheblich höher waren, während sich bei feuchtem Boden kein wesentlicher Unterschied mehr ergab. Eine geringe Änderung der Feuchtigkeit wirkt sich mehr aus als eine Änderung der Belastungsgeschwindigkeit bzw. der Belastungsdauer. Die Ergebnisse dieser Versuche, das plastische Fliessen zu

bestimmen, hängen von der geometrischen Form der Versuchseinrichtung ab, können also nur als Vergleichswerte angesehen werden.

Zusammenfassung

Zunächst wurde mit Hilfe der Formeln von Fröhlich und ihrer Abwandlung auf die Verhältnisse unter rollenden Reifen die Druckverteilung im Boden unter Schlepper- und Ackerwagenreifen verschiedener Abmessungen und mit verschiedener Last errechnet. Die dabei verwendeten mathematischen und spannungsmechanischen Beziehungen sind in einem besonderen Anhang am Schluss dieser Arbeit wiedergegeben. Dabei wurde der Einfluss der Gesamtlast und des Reifennendruckes sowie der Reifenart und des Bodenzustandes auf Form und Grösse des Druckspannungsfeldes, dargestellt mit Hilfe der Druckzwiebeln, wiedergegeben. In Ergänzung zu früheren Versuchen wurde dann die Beziehung zwischen Druck und Verdichtung in Abhängigkeit von der Bodenart und Feuchtigkeit weiter untersucht und die Ergebnisse der Verdichtungsversuche auf die Druckspannungsfelder übertragen. Schliesslich wurde noch das plastische Fliessen eines Bodens in Abhängigkeit von der Feuchtigkeit untersucht, wobei sich bisher nur Vergleichswerte ergaben, die von der geometrischen Form der Versuchseinrichtung abhängen, aber den grossen Einfluss der Feuchtigkeit auf das plastische Fliessen zeigen.

Im ganzen ergab sich folgendes:

Die Druckzwiebeln werden bei gleichem spezifischen Flächendruck in der Oberfläche umso grösser und reichen umso tiefer herab, je grösser die Gesamtlast ist.

Der von Schlepper- oder Ackerwagenrädern ausgeübte Bodendruck und die Bodenverdichtung, d.h. die Verringerung des Porenvolumens, sind nicht proportional, sondern der Bodendruck steigt progressiv (logarithmisch) im Verhältnis zur Bodenverdichtung. Mit zunehmender Feuchtigkeit nimmt die Bodenverdichtung (bei gleichbleibendem Druck) zu, besonders ausgeprägt oberhalb der normalen Ackerfeuchtigkeit.

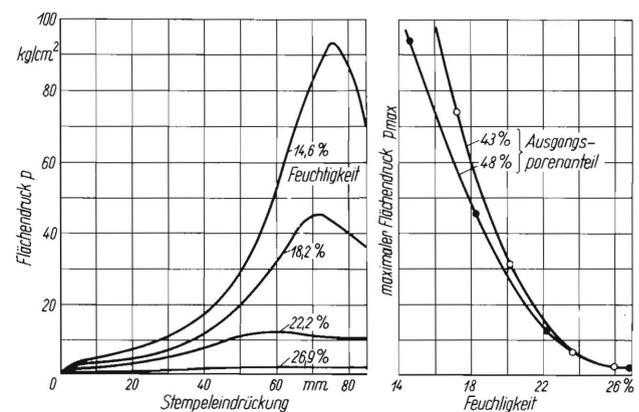


Bild 26. Plastische Bodenverformung des feinsandigen Lehm Bodens B bei verschiedener Feuchtigkeit.

Eine Beeinträchtigung des Pflanzenwachstums ist bei Sandböden etwa unterhalb 36–38% Porenanteil, bei feinsandigem Lehm, Löss und schwerem Lehm unterhalb 40% Porenanteil zu erwarten. Allerdings sind diese Grenzwerte bisher nicht genau bestimmt, hängen auch von den verschiedenen Pflanzenarten und dem sonstigen Bodenzustand ab und können nur als Anhaltspunkte gelten.

Solange der Boden trocken ist, also bei einer Feuchtigkeit bis 10 Gewichtsprozent, kenntlich an einer hellen Bodenfarbe, rufen auch sehr schwere Schlepper mit höherem Reifendruck sowie beladene Ackerwagen keine schädlichen Verdichtungen hervor.

Im Bereich normaler Ackerfeuchtigkeit, das ist der Bereich, in dem man den Boden gut pflügen kann, bei Sandböden von 8 bis 17 Gew.% und bei schwerem Lehm von 10 bis 20 Gew.%, ist bei Reifeninnendrücken von 0,8 atü bei Schlepperreifen ebenfalls keine schädliche Bodenverdichtung zu befürchten. Jedoch wird die zulässige Grenze bei vollbeladenen Ackerwagen schon erreicht.

