

## Zur Festigkeit der Schleudertrommel

Wenn man einen genaueren Einblick in die Spannungsverhältnisse einer Zentrifugentrommel haben will, darf man sich nicht darauf beschränken, die Spannung im Trommelmantel nur so zu berechnen, als ob man eine unendliche Röhre vor sich habe, deren Spannung und Dehnung nicht durch die Stirnböden beeinflusst würden. Man darf auch für die Berechnung der Böden nicht einfach annehmen, daß sie außen starr eingespannt seien. Diese Annahmen führen wohl zu ziemlich genauen Ergebnissen; um sicher zu sein, ist es jedoch notwendig, genauere Berechnungen anzustellen, die zeigen sollen, ob die obigen Annahmen berechtigt sind.

Präzisere Untersuchungen führen selbst bei einfacheren Trommelformen schon zu verwickelten Rechnungen. Wir wollen uns darum hier damit begnügen, den Weg zu zeigen, wie die Spannungen in einer zylindrischen Trommel mit ursprünglich ebenen Böden (Abb. 1a) festgestellt werden können.

Zunächst sei angenommen, daß der Trommelmantel durch einen Schnitt von den beiden Böden getrennt sei (Abb. 1b) und die Böden am Rande statt durch axiale Mantelspannungen durch lose Ringstützen gehalten würden. Wenn man jetzt alle Teile für sich durch die an ihnen im Betriebszustand wirkenden Kräfte — Zentrifugalkräfte der eigenen Masse und Flüssigkeitsdrücke (auch beim Mantel in axialer Richtung) — belastet, so wird man feststellen, daß die Teile an den Anschlußstellen sich verschieden deformieren, also nicht mehr zusammenpassen. Die Durchmesser und die Randwinkel stimmen nicht mehr überein (Abb. 1c — 1e).

Um wieder eine zusammenhängende Form zu bekommen, muß man an den Schnittstellen Zwängungsspannungen annehmen.

In den Abbildungen 1f — 1i ist angedeutet, daß diese Spannungen durch auf den Umfang gleichmäßig verteilte und wechselseitig auf Mantel und Böden wirkende Kräfte und Momente hervorgerufen werden. Die Abbildungen 1f bis 1h zeigen, wie durch diese Kräfte  $P_0$  und Momente  $M_0$  der Randedurchmesser des Mantels so weit verkleinert und durch Kräfte  $P_0$  der Durchmesser des Bodens so weit vergrößert wird, daß beide Durchmesser gleich sind. In den Abbildungen 1f, 1g und 1i ist dargestellt, wie auf den Mantel Biegemomente und Kräfte und auf den Deckel gleich große entgegengesetzt wirkende Biegemomente in der Größe wirken, daß die Randwinkel übereinstimmen.

In Abbildung 1e ist angedeutet, daß die vom Mantel und Boden gebildete Ecke starr ausgeführt ist. Nach der Verformung soll also wie zu Anfang im Axialschnitt der Mantelrand senkrecht auf der zugehörigen Bodenkurve stehen.

Abbildung 1l zeigt die durch die Belastung verformte Trommel.

### Bestimmung der Deformationskräfte und Momente

Es bezeichnet

1.  $V_1$  die radiale Verschiebung des Mantels (als Röhre ohne Stirnböden angenommen) unter dem Einfluß der Zentrifugalkraft der Eigenmasse und des Flüssigkeitsdruckes (Dehnung durch Axialspannung mitgerechnet),
2.  $V_2$  die radiale Verschiebung des Bodenrandes durch die Zentrifugalkraft der Eigenmasse des Deckels,
3.  $V_3 = -AP_0 + BM_0$  die radiale Verschiebung des Mantels durch gleichmäßig auf dem Umfang verteilte Kräfte (Zwängungskräfte)  $P_0$  kg/cm Umfang und Momente  $M_0$  cmkg/cm Umfang ( $P_0$  + bei Zugspannung zwischen Mantel und Boden,  $M_0$  +, wenn im Uhrzeigersinn wirkend) \*) ( $A$  und  $B$  sind durch die Mantelabmessungen gegebene Konstanten),

\*) Die Formeln 3., 4., 6. und 7. werden hier, um die Zusammenhänge möglichst einfach erscheinen zu lassen, nicht abgeleitet.

