

für die Krafteinleitung in diesem Achsträger ist in Bild 1 unten gezeigt. Sowohl die Last Q als auch die Stützkkräfte A und B müssen im jeweiligen Querkraftpunkt des Achsquerschnittes angreifen, um zusätzliche Torsions- und Normalspannungen zu vermeiden. Die Lage des Querkraftpunktes ist für das U-Profil leicht zu bestimmen. Berechnungsformeln sind in [1 bis 9] angegeben. Auf die theoretischen Zusammenhänge der in diesem Beispiel erläuterten Beanspruchungen soll im folgenden näher eingegangen

ben wurde, treten ausser der Verschraubung der Längsfasern Verwölbungen der Querschnitte in z -Richtung auf, die bei offenen Profilstäben (z.B. U-Eisen, Doppel-T-Eisen usw.) sehr gross werden können. Wird diese Querschnittsverwölbung beispielsweise durch Verschweissen der Stirnseiten gegen anschliessende Bauteile verhindert, so treten in den Profilstäben längsgerichtete, mit z veränderliche Längsspannungen auf, die in der unmittelbaren Nähe der eingespannten Stabenden ihren maximalen Wert erreichen. Die durch Verwölbungsbehinderung hervorgerufenen Normalspannungen in z -Richtung sind bei doppelflanschigen Profilstäben von grosser Wichtigkeit, weil diese Profile wegen ihrer geringen Torsionssteifigkeit verhältnismässig grosse Verformungen erleiden.

Der Einfluss der verhinderten Querschnittsverwölbung soll zunächst am Beispiel eines Stabes mit Doppel-T-Querschnitt von der Länge l gezeigt werden, dessen eine Stirnseite starr gegen eine Platte geschweisst ist. Der Verformungszustand bei reiner Torsion ist in Bild 3 c, derjenige bei Torsion mit einseitig behinderter Querschnittsverwölbung in Bild 3 b dargestellt. Am freien Ende $z=l$ wirke ein Drehmoment M_t . Dieses Moment lässt sich in zwei Anteile auf-

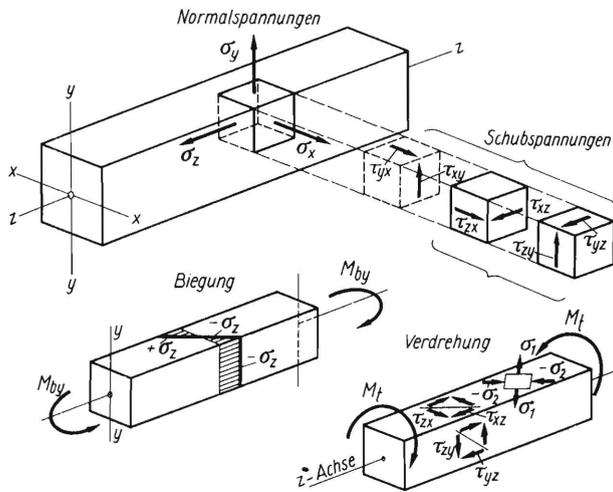


Bild 2. Koordinaten und Bezeichnungen für die Normal- und Schubspannungen bei Biegung und Verdrehung.

werden. Die verwendeten Koordinaten und Bezeichnungen sind in Bild 2 zusammengestellt. Es bedeuten:

- x, y, z rechtwinkliges Koordinatensystem
 - M_{by} Biegemoment um die y -Achse in der x, z -Ebene
 - M_t Torsionsmoment um die z -Achse
 - $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Normalspannungen in Richtung der durch die Indice angegebenen Koordinaten
 - $\tau_{xy} = \tau_{yx}$
 - $\tau_{xz} = \tau_{zx}$
 - $\tau_{yz} = \tau_{zy}$
- } Schubspannungen

In Bild 2 rechts unten ist gezeigt, wie man aus Überlegungen mit Hilfe des Mohr'schen Spannungskreises die bei Torsion entstehenden Schubspannungen durch die Hauptnormalspannungen ersetzen kann. Im Falle der reinen Torsion sind die Beträge der Hauptspannungen untereinander und auch die der Schubspannungen gleich:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{max} \quad (2)$$

Torsion mit verhinderter Querschnittsverwölbung

Für die Erklärung der Zusatzspannungen σ_z ist es erforderlich, auf die Theorie der Torsion mit behinderter Querschnittsverwölbung einzugehen. Wie vom Verfasser [10 und 11] bereits ausführlicher beschrie-

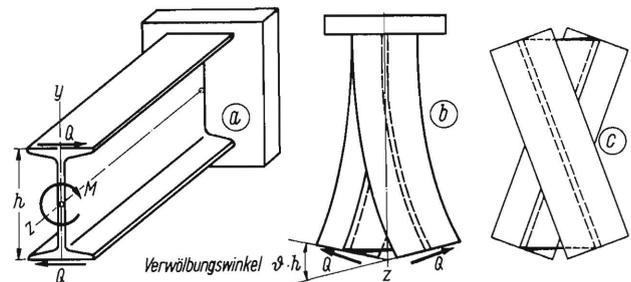
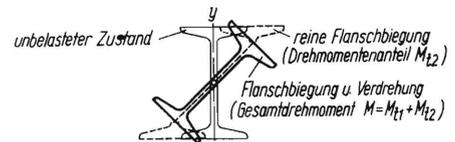


Bild 3. Verdrebeanspruchung eines einseitig eingespannten Doppel-T-Trägers. Durch Verhinderung der Querschnittsverwölbung entsteht eine zusätzliche Flanschbiegung.

spalten. Der Anteil M_{t1} wird durch reine Torsion, der Anteil M_{t2} durch Schubspannungen in den Flanschen übertragen. Es gilt also die Gleichung:

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} \quad (3)$$

Es ist $M_{t1} = \vartheta \cdot J_t \cdot G$ [cmkg],

worin J_t [cm⁴] das Torsionsflächenmoment des Doppel-T-Querschnittes, G [kg/cm²] den Gleitmodul des Werkstoffes und ϑ [Bogenmass/cm] die Einheitsdrilling, d. i. die Verdrehung je Längeneinheit des Stabes bedeuten. Die Drilling ϑ ist eine Funktion von z und wächst mit fortschreitender Entfernung vom Einspannungsquerschnitt. Infolge von ϑ werden die Flanschquer-

schnitte um die γ -Achse gegeneinander um den Winkel $\vartheta \cdot h$ verdreht, d.h. dass der Oberflansch um $+\vartheta \cdot h/2$, der Unterflansch um $-\vartheta \cdot h/2$ eine Drehung erfährt. Dabei stehen die Flanschquerschnitte senkrecht auf den mittleren Längsfasern..

Durch das belastende Drehmoment entstehen in den Flanschquerschnitten gleichgrosse Querkräfte Q , welche den zweiten Momentenanteil $M_{t2} = Q \cdot h$ bilden. Die Querkräfte Q rufen wiederum über die Stablänge veränderliche Flanschbiegemomente M_{by} hervor, sodass für M_{t2} geschrieben werden kann:

$$M_{t2} = \frac{dM_{by}}{dz} \cdot h \quad (5)$$

Die Winkel $\pm \vartheta \cdot h/2$ können auch als Folge der Biegung der Flanschen um die γ -Achse aufgefasst werden. Für die Formänderung u eines Flanschteilchens in x -Richtung erhält man

$$\frac{du}{dz} = \frac{h}{2} \cdot \vartheta, \quad (6)$$

die Änderung von $\vartheta \cdot h/2$ in z -Richtung ergibt

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d^2u}{dz^2}$$

Aus der Gleichung der Flanschbiegeline folgt die Beziehung

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{M_{by}}{\frac{1}{2} J_y \cdot E}, \quad (7)$$

sodass der zweite Momentenanteil M_{t2} durch folgende Formel erfasst wird:

$$M_{t2} = Q \cdot h = -\left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot E \cdot J_y \cdot \frac{d^2\vartheta}{dz^2} \quad (8)$$

Damit sind die beiden Momentenanteile M_{t1} und M_{t2} in Abhängigkeit von ϑ bestimmt. Bei gegebenem M_t erhält man:

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} = J_t \cdot G \cdot \vartheta - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot E \cdot J_y \cdot \frac{d^2\vartheta}{dz^2} \quad (9)$$

Setzt man $\frac{J_t \cdot G}{J_y \cdot E} \cdot \frac{1}{(h/2)^2} = a^2,$ (10)

so lautet die Differentialgleichung nach zweckmässiger Umformung für die Torsion eines Doppel-T-Eisens mit behinderter Querschnittsverwölbung:

$$M_t = G \cdot J_t \left(\vartheta - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{d^2\vartheta}{dz^2} \right). \quad (11)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen $\vartheta = 0$ für $z = 0$ und $d\vartheta/dz = 0$ für $z = l$ lautet die Lösung dieser Gleichung für ϑ

$$\vartheta = \frac{M}{G \cdot J_t} \cdot \left(1 - \frac{\text{L}y a (l - z)}{\text{L}y a l} \right). \quad (12)$$

Wie diese Gleichung zeigt, ist die Torsion bei veränderter Querschnittsverwölbung von dem Quotienten aus der Torsionssteifigkeit $J_t \cdot G$ und der Biegesteifigkeit um die γ -Achse $J_y \cdot E$, der mit a^2 bezeichnet wurde, entscheidend abhängig. Mit $d\vartheta/dz$ können auch die Normalspannungen σ_z gefunden werden, welche

im Einspannquerschnitt $z = 0$ die Verwölbungen rückgängig machen.