Nasse Böden verhalten sich je nach der Bodenart verschieden. Sandböden können sehr stark verdichtet werden, wenn der Acker unmittelbar nach schweren Regengüssen befahren wird. Schon 1 bis 2 Tage später ist aber das Wasser durchgesickert, und der Boden kann befahren und auch wieder gepflügt werden.

Feinsandiger, milder Lehm und Löss sind ziemlich unempfindlich. Auch im feuchten Zustande werden sie nicht zu stark verdichtet.

Der von uns untersuchte lehmige Ton ist im nassen Zustande ziemlich verdichtungsempfindlich. Im Gegensatz zum Sandboden behält er eine hohe Feuchtigkeit sehr lange, u.U. das ganze Winterhalbjahr bis weit ins Frühjahr bei. Man muss also bei diesem Boden sehr vorsichtig sein, das gilt z.B. für die Bestellungsarbeiten im Frühjahr. Dabei können Zwillingsbereifung oder Gitterrad von Nutzen sein, vor allem wenn die oberen 5 bis 8 cm schon etwas abgetrocknet sind, darunter aber die Feuchtigkeit noch sehr gross ist. Jedoch sollte dabei der Reifendruck noch möglichst unter den Druck von 0,8 atü abgelassen werden, damit die Gitterräder mit ihrem etwas geringeren Durchmesser genügend zum Tragen kommen. Ungeeignet wegen der breiten Spur sind Gitterräder oder Zwillingsreifen allerdings für Saarpflegearbeiten. Da soll man mit möglichst grossen, aber schmalen Reifen fahren, damit die verdichtete Fläche gering bleibt.

Der Reifendruck soll auf gerade bearbeitetem und auf feuchtem Boden 0,8 atü möglichst nicht überschreiten. Auf trockenem Boden kann der Druck höher sein.

Schwere Schlepper und Ackerwagen können auf nassem empfindlichem Boden tiefer reichende Verdichtungen hervorrufen, die auch unter die Bearbeitungsgrenze gehen, also nicht so leicht wieder gut zu machen sind. Bei leichten Schleppern reicht die verdichtete Zone im allgemeinen nicht so tief.

ANHANG

Berechnung der Druckverteilung im Boden

Die theoretischen Betrachtungen über die Druckverteilung im Boden gehen aus von den Untersuchungen von *Boussinesq* [4], die allerdings nur für eine isotrope dem *Hooke* schen Gesetz gehorchende Masse gelten. In der Oberfläche eines unendlich grossen Körpers greife die Einzellast P (Bild 27) an. r, ϑ seien die Polarkoordinaten eines Punktes, in welchem die folgenden Spannungen herrschen

- σ_z lotrechte Normalspannung
- σ_h waagerechte Normalspannung in radialer Richtung
- σ_t waagerechte Normalspannung in tangentialer Richtung
- τ die zu σ_z und σ_h gehörige Schubspannung.

Unter der weiteren Voraussetzung, dass die Masse raumbeständig, die entsprechende *Poisson* zahl also $m = 2$ ist, gilt nach *Boussinesq*

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{3P}{2\pi r^2} \cos^3 \vartheta \\ \sigma_h &= \frac{3P}{2\pi r^2} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \\ \sigma_t &= 0 \\ \tau &= \frac{3P}{2\pi r^2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \end{aligned} \right\} (1)$$

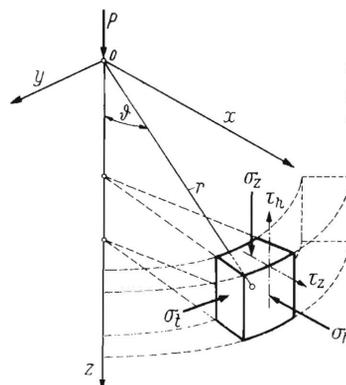


Bild 27. Spannungen an einem Bodenelement, hervorgerufen durch eine Punktlast, dargestellt in Zylinderkoordinaten.

Für die Normalspannung in Richtung des Fahrstrahls r , d.i. die polare Hauptspannung (Bild 28), ergibt sich

$$\sigma_r = \frac{3\rho}{2\pi r^2} \cos^2 \vartheta \quad (2)$$

Für $m = 2$ sind $\sigma_\vartheta, \sigma_t, \tau_r = 0$.