4.  $V_4 = CP_0$  die radiale Verschiebung des Bodenrandes durch gleichmäßig am Anfang verteilte Zwängungskräfte kg/cm Umfang ( $C$  = durch die Bodenabmessungen gegebene Konstante. Durch  $M_0$  wird praktisch der Bodenrand nicht verschoben),
5.  $\alpha_1$  die Winkeländerung am Bodenrand durch den Boden-  
druck,

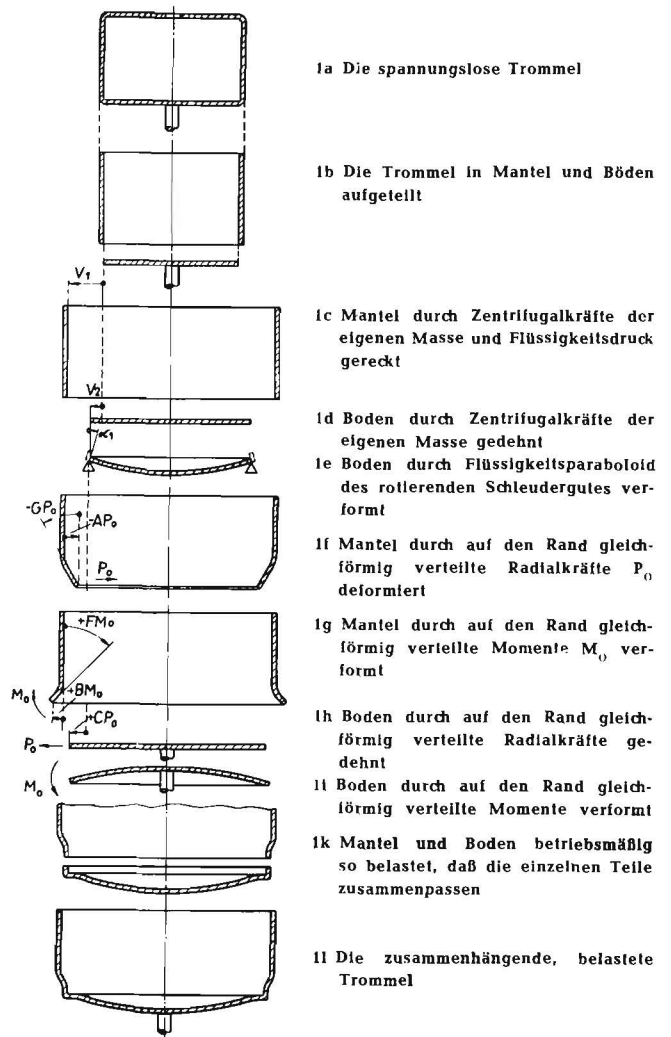


Abb. 1: Die Verformung einer Zentrifugentrommel

6.  $\alpha_2 = -DM_0$  die Winkeländerung am Bodenrand durch gleichmäßig auf dem Umfang verteilte Momente (Zwängungsmomente)  $M_0$  in cmkg/cm Umfang ( $D$  eine durch die Bodenabmessungen bestimmte Konstante),
7.  $\alpha_3 = -GP_0 + FM_0$  die Winkeländerung am Mantelrand durch gleichmäßig auf dem Umfang verteilte Zwängungskräfte  $P_0$  in kg/cm Umfang und Zwängungsmomente  $M_0$  in cmkg/cm Umfang.  
( $G$  und  $F$  sind durch die Mantelabmessungen gegebene Konstanten).

Somit kann man folgende Deformationsgleichungen aufstellen

Für die radialen Verschiebungen gilt

$$V_1 + V_3 = V_2 + V_4 \quad \text{oder} \quad V_1 - AP_0 + BM_0 = V_2 + CP_0 \quad (8).$$

Für die Winkeländerungen gilt

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 \quad \text{oder} \quad \alpha_1 - DM_0 = -GP_0 + FM_0 \quad (9).$$

Aus Gl. (9) folgt

$$\alpha_1 + GP_0 = DM_0 + FM_0$$

$$M_0 = \frac{\alpha_1 + GP_0}{D + F} \quad (10).$$

Setzt man  $M_0$  in Gl. (8) ein, so erhält man

$$V_1 - AP_0 + B \frac{\alpha_1 + GP_0}{D + F} = V_2 + CP_0$$

$$CP_0 + AP_0 - \frac{BG}{D + F} P_0 = V_1 + B \frac{\alpha_1}{D + F} - V_2$$

$$P_0 = \frac{V_1 + \frac{B \alpha_1}{D + F} - V_2}{C + A - \frac{BG}{D + F}} \quad (11).$$

Damit ist  $P_0$  aus den Abmessungen der Trommel und den Verformungen einfacher Teile — Verformungen einer Röhre und Verformungen einer runden Platte — berechnet.