Die Normalspannungen lassen sich in den Flanschen des Doppel-T-Eisens für jede Stelle leicht berechnen aus:

$$\sigma_z = -\frac{d\vartheta}{dz} \cdot E \cdot \frac{h}{2} \cdot x \quad (13)$$

Für den Einspannquerschnitt $z = 0$ liefert die obige Differentialgleichung (12)

$$\frac{d\vartheta}{dz} = \frac{M_t}{G \cdot J_t} \cdot \gamma_y a \cdot l, \quad (14)$$

sodass die Normalspannungsverteilung in den Flanschen des Einspannquerschnitts aus

$$\sigma_z = -\frac{M_t}{G \cdot J_t} \cdot E \cdot \frac{h}{2} \cdot x \cdot \gamma_y a \cdot l \quad (15)$$

berechnet werden kann. Aus Gleichung (13) geht hervor, dass die Normalspannungsverteilung im Einspannquerschnitt gradlinig ist.

Wie gezeigt wurde, lässt sich der Einfluss der Verwölbungsbehinderung für das Doppel-T-Profil auf anschaulichem Wege leicht ableiten. Für viele Querschnitte versagt dieses Verfahren insoweit, als der Wert a (10) mit Hilfe des Satzes vom Minimum der potentiellen Energie ermittelt werden muss [12].

Mit den hier angestellten theoretischen und anschaulichen Überlegungen lassen sich die Spannungen auch in einem U-Träger deuten (Bild 4), der, an den Enden gestützt, durch zwei Querkräfte Q auf Biegung beansprucht wird. Da die Kräfte Q nicht im Querkraftpunkt T des Profils angreifen, entstehen

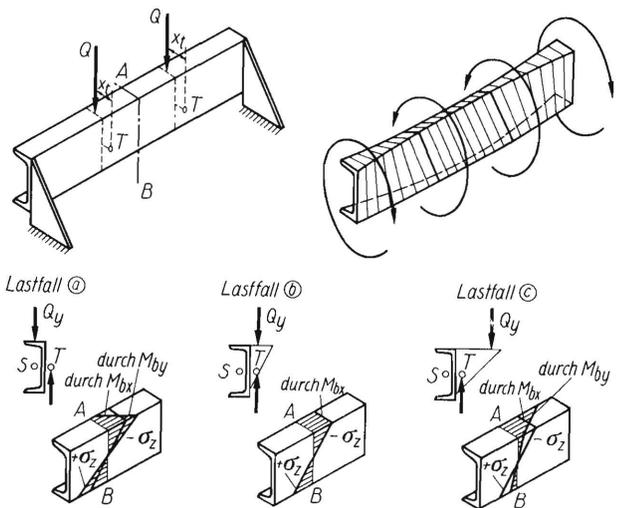


Bild 4. Verdrehung bei Querkraftbiegung. Die Verhinderung der Querschnittsverwölbung bei Torsion ruft Normalspannungen σ_z (durch M_{by}) hervor, welche sich den ebenfalls in z -Richtung wirkenden Biegespannungen σ_z (durch M_{bx}) überlagern (Lastfall a und c). Greifen die Querkräfte Q im Querkraftpunkt T an, so tritt keine Drehung des U-Trägers ein; in diesem Falle sind nur Biegespannungen σ_z (durch M_{bx}) wirksam (Lastfall b).

zwei Drehmomente $Q \cdot x_y$, welche den Träger zusätzlich auf Torsion beanspruchen. Die Torsion ruft Flanschbiegekräfte hervor, die in den Querschnitten der Krafteinleitung am grössten sind und mit den inneren Kräften $\sigma_z \cdot F_{Fl}$ im Gleichgewicht stehen ($F_{Fl} \equiv$ Flanschfläche). Im Trägerteil zwischen den Kraftangriffsstellen sind diese inneren Längskräfte $\sigma_z \cdot F_{Fl}$ konstant. Im unteren Teil des Bildes 4 wird gezeigt, wie etwa die Spannungsverteilung σ_z durch Querkraftbiegung und durch überlagerte Torsion mit behinderter Querschnittsverwölbung aussieht. Im Lastfall a greifen die Querkräfte Q_y auf dem Flansch in Höhe des Schwerpunktes des U-Querschnittes an. Die Normalspannung σ_z , welche die Querkraftbiegung M_{bx} hervorruft, wird von den durch M_{by} erzeugten Normalspannungen in gleicher Richtung derart überlagert, dass die Stegkante des Oberflansches und die freie Flanschseite des Unterflansches erhöhte Biegebeanspruchungen erfahren. Gehen die Wirkungslinien der Querkräfte Q durch den Querkraftpunkt T , so treten nur Spannungen σ_z durch M_{bx} auf (Lastfall b). Die Spannungsverteilung über der Flanschbreite ist konstant. Greifen die Kräfte Q ausserhalb der Profilkonturen und ausserhalb des Querkraftpunktes an, so werden die Spannungen σ_z an der freien Kante des Oberflansches und an der Stegkante des Unterflansches durch überlagerte Flanschbiegung M_{by} wesentlich vergrössert (Lastfall c). Dieses Beispiel zeigt, dass die Verwölbungsbehinderung auch an solchen biegebeanspruchten Trägern auftritt, bei denen die Endquerschnitte frei liegen, aber die Querkräfte eine zusätzliche Torsion einleiten.

Die bisherigen Ausführungen beschränkten sich im wesentlichen auf Überlegungen zur Feststellung der Art der Verformungen und Beanspruchungen bei Biegung mit überlagerter Torsion. Um einen Überblick über die Spannungsverteilung und die Grösse der Spannungen in derart beanspruchten Profilstäben zu bekommen, wurden Dehnungsmessungen an einer Reihe von Profilstäben gleicher Länge und gleicher Krafteinleitung, aber verschiedener Querschnittsgestalt durchgeführt. In Bild 5 ist die Versuchsanordnung gezeigt. Die untersuchten Profilstäbe waren mit der einen Stirnseite gegen eine 12 mm dicke

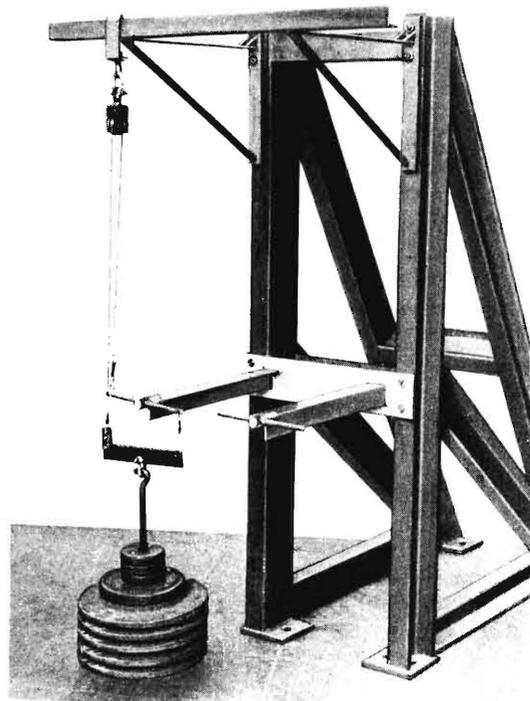


Bild 5. Versuchsanordnung für die Verdrehung von einseitig eingespannten Profilstäben. Die Belastungsvorrichtung gewährleistet die Einleitung eines reinen Drehmoments.

Platte geschweisst. Am freien Ende der Stäbe wurde ein reines Drehmoment eingeleitet. Besondere Sorgfalt erforderte die Anordnung der Krafteinleitungsstelle. Durch Aufschiessen kleiner Rohrstücke auf das freie Profilstabende mit Zentrierung auf den Querkraftpunkt wurde eine möglichst geringe Verhinderung der Querschnittsverwölbung am freien Ende erstrebt. Wie die Dehnlilien im Bild 6 zeigen, war trotzdem eine geringe Beeinflussung des Spannungszustandes durch die Krafteinleitung nicht zu vermeiden. Da am freien Ende des Profilstabes, wie im folgenden gezeigt werden soll, die Normalspannungen infolge der Behinderung der Querschnittsverwölbung soweit abgeklungen sind, dass praktisch nur noch Torsionsspannungen wirksam sind, werden die Versuchsergebnisse über die Messung der Normalspannungsverteilung im interessierenden Bereich der Stäbe nicht gefälscht.