Auch bei grösseren Poissonzahlen als 2 weicht innerhalb eines Winkels $\vartheta = 45^\circ$ die Richtung der Hauptspannung σ_r nicht erheblich von den Fahrstrahlen zum Kräfteinleitungspunkt ab, woraus Fröhlich das Prinzip einer geradlinigen Kraftausbreitung als genügend genaue Näherung ableitet.

Die im Boden gemessenen Spannungen weichen von den nach Boussinesq errechneten Spannungen in der Weise ab, dass sie in der Lastachse und ihrer Umgebung grösser, weiter aussen aber kleiner sind. Durch Einführung des Konzentrationsfaktors ν in die Gleichungen (1) und (2) gelang es Fröhlich, die Spannungen bei verschiedenen Bodenarten und Zuständen allgemein darzustellen.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\nu\rho}{2\pi r^2} \cos^{\nu-2} \vartheta \\ \sigma_h &= \frac{\nu\rho}{2\pi r^2} \cos^{\nu-2} \vartheta \sin^2 \vartheta \\ \tau &= \frac{\nu\rho}{2\pi r^2} \cos^{\nu-1} \vartheta \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\sigma_r = \frac{\nu\rho}{2\pi r^2} \cos^{\nu-2} \vartheta \quad (4)$$

Je grösser ν wird, umso mehr konzentrieren sich die Spannungen zur Lastachse. Bild 29 zeigt die lotrechte Normalspannung σ_z unter einer Punktlast P in der Tiefe z bei verschiedenem Konzentrationsfaktor. Die Ursachen der Konzentration sind:

1. In der Berührungsfäche treten nach innen gerichtete Reibungsspannungen auf, die die Normalspannungen in der Nähe der Lastachse erhöhen. Diese Reibungsspannungen sind in der Berührungsfäche zwischen Reifen und Boden durch die Schrumpfung des Gummis sehr beträchtlich, wie auch Messungen von Kraft [5] zeigen.

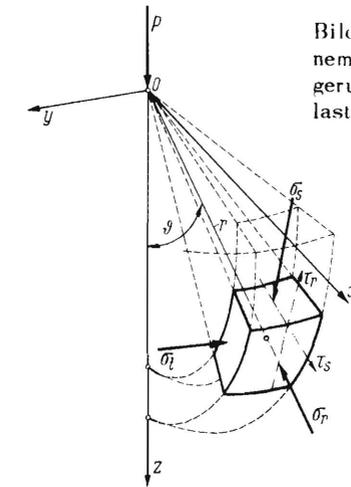


Bild 28. Spannungen an einem Bodenelement, hervorgerufen durch eine Punktlast, dargestellt in Polarkoordinaten.

2. Der Elastizitätsmodul E ist nicht konstant, sondern nimmt im allgemeinen mit der Tiefe zu. Beim Ackerboden ergibt sich meistens bei der Bearbeitungsgrenze ein Sprung zu grösserer Dichte und einem höheren Elastizitätsmodul, der dort ebenfalls nach innen gerichtete Reibungsspannungen zur Folge hat.
3. Der Boden verformt sich meistens nicht nur elastisch, sondern auch plastisch. Dies bewirkt am Rande der Lastfläche ein Ausweichen des Bodens und führt ebenfalls zu einer Konzentration der Spannungen unter der Lastachse.

Diese drei Gründe wirken sich je nach Bodenart und Feuchtigkeit mehr oder weniger stark aus. Setzt man die Konzentrationsfaktoren $\nu = 3-6$ ein, so erhält man die Formeln nach Zahlentafel 2.

Für $\nu = 3$ ergeben sich die Boussinesqschen Gleichungen bei $m = 2$.

Um ein Bild der im Halbraum unter einer Einzellast herrschenden Spannungen zu gewinnen, werden nun die Liniengleichere polare Hauptspannung σ_r bestimmt. Für die Verdichtung des Bodens ist die Hauptspannung σ_r massgebender als die lotrechte Normalspannung σ_z . In der Lastachse ist $\sigma_r = \sigma_z$. Weiter ausserhalb