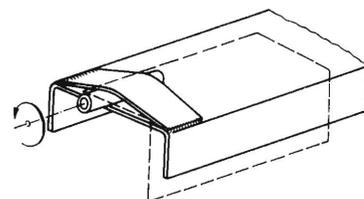
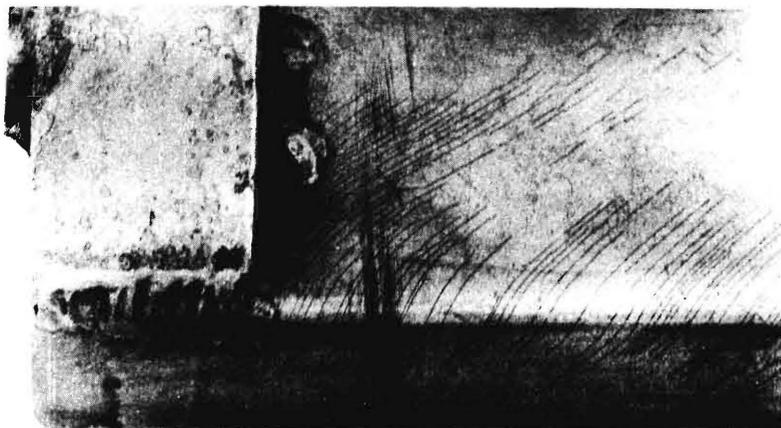


Bild 6. Dehnlilienfeld in der Nähe der Krafteinleitung eines tordierten Profilstabes (in natürlicher Grösse; nach dem Stresscoat-Verfahren).

Das Dehnlinienfeld

Vor der Ermittlung der Grösse der Spannungen und der Spannungsverteilung mit statischen Feindehnungsmessern wurden Dehnlinienfelder mit Hilfe des amerikanischen Dehnlinienverfahrens „*Stresscoat*“²⁾ [14–18] aufgenommen. Dieses Verfahren unterscheidet sich von dem deutschen *Maybach*'schen Dehnlinienverfahren [13] dadurch, dass es ausser einer genaueren qualitativen Auswertung der Lackrisse eine quantitative Messung an der Stelle der grössten Dehnung im untersuchten Bauteil gestattet. Das „*Stresscoat*“-Verfahren besteht darin, dass ein in Schwefelkohlenstoff gelöstes Harz auf das vorher gereinigte und mit einem Aluminiumlack überzogene Bauteil aufgespritzt wird. Durch das Aufspritzen des spröden Messlackes wird eine gleichmässige Dicke der Lackschicht auf der Oberfläche des Bauteiles gewährleistet. Nach einer Trocknungszeit von 18 bis 24 Stunden hat der Lack die erforderliche Sprödigkeit erreicht, sodass er bei Belastung innerhalb des elastischen Bereiches des Bauteilwerkstoffes reisst. Ein zur gleichen Zeit gespritzter Eichstab gibt nach Belastung in einer Eichvorrichtung Auskunft über die Reissempfindlichkeit des Lackes, d.h. über den Wert der Dehnung in ε [mm/mm], bei welcher der erste Lackriss auf dem Prüfling erscheint. Um die Dehnlinien gut sichtbar und zur fotografischen Auswertung geeignet zu machen, wird auf die Oberfläche des zu untersuchenden Bauteiles ein Aluminiumunterzug aufgespritzt, bevor der Messlack aufgetragen wird. Die Risse im Dehnungslack werden nach der Entlastung des Bauteiles mit einem Ätzmittel rot gefärbt, damit sich die dunkelroten Risse von dem silbrig-glänzenden Untergrund gut abheben. Der „*Stresscoat*“ ist ausserordentlich empfindlich gegenüber Temperatur- und Luftfeuchtigkeitsschwankungen, sodass es bei quantitativer Messung erforderlich ist, das Verfahren vom Beginn des Lackspritzens bis zum Zeitpunkt der Belastung in Räumen mit konstantem Klima anzuwenden.

Allein aus der Betrachtung des Dehnlinienfeldes lassen sich bereits umfassende Aussagen über die Art der Beanspruchung machen. In Bild 7 sind am Beispiel des U-Profilstabes die Dehnlinien bei verschiedenen Belastungszuständen gezeigt. Mit Hilfe dieser schematischen Darstellung lässt sich leicht der Spannungszustand, der in einem Bauteil herrscht, beurteilen.

Bei reinem Zug werden Dehnungslinien senkrecht zur Beanspruchungsrichtung, also senkrecht zur Stablängsachse erzeugt, die gleichmässig über den ganzen Stab verteilt sind. Wird ein reines Biegemoment in den Stab eingeleitet, so entstehen Dehnungslinien nur auf der Zugseite, aber ebenfalls in gleichmässiger Verteilung über der Stablänge. Je nach Höhe der

Beanspruchung reichen diese Dehnungslinien mehr oder weniger dicht an die neutrale Faser heran. Auf der Druckseite entstehen selbstverständlich keine Lackrisse.

Erfolgt die Beanspruchung durch Querkraftbiegung, so sind die Dehnungslinien nicht mehr gleichmässig über die Stablänge verteilt. Der erste Lackriss entsteht dicht neben der Einspannstelle; bei weiterer Belastung folgen weitere Risse auf der Zugseite in Richtung auf das freie Stabende. Gleichzeitig verdichten sich die Dehnungslinien in der Umgebung der Einspannstelle.

Bei reiner Verdrehung entstehen Dehnungslinien unter 45° zur Stablängsachse, die gleichmässig über die ganze Staboberfläche verteilt sind. Bei Rechts- und nachträglicher Linksverdrehung des Profilstabes stehen die Dehnlinien senkrecht zueinander. Im Falle zusammengesetzter Beanspruchung, wie beispielsweise bei Torsion mit veränderter Querschnittsverwölbung, treten Dehnungslinien auf, wie sie in der

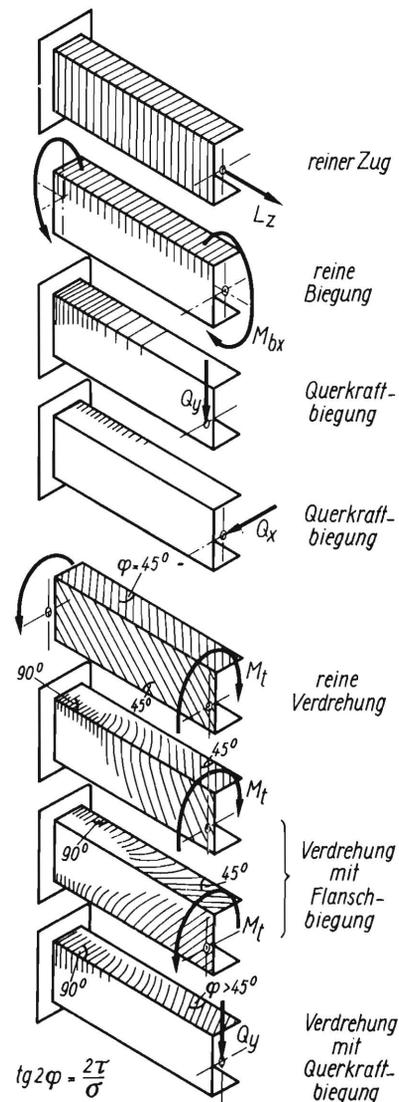


Bild 7. Zur Beurteilung des Spannungszustandes aus dem Dehnlinienfeld. φ = Winkel zwischen Dehnlinie und Stablängsachse.