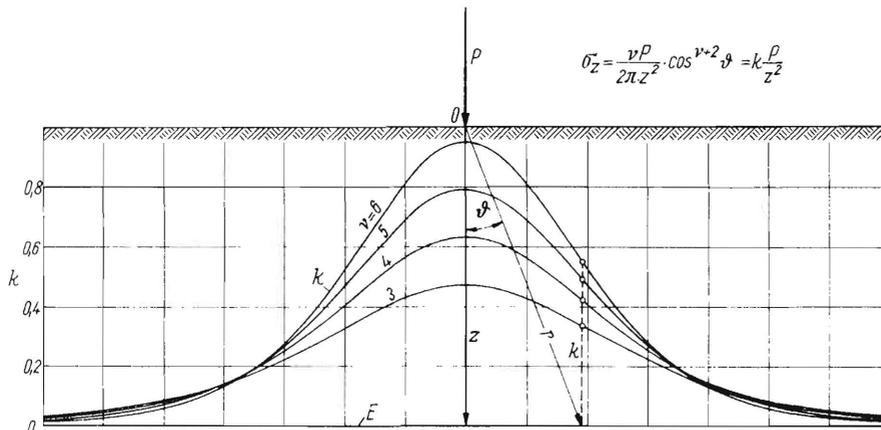


Bild 29. Lotrechte Druckspannungen σ_z im Boden in einer zur Oberfläche im Abstand z parallelen Schnittebene E infolge einer Punktlast P bei verschiedenen Konzentrationsfaktoren ν . Bei $\nu = 3$ ergibt sich die strenge Druckverteilung in einer homogenen isotropen, dem Hooke'schen Gesetz gehorchenden Masse.

r, ϑ Polarkoordinaten, $z = r \cos \vartheta$

Zahlentafel 2 (nach Fröhlich)

Konzentrationsfaktor ν	Polare Normalspannung σ_r	Lotrechte Normalspannung σ_z	Waagerechte Normalspannung σ_h	Schubspannung τ	Faktor für alle Spannungen bei Belastung P
3	$\cos^2 \vartheta$	$\cos^3 \vartheta$	$\sin^2 \vartheta \cos \vartheta$	$\sin \cos^2 \vartheta$	$3 P / 2 \pi r^2$
4	$\cos^2 \vartheta$	$\cos^4 \vartheta$	$\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$	$\sin \cos^3 \vartheta$	$2 P / \pi r^2$
5	$\cos^3 \vartheta$	$\cos^5 \vartheta$	$\sin^2 \vartheta \cos^3 \vartheta$	$\sin \cos^4 \vartheta$	$5 P / 2 \pi r^2$
6	$\cos^4 \vartheta$	$\cos^6 \vartheta$	$\sin^2 \vartheta \cos^4 \vartheta$	$\sin \cos^5 \vartheta$	$3 P / \pi r^2$

wird jedoch σ_r grösser als σ_z . Die Linien gleicher Hauptspannung, die sogenannten Druckzwiebeln, ergeben für den Konzentrationsfaktor $\nu = 4$ Kreise (Bild 30), für $\nu = 5$ und 6 ergeben sich etwas schlankere Druckzwiebeln (Bild 31 und 32). Die Gleichungen der Linien gleicher Hauptspannung ($\sigma_r = \text{const}$) ergeben sich aus (4):

Setzt man $\sigma_r = \frac{\nu \rho}{2\pi r^2} \cos^{\nu-2} \vartheta = \sigma_{r(\vartheta=0)} = \text{const}$

$$\sigma_{r(\vartheta=0)} = \frac{\nu \rho}{2\pi r_0^2} = \frac{\nu \rho}{2\pi z_0^2}$$

dann erhält man $\frac{1}{r^2} \cos^{\nu-2} \vartheta = \frac{1}{z_0^2}$

Damit wird für $\nu = 4$: $r^2 = z_0^2 \cos^2 \vartheta$
 " $\nu = 5$: $r^2 = z_0^2 \cos^3 \vartheta$
 " $\nu = 6$: $r^2 = z_0^2 \cos^4 \vartheta$ } (5)

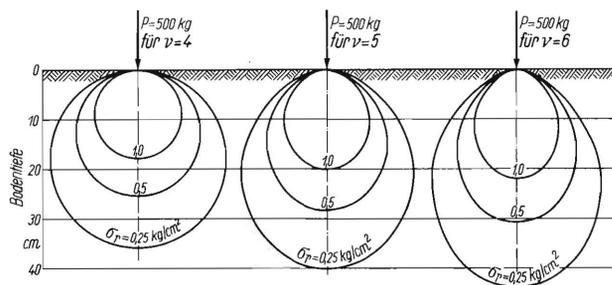


Bild 30 bis 32. Linien gleicher Hauptspannung σ_r infolge einer Einzellast P bei verschiedenen Konzentrationsfaktoren ν .

Bei Belastungen des Bodens durch Reifen hat man es aber nicht mit Punktlasten, auch nicht mit angenäherten Punktlasten, sondern mit Flächenlasten zu tun. Infolgedessen muss man in den Gleichungen (3) und (4) P durch $p \cdot dF$ ersetzen und über die Lastfläche, d.i. die Berührungsfläche, zwischen Reifen und Boden integrieren. Die Integration ist nur unter der Lastachse mit geringem mathematischem Aufwand möglich.