2) Hersteller der Ausrüstung und der Lacke: Magnaflux Corporation, Chicago.

unteren Hälfte des Bildes 7 gezeichnet sind. In der Nähe der Einspannung überwiegen die Normalspannungen in Längsrichtung. Infolgedessen sind hier die Lackrisse quer zur Stablängsachse gerichtet. Allmählich klingen die Normalspannungen ab, sodass das Dehnliniensbild in den Typ für reine Torsion übergeht. Im letzten Belastungsfall erreichen die Dehnungslinien auch nicht am freien Ende des Stabes die 45°-Richtung, weil hier im Gegensatz zu den beiden vorgehenden Belastungsfällen eine Querkraft ausser dem Torsionsmoment wirksam ist.

dem Unterflansch nahe der Einspannung ist in Bild 9 dargestellt. Zur Erläuterung der Lage des Dehnliniensfeldes sei gesagt, dass die freie Kante des Unterflansches im Lichtbild oben liegt, und dass der Flansch von unten betrachtet ist. Am linken Rande des Fotos verlaufen die Dehnlinien unter 45°. Zur Einspannung hin macht sich allmählich der Normalspannungszustand dadurch bemerkbar, dass die Dehnlinien in der Nähe der Stegkante in die 90°-Richtung einbiegen, während sie in der Nähe der freien Flanschseite zunächst eine Richtung kleiner als 45° ein-

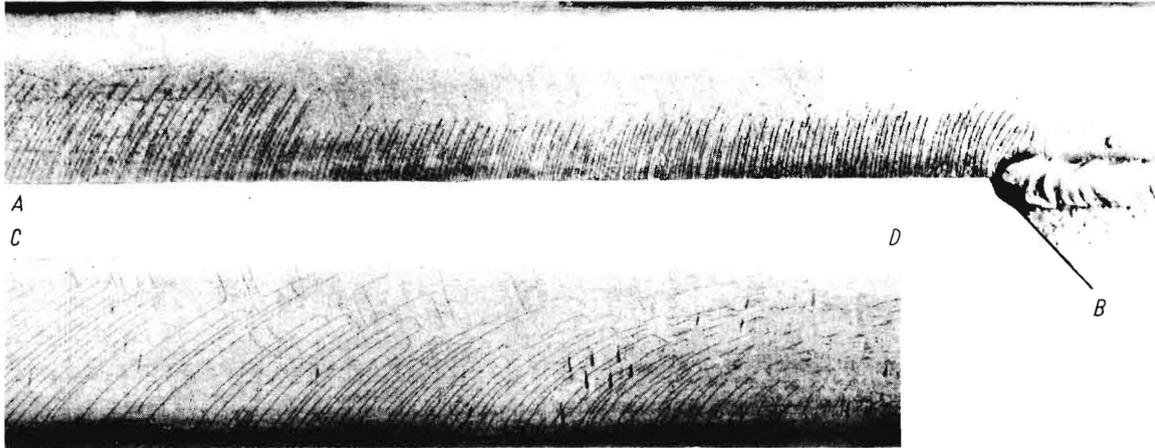
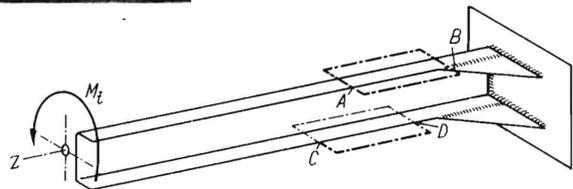


Bild 8 und 9. Dehnlinien auf einem verdrehbeanspruchten U-Profilstab nahe der Einspannstelle (in natürlicher Grösse; nach dem *Stresscoat*-Verfahren).

Im folgenden soll an zwei Beispielen gezeigt werden, wie man mit den obenbeschriebenen Erkenntnissen ein Dehnliniensfeld deuten und wie man aus ihm den Spannungszustand bestimmen kann. Bild 8 stellt das Dehnliniensfeld auf dem Oberflansch eines torsionsbeanspruchten U-Profilstabes dar. An der Anschlussstelle des Eckbleches verlaufen die Dehnlinien senkrecht zur Stablängsachse. Diese Richtung wird über einen längeren Stababschnitt beibehalten. Dies bedeutet, dass die durch Behinderung der Querschnittsverwölbung hervorgerufenen Normalspannungen in z -Richtung sehr langsam zum freien Ende des U-Profilstabes abklingen. Wie der linke Rand des Lichtbildes in Bild 8 zeigt, neigen sich erst in weiterer Entfernung vom Einspannquerschnitt die Dehnlinien allmählich in die 45°-Richtung. Die Länge der Lackrisse in dem Stabbereich, in welchem die Normalspannungen überwiegen, ist abhängig von der Reissempfindlichkeit des Lackes. Der Bereich, in welchem keine Dehnlinien zu erkennen sind, ist gekennzeichnet durch das Druckspannungsgebiet in der Nähe der Stegkante und durch die Umgebung der Nullspannungsfaser auf etwa $2/5$ der Flanschbreite. In den Stababschnitten, in welchen der Torsionsspannungszustand überwiegt, verlaufen die Dehnlinien über die gesamte Oberfläche des Profilstabes gleichmässig in 45°-Richtung. Das Dehnungsliniensfeld auf



nehmen, um dann durch Anwachsen der Druckspannungen in z -Richtung ganz zu verschwinden.

Aus diesen Messergebnissen mit dem *Stresscoat*-Verfahren geht hervor, dass es möglich ist, recht umfassende Aussagen über den im Bauteil herrschenden Beanspruchungsfall, über den Spannungszustand und über die Richtung der ersten und zweiten Hauptspannung zu machen. Wie im vorliegenden Fall der Torsion mit verhinderter Querschnittsverwölbung kann man auch ohne vorherige Kenntnis des Spannungsverlaufs über den Querschnitt und die Stablänge ein Urteil über das Abklingen der Zusatzspannungen abgeben.

Normal- und Schubspannungsverteilung

Zur Ermittlung des genauen Spannungsbetrages wurden statische Feindehnungsmesser von 2 bis 10 mm Messlänge verwendet. Die Aufspannung der Dehnungsmesser erfolgte zur Feststellung der Höhe der ersten Hauptspannung senkrecht zu den Dehnlinien, zur Bestimmung des Normalspannungsbetrages σ_z in Längsrichtung der Profilstäbe.

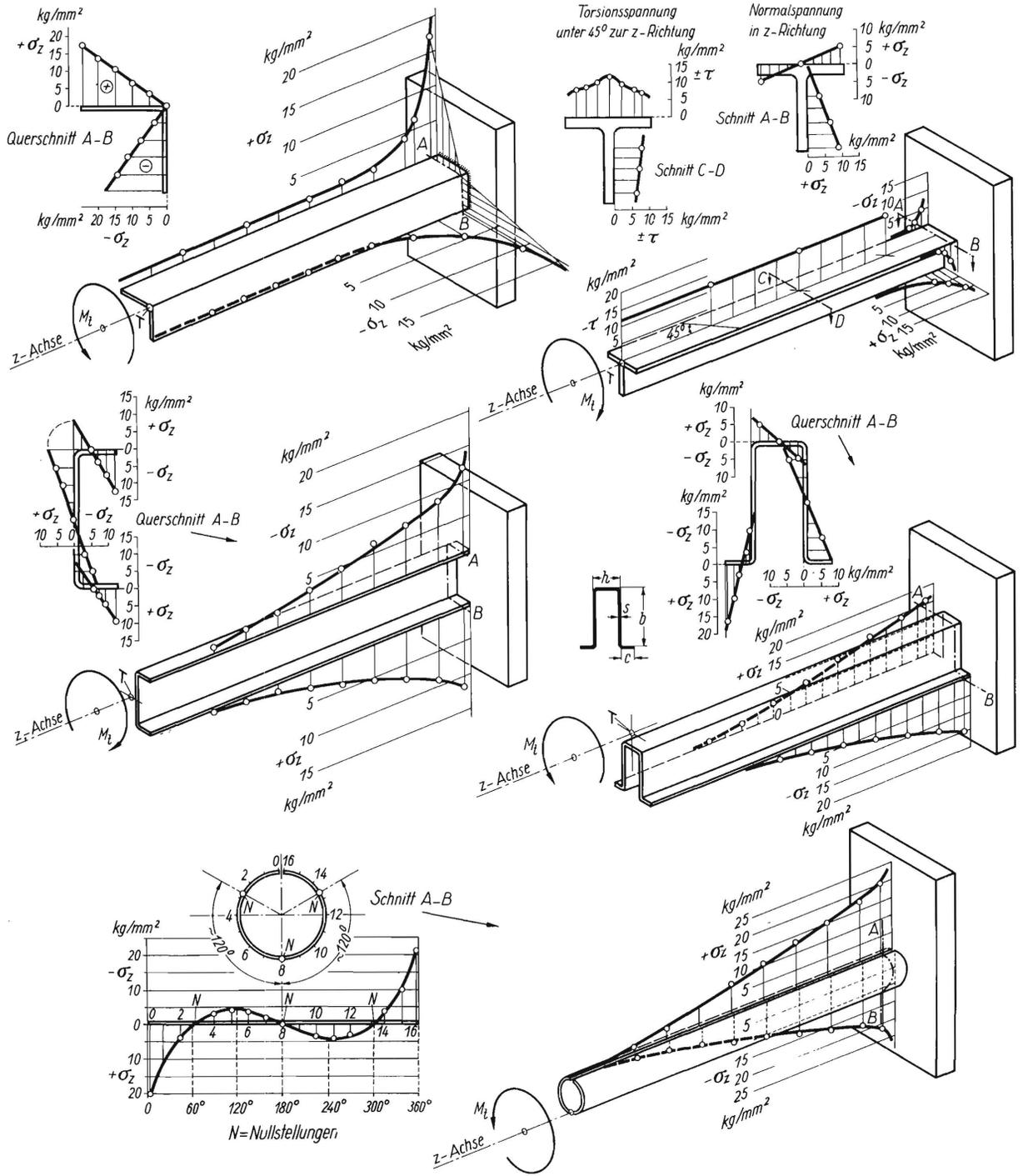


Bild 10 bis 14. Normalspannungsverteilung über der Länge und über dem Einspannquerschnitt verschiedener Profilstäbe bei Verdrehung mit einseitig verhinderter Querschnittsverwölbung.

Bild	Querschnittsform	Abmessungen*) mm	F cm ²	x_t cm	J_t cm ⁴	M_t cmkg	φ_t Grad	M_t/φ_t cmkg/Grad	J_t^* cm ⁴	$\frac{J_t^* - J_t}{J_t} \cdot 100$ %	τ mittel kg/mm ²
10	L	50 × 50 × 2,2	2,15	0	0,035	150	-13,5	11	0,038	10	12,0
11	T	50 × 50 × 6, NP 5	5,66	0	0,700	900	+ 3,1	290	1,000	43	9,0**)
12	C	80 × 25 × 2,85	3,01	0,764	0,100	200	+ 3,1	64	0,222	122	5,8
13	Π	32 × 70 × 15 × 2 h × b × c × s	3,92	2,670	0,053	300	- 3,2	94	0,324	510	4,0
14	O	50 × 1,5	2,28	4,850	0,017	250	- 3,0	83	0,288	1600	5,0

*) Stablänge $l = 500$ mm. **) τ schwankt bei diesem Profilstab im Gegensatz zu den anderen vier Profilstäben wegen der unterschiedlichen Wandstärke zwischen 5 und 12 kg/mm².

F Querschnittsfläche, J_t, J_t^* Torsionsflächenmomente, M_t Torsionsmoment, φ_t Verdrehwinkel, x_t Abstand des Querkraftpunktes von der Querschnittsmittellinie in x-Richtung, l Profilstablänge, s Wandstärke, U abgewickelte Länge des Querschnittes

Die Bilder 10 bis 14 sollen einen Eindruck von der Spannungsverteilung auf einseitig eingespannten, torsionsbeanspruchten Profilstäben verschiedener Querschnittsform geben. Alle Stäbe hatten eine Länge von 500 mm. Mit Ausnahme des torsionsweichen Winkelprofils (Bild 10) wurden alle Profilstäbe bis zu einem Verdrehwinkel von etwa 3° belastet. Die Zahlentafel zu Bild 10 bis 14 erfasst die wichtigsten Daten der untersuchten Profilstäbe und zeigt eine Gegenüberstellung der gemessenen Werte gegenüber der rechnerisch einfach zu erfassenden Drehsteifigkeit bei unbehinderter Querschnittsverwölbung. Dabei wurde der Wert des Torsionsflächenmomentes J_t aus der bekannten Formel gefunden:

$$J_t = \frac{1}{3} U \cdot s^3 \text{ [cm}^4\text{]} \quad (16)$$

hierin bedeuten: U Länge der abgewickelten Profilmittellinie [cm],
 s Wandstärke [cm].

Der aus der Messung gewonnene, entsprechende Wert J_t^* wurde aus der Beziehung errechnet:

$$\varphi_t = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{l}{G} \cdot \frac{M_t}{J_t^*} \text{ [Grad]} \quad (17)$$

φ_t und M_t wurden gemessen. Fasst man die für alle 5 Profilstäbe konstanten Werte zusammen, so folgt:

$$J_t^* = 0,00345 \cdot \frac{M_t}{\varphi_t} \text{ [cm}^4\text{]} \quad (18)$$

Hiermit ist eine Vergleichsbasis geschaffen, um die Messergebnisse, welche die verhinderte Querschnittsverwölbung erfassen, den errechneten Werten (J_t) der reinen Torsion gegenüberzustellen (s. Zahlentafel).

Die Zahlentafel zeigt, dass sich die Behinderung der Querschnittsverwölbung bei verschiedenen Profilstäben sehr verschieden auf die Drehsteifigkeitserhöhung ($J_t^* - J_t$) / J_t auswirkt. Beim Winkel- und T-Profilstab ist die Steifigkeitserhöhung verhältnismässig gering. Das U-Profil erfährt bereits eine Verdoppelung seiner Torsionssteifigkeit. Am stärksten ist die Vergrösserung der Steifigkeit durch Wölbungsverhinderung beim Hutprofilstab und beim geschlitzten Rohr. Beim Hutprofil wird die Verdrehsteifigkeit versechsfacht; das geschlitzte Rohr wird etwa 17 mal verdrehsteifer. Wie aus der Tabelle weiterhin zu entnehmen ist, besteht zwischen dieser Erhöhung der Steifigkeit und der Lage des Drehpunktes des Profils (Drehpunkt = Querkraftpunkt) ein offensichtlicher Zusammenhang. J_t^* und x_t hängen über den Verwindungswert der Querschnittsfläche zusammen, dessen mathematische Deutung verschiedene Autoren [5, 12, 19–22] ausführlich dargelegt haben.

Die Normalspannungsverteilungen über der Stablänge (Bild 10 bis 14) zeigen ebenfalls diese Abhängigkeit von der Lage des Querkraftpunktes der untersuchten Profile. Beim Winkel- und T-Profil

klingen die Normalspannungen mit zunehmender Entfernung von der Einspannung sehr rasch ab. Bei diesen Profilen ist $x_t = 0$ (vergl. die Zahlentafel). Beim U-Profil, Hutprofil und beim geschlitzten Rohr ist ein sehr flaches, nahezu geradliniges Normalspannungsgefälle zu beobachten. Die Bilder 10 bis 14 zeigen ausserdem den Normalspannungsverlauf über dem Profilquerschnitt in 1 cm Abstand von der Einspannung. Während beim Winkel- und T-Profil die Spannungen von der freien Schenkelkante zur Schenkelecke auf den Wert Null abfallen, stellen sich bei den anderen drei Profilen mehrere Spannungs-Nullstellen ein, die nicht mit den Profillecken zusammenfallen, sondern im Steg auf der Mitte der Steghöhe und in den Flanschen im Abstände von $2/3$ der Flanschbreite von der freien Kante liegen. Bemerkenswert ist, dass beim geschlitzten Kreisrohrquerschnitt – ebenso wie beim U-Profil – 3 Nullstellen auftreten, die auf dem Umfang gleichmässig verteilt sind.

Zum Vergleich wurden auf jedem Profilstab die Verdrehspannungen gemessen, indem die Feindehnungsmesser unter einem Winkel von 45° zur Stablängsachse aufgespannt wurden (vergl. Bild 2, Richtung der Hauptschubspannung). Diesen Messungen ist zu entnehmen, dass beim Hutprofil, U-Profil und geschlitzten Rohr, den niedrigen Verdrehwinkeln von rund 3° entsprechend, nur kleine, über die Oberfläche sehr gleichmässig verteilte Torsionsspannungen entstehen, während die Normalspannungen besonders in der Nähe der Einspannung einen mehrfachen Betrag erreichen. Beim Winkelprofilstab wurde jedoch, entsprechend dem grossen Verdrehwinkel, auch eine höhere Torsionsspannung gemessen, die sich im Einspannungsquerschnitt nur wenig von der Höhe der Normalspannung unterschied.

Es kann hieraus die konstruktive Folgerung gezogen werden, dass man doppelflanschtige Profile (U-, Z-, Doppel-T-Profile, geschlitzte Rohre) wegen der erhöhten Normalspannungen bei Torsionsbeanspruchung mit verhinderter Querschnittsverwölbung niemals (!) stirnseitig verschweissen darf, während Winkel und T-Profile gegen derartige Anschlüsse weniger empfindlich sind. Bei verwindungsbeanspruchten zweistieligen Fahrzeugrahmen sollte man daher nur Winkel- oder T-Eisen als Querträger verwenden.