Auf Grund der Werte ausgemessener Berührungsflächen unter ausgewählten verschiedenen Reifen auf harter und nachgiebiger Bodenoberfläche wurden für sämtliche Lastflächen näherungsweise Ellipsen angenommen, deren Halbachsen $a = 0,714 R$; $b = 1,40 R$ sind, wobei R der Radius eines zur Lastfläche des Reifens flächengleichen Kreises ist. In Zahlentafel 1 sind

die entsprechenden Werte für die verschiedenen Reifen und Bodenverhältnisse wiedergegeben. In diesen Ellipsenflächen wurden für Fall 1 eine gleichmässige Druckverteilung

$$p_m = P/F \text{ (Bild 2),}$$

für Fall 2 eine Druckverteilung entsprechend einer Parabel vierter Potenz (Bild 3)

$$p = p_{\max} (1 - \rho^4/R^4) \text{ (6), wobei } p_{\max} = 1,5 p_m \text{ ist}$$

und für den Fall 3 eine Druckverteilung entsprechend einer quadratischen Parabel angenommen (Bild 4)

$$p = p_{\max} (1 - \rho^2/R^2) \text{ (7), wobei } p_{\max} = 2 p_m \text{ ist.}$$

Fall 1: Gleichmässiger Flächendruck

Für kreisförmige Lastflächen wurden von Fröhlich die Druckspannungen σ_z in der Lastachse ausgerechnet, die hierfür identisch sind mit der ersten Hauptspannung σ_1 . Für gleichmässige Lastverteilung ist:

$$\sigma_z = p_m (1 - \cos^{\nu} \alpha) \text{ (8)}$$

Dabei ist α der halbe Öffnungswinkel eines Kreiskegels mit der Spitze am Bezugspunkt A im Boden und der Kreisfläche als Basis.

Eine gleichmässige Lastverteilung (Fall 1) wurde für sehr harten, trockenen Boden angenommen, bei dem nur noch eine elastische Verformung auftritt. Dabei wurde mit dem Konzentrationsfaktor $\nu = 4$ gerechnet, dann wird

$$\sigma_z = p_m (1 - \cos^4 \alpha) \text{ (8a)}$$

Fall 2: Flächendruck nach einer Parabel 4. Potenz

Für eine Lastverteilung nach einer Parabel 4. Potenz (Fall 2) ergibt sich nach Bild 33

$$\sigma_z = \int \frac{\nu dP}{2\pi r^2} \cos^{\nu} \vartheta, \quad dP = dF p = d\rho \rho d\vartheta r$$

Mit $\frac{d\rho}{r^2} = \text{tg } \vartheta \, d\vartheta$ und $r = 1,5 r_m \left(1 - \frac{\rho^4}{R^4}\right)$ wird

$$\sigma_z = \int_0^{\vartheta=2\pi} \int_0^{\vartheta=\alpha} \frac{\nu 1,5 r_m}{2\pi} \left(1 - \frac{\rho^4}{R^4}\right) \text{tg } \vartheta \cos^{\nu} \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

Nach Integration über $d\varphi$ und mit $\text{ctg } \alpha = z/R_0$ und $\text{tg } \vartheta = \rho/z$ also $\text{ctg } \alpha \text{ tg } \vartheta = \rho/R$ wird

$$\sigma_z = 1,5 \nu \gamma_m \int_0^\alpha (1 - \operatorname{ctg}^4 \alpha \operatorname{tg}^4 \vartheta) \operatorname{tg} \vartheta \cos^\nu \vartheta d\vartheta$$

$$\sigma_z = 1,5 \nu \gamma_m \left[\int_0^\alpha \operatorname{tg} \vartheta \cos^\nu \vartheta d\vartheta - \operatorname{ctg}^4 \alpha \int_0^\alpha \operatorname{tg}^5 \vartheta \cos^\nu \vartheta d\vartheta \right]$$

$$\int_0^\alpha \operatorname{tg} \vartheta \cos^\nu \vartheta d\vartheta = \int_0^\alpha \sin \vartheta \cos^{\nu-1} \vartheta d\vartheta = -\int_0^\alpha \cos^{\nu-1} \vartheta d\cos \vartheta$$

$$= -\left[\frac{\cos^\nu \vartheta}{\nu} \right]_0^\alpha = \frac{1}{\nu} (1 - \cos^\nu \alpha)$$