Einfluss von Eckversteifungen

Vielfach wird versucht, die Spannungen in den Anschlussstellen durch Eckversteifungen abzubauen. Diese Massnahme mag für Biegebeanspruchungen in der horizontalen Ebene (x, z -Ebene) erfolgreich sein. Bei Torsionsbeanspruchung, wie z.B. in verwindungsbeanspruchten Rechteckrahmen, werden diese hohen Normalspannungen nur verlagert. In Bild 15 sind die Spannungsverteilungen über der freien Flanschseite

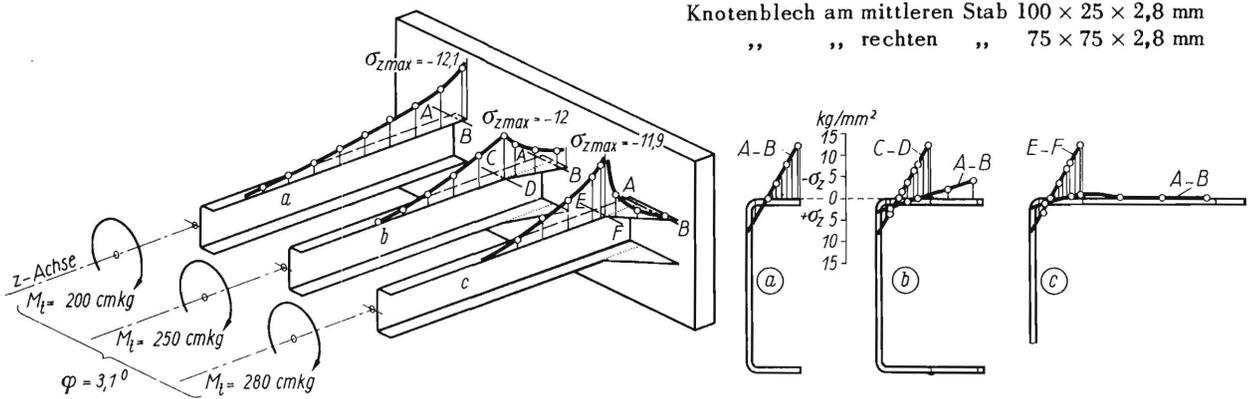


Bild 15. Normalspannungsverteilung über der Länge eines U-Profilstabes ohne und mit an den Flanschen angeschweissten Knotenblechen bei Verdrehung. U-Profil 80 x 25 x 2,8 mm, Stablänge $l = 500$ mm.

eines U-Profilstabes bei verschiedenen Knotenpunkt-ausführungen und gleichem Drehwinkel $\varphi = 3,1^\circ$ gezeigt. Wie man aus dem Verlauf der Normalspannungen erkennen kann, führen derartige eingeschweisste Eckbleche nicht zu dem gewünschten Erfolg, die Normalspannungen im Knotenpunkt abzubauen und sie gleichmässiger zu verteilen, sondern sie verlagern nur die Stelle höchster Normalspannung an den Auslauf des Knotenbleches. Bemerkenswert ist, dass der Spannungshöchstwert bei allen untersuchten Eckverbindungen annähernd gleich gross ist, dass aber das Abklingen der Normalspannungen sowohl in Richtung auf das freie Stabende als auch in Richtung auf die starre Endplatte sehr voneinander verschieden ist. Die Ecke mit den Knotenblechen 75 x 75 x 2,8 (Bild 15, rechts) führt zu einem sehr steilen Normalspannungsgefälle längs der Flanschkante.

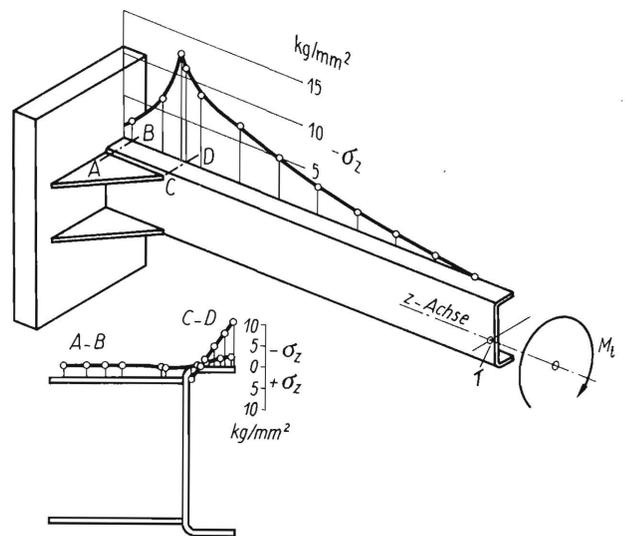


Bild 16. Beeinflussung der Normalspannungsverteilung durch zwei am Steg des U-Profilstabes angeschweisste Knotenbleche bei Verdrehung.
U-Profil 80 x 25 x 2,8 mm
Stablänge $l = 500$ mm
Knotenbleche 75 x 75 x 2,8 mm
Torsionsmoment $M_t = 190$ cmkg
Verdrehwinkel $\varphi = 3,1^\circ$
mittl. Schubspannung $\tau_m = 5,9$ kg/mm²

Auch die in Bild 16 dargestellte Konstruktion der Eckversteifung bringt bei Torsionsbeanspruchung eine ähnliche Normalspannungsverteilung über der Trägerlänge, obwohl die Knotenbleche am Steg des U-Profilstabes angeschweisst sind. Trotz der bis zur Endplatte freien Flanschkante entsteht in Höhe der Knotenblechen eine Spannungsspitze von gleicher Grösse, wie bei den Eckverbindungen in Bild 15. Zusammenfassend ist zu diesen Messergebnissen zu sagen, dass die hier untersuchten Eckversteifungen nur die Einspannstelle verlagern, jedoch nicht spannungsausgleichend wirken.

Man könnte die Normalspannungen im Einspannquerschnitt dadurch erheblich abbauen, dass man die Flansche des U-Profiles an der Einspannstelle schräg abschneidet. In diesem Falle wäre nur noch die Verwölbungsverhinderung des Profilsteges wirksam, die wie beim Flacheisen sehr gering ist. Als Eckverbindung in Rechteckrahmen wäre diese Konstruktion allerdings weniger geeignet, da der Rahmen in seiner Ebene gegen eine parallelogramm-ähnliche Verschiebung starr sein muss. Es wäre hierbei notwendig, den Steg in der Mitte durch ein horizontal angeschweisstes dreieckiges Knotenblech abzustützen.

Beispiele zur Spannungsanalyse

Die praktischen Folgen der verhinderten Querschnittsverwölbung in auf Biegung und Verdrehung beanspruchten Bauteilen sollen an zwei Beispielen aus dem Fahrzeugbau veranschaulicht werden. Bild 17 stellt den Gitterträger eines Fahrgestellrahmens dar. Die Stäbe dieses Gitterwerkes einschliesslich des Ober- und Untergurtes bestehen aus U-Profilträgern. Pfosten und Diagonalstreben sind in den Knoten mit den Gurten starr verschweisst. Bei der Verwindung des Fahrgestelles wurde dieser Träger, von links nach rechts gesehen, im Sinne einer Rechtsschraube tordiert und gleichzeitig durch die bei Verwindung entstehende Schwerpunktsverlagerung auf Biegung in senkrechter Richtung beansprucht. Beim Entwurf eines solchen

Trägers wird im allgemeinen nur die Biegung rechnerisch berücksichtigt, sodass im Untergurt eine der Biegemomentenverteilung entsprechende Spannungskurve erwartet wird. Die in Bild 17 eingezeichnete Normalspannungsverteilung, die mit statischen Feindehnungsmessern von 10 mm Messlänge an der oberen Kante des Untergurtes (Aufspannung parallel zur Gurtlängsachse) gemessen wurde, zeigt aber einen sehr unregelmässigen Spannungsverlauf. Die Null-Linie dieser Spannungskurve ist die freie Flanschseite des Untergurt-Profils. Mit Hilfe der oben gewonnenen Erkenntnisse über die Normalspannungen bei offenen Profilträgern mit verhinderter Querschnittsverwölbung lässt sich eine Analyse dieser sehr unregelmässigen Normalspannungsverteilung leicht durchführen. Da der Untergurt durch die Schwerpunktsverlagerung auf Zug beansprucht wird, erscheinen vorwiegend Zugspannungen ($+\sigma$). Diese Zugspannungen werden von

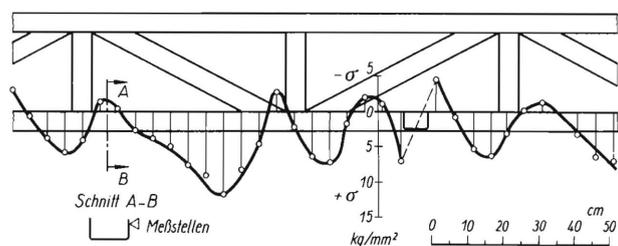


Bild 17. Spannungsverteilung im Untergurt eines geschweißten Gitterträgers bei Biege- und Verdrehbeanspruchung.