$$\int_0^\alpha \operatorname{tg}^5 \vartheta \cos^\nu \vartheta d\vartheta = \int_0^\alpha \sin^4 \vartheta \cos^{\nu-5} \vartheta d\vartheta = -\int_0^\alpha \sin^4 \vartheta \cos^{\nu-5} \vartheta d\cos \vartheta$$

$$= -\int_0^\alpha (1 - \cos^2 \vartheta)^2 \cos^{\nu-5} \vartheta d\cos \vartheta = -\int_0^\alpha (\cos^{\nu-5} \vartheta - 2\cos^{\nu-3} \vartheta + \cos^{\nu-1} \vartheta) d\cos \vartheta$$

$$= -\left[\frac{\cos^{\nu-4} \vartheta}{\nu-4} - 2 \frac{\cos^{\nu-2} \vartheta}{\nu-2} + \frac{\cos^\nu \vartheta}{\nu} \right]_0^\alpha = \frac{8}{15} - \frac{\cos^{\nu-4} \alpha}{\nu-4} + 2 \frac{\cos^{\nu-2} \alpha}{\nu-2} - \frac{\cos^\nu \alpha}{\nu}$$

Eine Lastverteilung nach einer Parabel vierter Potenz wurde für einen Boden mit normaler Feuchtigkeit und Lagerungsdichte angenommen. Dabei wurde mit dem Konzentrationsfaktor $\nu = 5$ gerechnet. Damit ergibt sich:

$$\sigma_z = 1,5 \nu \gamma_m \left[1 - \cos^5 \alpha - \operatorname{ctg}^4 \alpha \left(\frac{8}{3} - 5 \cos \alpha + \frac{10}{3} \cos^3 \alpha - \cos^5 \alpha \right) \right] \quad (9)$$

Fall 3: Parabolische Verteilung des Flächendrucks

Für eine parabolische Lastverteilung errechnete Fröhlich

$$\sigma_z = 2 \nu \gamma_m \left[1 - \cos^\nu \alpha - \nu \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(-\int_0^\alpha \cos^{\nu-3} \vartheta d\cos \vartheta + \int_0^\alpha \cos^{\nu-1} \vartheta d\vartheta \cos \vartheta \right) \right]$$

Eine parabolische Lastverteilung wurde für nachgiebigen, feuchten Boden angenommen (Fall 3), bei dem eine starke plastische Verformung mit tiefer Spurbildung auftritt. Dabei wurde mit $\nu = 6$ gerechnet. Dann wird

$$\sigma_z = 2 \nu \gamma_m \left[1 - \cos^6 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^4 \alpha + \cos^6 \alpha \right) \right] \quad (10)$$

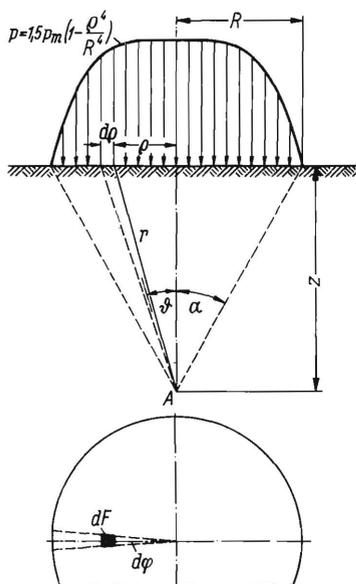


Bild 33. Kreislast mit einer Lastverteilung nach einer Parabel 4. Potenz.

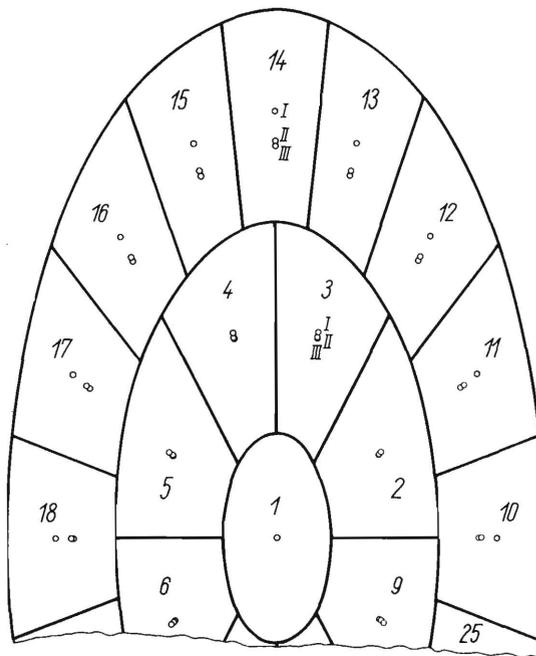


Bild 34. Eine in 25 Einzellasten zerlegte Flächenlast mit elliptischem Grundriss und verschiedener Lastverteilung I Einzellastschwerpunkt bei gleichmässiger Druckverteilung, II Schwerpunkt bei einer Druckverteilung nach einer Parabel 4. Potenz, III Schwerpunkt bei einer parabolischen Druckverteilung.

Die unter einer Kreisfläche errechneten Lastverteilungen unterscheiden sich nur geringfügig von den unter einer Ellipsenfläche errechneten Lastverteilungen, deren Halbmesser $a = 0,714 R$ und $b = 1,4 R$ sind. Die Formeln (8a), (9), (10) sind also als gute Näherungslösungen der Druckverteilungen in der Lastachse unter einer ellipsenförmigen Lastfläche für die angenommenen Flächenpressungen in der Lastfläche und für die angenommenen Konzentrationsfaktoren ν anzusehen.

Da eine Berechnung der Druckverteilung ausserhalb der Lastachse zu komplizierten Reihenentwicklungen führt, wurde die elliptische Lastfläche in 25 gleichgrosse Lastelemente zerlegt, in deren Schwerpunkten die Flächenlast $p \cdot dF$ als Einzellast ΔP angesetzt wurde. Bild 34 und Zahlentafel 3 zeigen die Ergebnisse dieser Rechnung.

Der Schwerpunktsabstand r_s der einzelnen Lastelemente vom Mittelpunkt errechnet sich nach den Formeln

$$\text{Fall 1} \quad r_s = \frac{4}{3} \frac{\sin \alpha / 2}{\operatorname{arc} \alpha} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$$

$$\text{Fall 2} \quad r_s = \frac{2 \sin \alpha / 2}{\operatorname{arc} \alpha} \frac{(r_1^3 - r_2^3) / 3 - (r_1^7 - r_2^7) / 7}{(r_1^2 - r_2^2) / 2 - (r_1^6 - r_2^6) / 6}$$

$$\text{Fall 3} \quad r_s = \frac{2 \sin \alpha / 2}{\operatorname{arc} \alpha} \frac{(r_1^3 - r_2^3) / 3 - (r_1^5 - r_2^5) / 5}{(r_1^2 - r_2^2) / 2 - (r_1^4 - r_2^4) / 4}$$

Der Kreis wird dann in eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 0,714 R$ und $b = 1,40 R$ verzerrt.

Zahlentafel 3

Belastung ΔP des einzelnen Elementes in % von P

Flächen-Element Nr.	Fall 1 gleichmässiger Lastverteilung	Fall 2 Verteilung nach Parabel 4. Potenz	Fall 3 parabolischer Lastverteilung
1	4 %	6,00 %	7,85 %
2 - 9	4 %	5,75 %	6,40 %
10 - 25	4 %	3,00 %	2,563 %
	100 %	100 %	100 %

Schwerpunktabstand r_s der Lastelemente

	Fall 1	Fall 2	Fall 3
1	0	0	0
2 - 9	0,4233	0,4195	0,4098
10 - 25	0,8113	0,7552	0,7458

Dann wurden mit Hilfe der Gleichungen (3) die Spannungen $\Delta\sigma_{zi}$, $\Delta\sigma_{hi}$ und $\Delta\tau_i$ infolgedieser Einzel-lasten ΔP_i errechnet. Sie lauten für ein beliebiges im Punkt A der xz -Ebene liegendes Bodenelement mit den Koordinaten $x, y = 0, z$ und für eine an der Stelle (x_i, y_i) der Lastfläche angreifende Einzel-last ΔP_i (Bild 36),

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_{zi} &= \frac{\nu\Delta P_i}{2\pi z^2} \cos^{\nu+2}\vartheta \\ \Delta\sigma_{hi} &= \frac{\nu\Delta P_i}{2\pi z^2} \cos^{\nu}\vartheta \sin^2\vartheta \\ \Delta\tau_i &= \frac{\nu\Delta P_i}{2\pi z^2} \cos^{\nu+1}\vartheta \sin\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{z}{r} = \cos\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{z^2} \cos^2\vartheta \quad \text{ist.}$$

Dabei ist $\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{(x+x_i)^2 + y_i^2 + z^2}}$ und $\sin\vartheta = \frac{\sqrt{(x+x_i)^2 + y_i^2}}{\sqrt{(x+x_i)^2 + y_i^2 + z^2}}$