den Normalspannungen überlagert, die durch Verwölbungsbehinderung entstehen. Da jeder Knoten eine Einspannung darstellt, müssen an diesen Stellen die grössten zusätzlichen Normalspannungen entstehen. Betrachtet man jeden Untergurtabschnitt zwischen den Knoten als beidseitig eingespannten Torsionsstab, so müssen durch Verdrehung im Sinne einer Rechtsschraube jeweils am linken Ende zusätzliche Druckspannungen, am rechten Ende zusätzliche Zugspannungen entstehen. Durch Überlagerung der oben erwähnten Biegespannungen müssen sinngemäss auch die Spannungs-Nullstellen zur linken Einspannung eines jeden Gurtabschnittes verlagert sein (vergl. Bild 17). Dieses Beispiel zeigt, dass es mit Hilfe der Anschauung und nach Kenntnis des Verformungsvorganges möglich ist, eine exakte Spannungsanalyse in jedem Punkt der Konstruktion aus dem gemessenen Spannungsverlauf vorzunehmen. Ein Vorschlag zur Verbesserung der Konstruktion auf Grund der Messung würde in diesem Falle des sehr ungleichförmig beanspruchten Längsträgers die starre Verschweissung mit den freien Flanschen des Untergurtes verbieten. Eine gleichmässigeren Spannungsverteilung könnte man z.B. dadurch erreichen, dass man die Gurte und Streben des Fachwerkes nur an ihren Stegen miteinander verschweisst. Eine ähnliche Spannungsanalyse lässt sich bei dem in Bild 18 gezeigten Konstruktionen erzielen. Die hier dargestell-

ten Profilstäbe (Winkel- und U-Profil) wurden ebenfalls auf Biegung und Verdrehung beansprucht. Die Dehnungsmessungen wurden in Längsrichtung der Träger durchgeführt. Die Spannungsverteilungskurven weisen deutlich auf die Störungsstellen hin, die durch Behinderung der Querschnittsverwölbung entstehen. Wie beim Winkelprofil zu erwarten war, klingen die Normalspannungen mit zunehmender Entfernung von der Störstelle sehr rasch ab (vergl. auch Bild 10). Auf der ungestörten Länge des Trägers sind nur die durch Biegung hervorgerufenen Spannungen wirksam. Der auf sehr kurzer Strecke entstandene Spannungswechsel im Bereich der Störstelle lässt sich, wie beim Bild 17 bereits beschrieben, aus der Verwölbungsbehinderung erklären. Auf der linken Seite des senkrecht zum Träger angeschweissten Stützbleches entstehen zusätzliche Zugspannungen, die sich mit den gleichgerichteten Biegespannungen überlagern. Rechts vom Stützblech entstehen Druckspannungen, die wegen der überlagerten Zugspannungen entsprechend kleiner erscheinen, da mit dem Dehnungsmesser nur die Summe der auf der Messlänge entstehenden Dehnungen oder Stauchungen gemessen werden können.

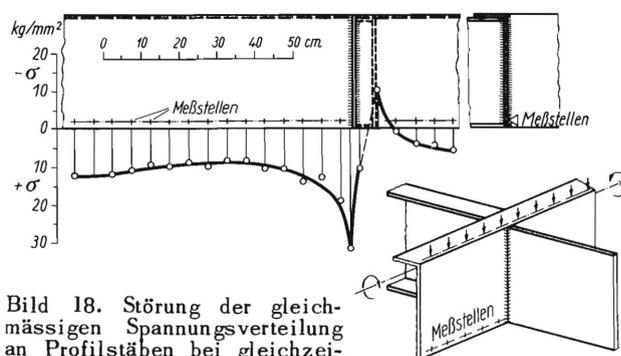


Bild 18. Störung der gleichmässigen Spannungsverteilung an Profilstäben bei gleichzeitiger Biege- und Torsionsbeanspruchung durch seitlich anschliessende Bauteile.

Die bisher behandelten Zusatzspannungen wurden in den Bauteilen durch Torsionsbeanspruchung verursacht und durch Behinderung der Querschnittsverwölbung ausgelöst. Unter der Voraussetzung, dass man den Verformungsvorgang und das Festigkeitsproblem erkennt, lässt sich mit Hilfe einfacher Überlegungen und mit einiger Anschaulichkeit eine Spannungsanalyse leicht durchführen. Als besonders wichtige Erkenntnis sei bemerkt, dass die hierbei entstandenen Zusatzspannungen immer grösser waren, als die Spannungen der Grundbelastungsfälle. Die Zusatzspannungen sind in den meisten Fällen sogar die Ursache für Risse und Brüche.

Biegespannungen stark gekrümmter Stäbe

Eine andere Art von Zusatzspannungen, die bei Nichtbeachtung der Konstruktionsgrundsätze zu Brüchen führen können, entstehen bei der Biegebeanspruchung stark gekrümmter Stäbe. Derartige Bauele-

mente kommen in der Landtechnik nicht selten vor, z.B. bei Grindeln von Pflügen und Grubberzinken oder bei den Federzinken von Heuwendern. In Bild 19 oben sind einige Anwendungsbeispiele gezeigt.

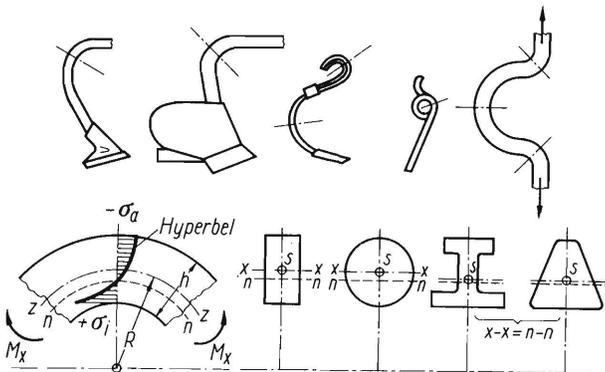


Bild 19. Spannungsverteilung über dem Querschnitt stark gekrümmter und auf Biegung beanspruchter Stäbe.
n - n: neutrale Faser.

Wird ein gerader Balken auf Biegung beansprucht, so ist die Spannungsverteilung über den Querschnitt in der Biegeebene geradlinig. Bei schwach gekrümmten, biegebeanspruchten Trägern kann die Spannungsverteilung über dem Querschnitt mit guter Näherung ebenfalls geradlinig angenommen werden. Sind die Querschnitte dieser Träger zur x -Achse symmetrisch, so fällt die neutrale Faser mit der Schwerpunktschwerachse zusammen, und die Spannungen in den Randfasern haben bei entgegengesetzten Vorzeichen den gleichen Betrag. Für stark gekrümmte Stäbe gelten diese Gesetze nicht [23 bis 29]. Die Spannungsverteilung ist hyperbolisch, und die neutrale Faser hat sich zum inneren Rand hin verschoben. Wie aus Bild 19 ersichtlich ist, entstehen bei dieser hyperbolischen Spannungsverteilung die grösseren Spannungen am inneren Rande des gekrümmten Stabes. Die Differenz zwischen den Beträgen der inneren und äusseren Randspannungen ist von dem Verhältnis des mittleren Krümmungsradius R zur Trägerhöhe h abhängig. Je kleiner dieser Quotient R/h ist, desto grösser ist der Unterschied der Spannungen σ_i und σ_a . Hierbei ist es gleichgültig, welches Vorzeichen die Spannungen haben. Der Betrag der Spannung auf der Innenfaser ist stets der grössere von beiden. Bei unendlich kleinem Krümmungsradius kann die Spannung auf der Innenfaser unendlich gross werden ($R/h \rightarrow 0; |\sigma_i| \rightarrow \infty$). Aus diesen Gründen ist es unzweckmässig, bei gekrümmten Trägern Querschnitte zu wählen, die zur x -Achse symmetrisch sind. Besonders ungünstig erscheint der Kreisquerschnitt, da die Randzone die hohen Biegespannungen nur mit sehr kleinem Querschnitt trägt. Wesentlich günstiger sind trapezförmige oder zur x -Achse unsymmetrische Doppel-T-Querschnitte für stark gekrümmte Träger (vergl. Bild 19). Bei diesen Querschnitten liegt die Schwerpunktschwerachse dichter an der neutralen Faser, wodurch der Unter-

schied der Spannungen in den Randfasern weitgehend ausgeglichen werden kann.

Statische Festigkeitsuntersuchungen an Federzinken von Gabelheuwendern, Bild 20, ergaben im gewundenen Bereich deutlich die Spannungsdifferenz zwischen Aussen- und Innenfaser, wobei die Innenfaser an der höchstbeanspruchten Stelle eine 24% höhere Spannung gegenüber derjenigen der Aussenfaser aufweist. Bemerkenswert ist die Höhe der grössten Spannung von 47 kg/mm^2 bei einem gemessenen Federweg der Zinkenspitze von nur $7,5 \text{ cm}$. Wegen der hohen Spannungen auf der Innenfaser sollte man derartige Federn aus Drähten mit trapezförmigem Querschnitt herstellen. Gemäss Bild 19 würde man erstens einen Spannungsausgleich im Sinne einer Verkleinerung der Spannungen am Innenrand erzielen; und zweitens würde die Innenfaser durch die grössere Materialanhäufung und die damit verbundene bessere Stützwirkung weniger rissempfindlich werden.

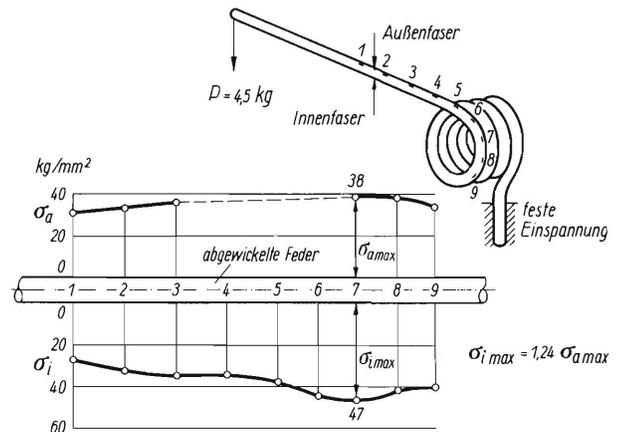


Bild 20. Spannungsverteilung längs der Aussen- und Innenfaser eines auf Biegung beanspruchten Federzinkens.

Gestelle und Gerüste landwirtschaftlicher, stationärer Maschinen werden häufig aus Rohren hergestellt. Um Schweissungen zu vermeiden, werden diese Rohre bis zu 90° und darüber gebogen. Die Biegetheorie setzt voraus, dass der Querschnitt eines Stabes bei Biegung sich nicht ändert. Diese Theorie stimmt

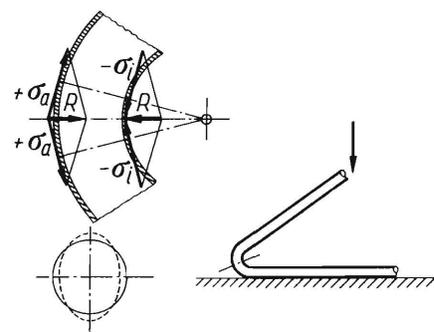


Bild 21. Spannungsabbau in den äusseren Fasern eines stark gekrümmten, dünnwandigen Kreisrohres bei Biegung.

auch für volle Querschnitte und Rohrquerschnitte mit dicken Wandstärken. Wird aber ein dünnwandiges, ursprünglich krummes Rohr gebogen, so liefern die Normalspannungen radiale Resultierende (Bild 21), welche die äusseren Fasern gegen die neutrale Achse zusammendrücken. Dadurch tritt eine Abplattung des Querschnittes zur elliptischen Form ein, sodass die Spannungen in den äusseren Fasern vermindert werden. Diese Tatsache wurde von Kármán [30] rechnerisch nachgewiesen und spricht für die Verwendung stark gekrümmter Rohre.

Zusammenfassung

Die Ausführungen haben gezeigt, dass es mit einfachen Überlegungen über den Verformungsmechanismus möglich ist, einen Überblick über die Beanspruchungen einer Konstruktion zu bekommen. Hieraus kann man qualitativ auf die Art und die Richtung der Zusatzspannungen schliessen. Messungen und Berechnungen haben ergeben, dass die zusätzlich auftretenden Spannungen besonders in den Knotenpunkten eines Bauwerkes wegen der Behinderung der Querschnittsverwölbung eine nicht zu vernachlässigende Höhe erreichen und dass sie in vielen Fällen die Ursache für Risse sind.

Bei biege- und drehbeanspruchten geraden Bauteilen vermeidet man diese Zusatzspannungen, wenn man die Gesetze beachtet, die sich um den Querkraftpunkt aufbauen. Bei biegebeanspruchten, stark gekrümmten Trägern ist die Wahl der Querschnittsform und des ursprünglichen Biegeradius entscheidend für die Höhe der Spannungen in den äusseren Fasern.

Schrifttum

- [1] Weber, C.: Torsion und Biegung durch eine Endquerlast (Schubmittelpunkt). ZAMM 4 (1924) S. 334 ff.
- [2] Trefftz, E.: Schubmittelpunkt. ZAMM 15 (1935) S. 222 ff.
- [3] Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang. 2. Band, München 1944. Darin: S. 120/128.
- [4] Kappus, R.: Schubmittelpunkt offener Profile. Arbeitsblatt des Inst. f. Festigkeit der dtsh. Vers. Anst. f. Luftfahrt. Berlin 1939.
- [5] Neuber, H.: Schubmittelpunkt, Schubspannungsverteilung und Querschnittsverwölbung dünnwandiger Träger unterhalb der Beulgrenze. Jb. d. dtsh. Luftfahrtforschung 1940, I 820/824.
- [6] Kloth, W. u. W. Bergmann: Der Schubmittelpunkt. Landtechnik 2 (1947) Heft 23/24.
- [7] Weinstein, A.: The center of shear and the center of twist. Quart. Appl. Math. 5 (1947) S. 97/99.
- [8] Haas, T.: Some notes on the shear center of thin-walled open sections. J. Roy. Aeron. Soc. 47 (1943) S. 383/89.
- [9] Roack, J.: Formulas for stress and strain. New York und London 1943, darin: S. 68/70 u. Tab. V.
- [10] Bergmann, W.: Steifigkeit sperriger Bauteile. Grundlagen der Landtechnik (1951) H. 1, S. 61/67.
- [11] Bergmann, W.: Spannung und Gestalt bei Knotenpunkten, insbesondere bei verwindungsfähigen Konstruktionen. Grundlagen der Landtechnik (1951) H. 1, S. 73/81.
- [12] Weber, C.: Verhinderte Torsionsverwölbung. ZAMM (1952) S. 574 ff.
- [13] Dietrich, O. u. E. Lehr: Das Dehnlinienverfahren. Z. VDI 76 (1932) S. 963/982.
- [14] Forest, A. V. de u. G. Ellies: Brittle Lacquer as an aid to stress analysis. J. Aeron. Sc. 7 (1940) S. 205/208.
- [15] Forest, A. V. de, G. Ellies u. F. B. Stern jr.: Brittle coatings for quantitative strain measurements. J. Appl. Mech. 9 (1942) S. A 184/88.
- [16] Durelli, A. J.: Experimental determination of isostatic lines. J. Appl. Mech., Trans. ASME 64 (1942) S. A 155/60.
- [17] Ellis, G.: Stress determination by brittle coatings. Mech. Engineering 69 (1947) S. 567/71.
- [18] Hetényi, M.: Brittle models and brittle coatings. In: Handbook of experimental stress analysis; New York und London 1950, S. 636/62.
- [19] Weber, C.: Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt. ZAMM 6 (1926) S. 85/97.
- [20] Marguerre, K.: Torsion von Flugzeugbauteilen. Ringbuch der Luftfahrt II, A 9, S. 1–21.
- [21] Schapitz, E.: Festigkeitslehre für den Leichtbau. Düsseldorf 1951. Darin: S. 39/50 und S. 194/95.
- [22] Schultz-Grunow, F.: Einführung in die Festigkeitslehre. Düsseldorf 1951. Darin S. 139/85.
- [23] Föppl, L. u. G. Sonntag: Tafeln und Tabellen zur Festigkeitslehre. München 1951.
- [24] Hütte I; 26. Auflage, Berlin 1931, S. 661/64.
- [25] Bosch, M. ten: Vorlesung über Maschinenelemente. Berlin 1940, darin S. 35/39.
- [26] Roack, J.: Formulas for stress and strain. New York und London 1943. Darin: S. 144/45 und Tabelle VII.
- [27] Lindner, G.: Biegung krummer Stäbe. ZAMM 14 (1934) S. 43/50.
- [28] Bantlin, A.: Formänderung und Beanspruchung federnder Ausgleichsrohre. Z. VDI (1910) S. 43 ff.
- [29] Pittner, E.: Zur Ermittlung des Bantlin'schen Querschnittsfaktors für stark gekrümmte Stäbe. Z. VDI 92 (1950) S. 974/76 und 93 (1951) S. 681/82.
- [30] Kármán, Th. v.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre. Z. VDI (1911) S. 1889/95.

Institut für Landtechnische Grundlagenforschung
der Forschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode
Direktor: Prof. Dr. Ing. W. Kloth

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. Walter Bergmann, (20b) Braunschweig, Forschungsanstalt für Landwirtschaft