Während man nun die gesamte lotrechte Normalspannung σ_z einfach durch Addition der Teikspannungen infolge der Einzellasten $\sum \Delta\sigma_{zi}$ erhält, ist es etwas umständlicher, die erste Hauptspannung σ_1 zu bestimmen. Zur Berechnung von σ_1 im Punkt A (Bild 35 und 36) benötigt man nicht die Teilhorizontalspannung $\Delta\sigma_{xi}$ und die Schubspannung $\Delta\tau_i$, sondern die Horizontalspannung in der x -Richtung $\Delta\sigma_{hi}$ und die Schubspannung $\Delta\tau_{xzi}$ in der xz -Ebene. Da die zu $\Delta\sigma_{hi}$ senkrecht stehende und in der xy -Ebene wirkende Teilspannung $\Delta\sigma_l = 0$ ist, ergibt sich für

$$\Delta\sigma_{xi} = \Delta\sigma_{hi} \cos^2\varphi = \frac{\nu\Delta P_i}{2\pi z^2} \cos^{\nu}\vartheta \sin^2\vartheta \cos^2\varphi \quad (12)$$

Dabei bedeutet $\cos\varphi = \frac{x_i+x}{\sqrt{(x_i+x)^2 + y_i^2}}$ (Bild 35)

Entsprechend ergibt sich für $\Delta\tau_{xzi}$ in der xz -Ebene

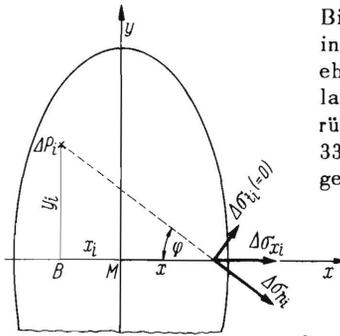


Bild 35

Bild 35 und 36. Spannungen in einem Punkt der Schnittebene xz infolge einer Punktlast im Punkt $x_i y_i$ der Berührungsfläche. Die in Bild 33 eingezeichneten Spannungen sind in der z Ebene im Boden gedacht.

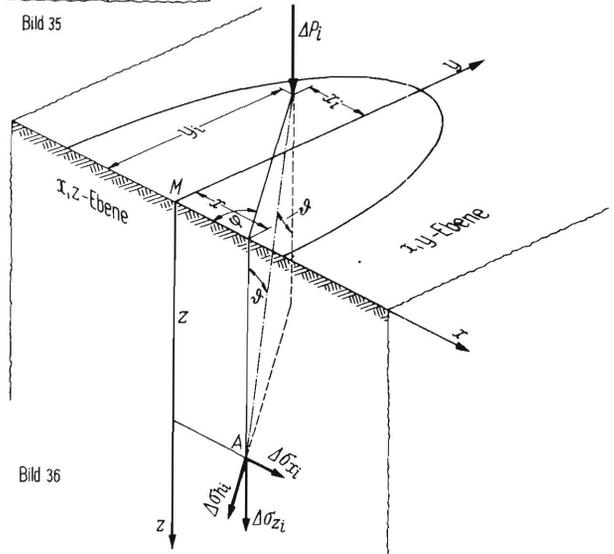


Bild 36

$$\Delta\tau_{xzi} = \frac{\nu P}{2\pi z^2} \cos^{\nu+1}\vartheta \sin\vartheta \cos^2\varphi \quad (13)$$

Durch Summierung erhält man nun die Spannungen aus der gesamten Lastverteilung im Punkt A

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^{i=25} \Delta\sigma_{zi}; \quad \sigma_x = \sum_{i=1}^{i=25} \Delta\sigma_{xi}; \quad \tau_{xz} = \sum_{i=1}^{i=25} \Delta\tau_{xzi} \quad (14)$$

Aus diesen Spannungen errechnet sich die erste Hauptspannung nach der Formel

$$\sigma_1 = \sigma_z \cos^2\alpha + \sigma_x \sin^2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha \quad (15)$$

wobei für den Winkel α die Beziehung $\tan 2\alpha = 2\tau_{xz}/(\sigma_z - \sigma_x)$ gilt (Bild 37). Es wurden nun für einige Tiefen z in der xz -Ebene die Spannungen für verschiedene Punkte x errechnet (Bild 38) und daraus die Linien gleicher Hauptspannung, die Druckzwiebeln (Bild 5 bis 7), ermittelt.

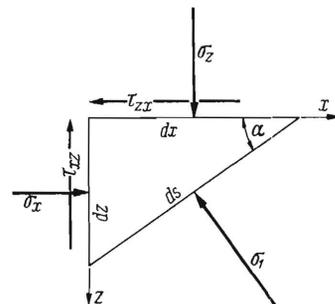


Bild 37. Gleichgewicht der Spannungen an einem dreieckigen Element, dessen Hypotenuse senkrecht zur Hauptspannungsrichtung steht.