Dadurch, daß man  $P_0$  nach Gl. (11) in Gl. (10) einsetzt, erhält man auch für

$$M_0 = \frac{\alpha_1 + G \frac{V_1 + [B\alpha_1/(D + F)] - V_2}{C + A - [BG/(D + F)]}}{D + F}$$

einen Wert, der aus den Trommelabmessungen und Verformungen einfacher Teile bestimmt ist.

Mit diesem Ergebnis läßt sich die Berechnung einer Trommel bezüglich Spannung und Verformung in eine Reihe Einzelaufgaben zerlegen. Durch Superposition kann man dann die Einzelresultate an jeder Stelle zusammenzufassen und erhält so das Endresultat.

Nachfolgend sind die Einzelaufgaben zusammengestellt:

- Berechnung der Spannungen und Verformungen in einem rotierenden Ring.
- Berechnung der Spannungen und Verformungen in einer Röhre, die innen unter Flüssigkeitsdruck steht (Axialspannungen und Dehnungen berücksichtigt).
- Berechnung der Verformungen in einer rotierenden Scheibe.
- Berechnung der Verformungen in einer Röhre, die durch gleichmäßig auf dem Rand verteilte Kräfte belastet ist.
- Berechnung der Verformungen in einer Kreisscheibe, die durch gleichmäßig auf dem Umfang verteilte Zugkräfte radial beansprucht ist.
- Berechnung der Verformungen in einer Kreisscheibe, die am Umfang lose abgestützt und durch ein Flüssigkeitsparaboloid belastet ist.
- Berechnung der Verformungen in einer Kreisscheibe, die durch gleichmäßig über dem Außenrand verteilte Momente belastet ist.
- Berechnung der Verformungen in einer Röhre, die durch gleichmäßig auf dem Rand verteilte Momente belastet ist.
- Berechnung der Zwängungskräfte  $P_0$  und der Zwängungsmomente  $M_0$  nach Gleichung (11) und (12) und Verwertung der erhaltenen Werte bei der Lösung der Aufgaben d) g) und h).

Mit diesen Rechnungen bekommt man eine wesentlich bessere Übersicht, als wenn man nur mit den anfangs erwähnten Annahmen arbeitet.

Man darf aber nicht übersehen, daß auch hier noch mehrere Vereinfachungen vorgenommen wurden. Es wurde schon erwähnt, daß die Ecken als starr angesehen sind. Bei der Beanspruchung durch den in axialer Richtung wirkenden Flüssigkeitsdruck wurde nicht berücksichtigt, daß der Mantel im Belastungszustand am Rand verformt ist. Im Verlauf der

Einzelberechnungen werden noch weitere Vereinfachungen erwähnt. Zur Zeit läßt sich der Einfluß dieser Vereinfachungen durch überschlägige Rechnung beurteilen.

Nach diesen allgemein gehaltenen Ausführungen sollen nun die wichtigsten Formeln angegeben und durch Ausrechnung eines Beispiels ein Überblick über die auftretenden Spannungen gegeben werden.

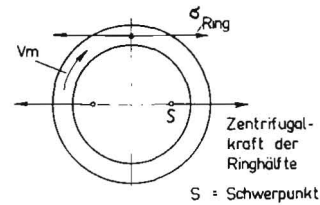


Abb. 2: Die Beanspruchung eines rotierenden Ringes

### a) Rotierender Ring

Die Spannung in einem rotierenden Ring, hervorgerufen durch die Zentrifugalkräfte der eigenen Masse (Abb. 2)

$$\sigma_{\text{Ring}} = \frac{\gamma}{g} v_m^2$$

$\gamma$  = spezifisches Gewicht des Ringmaterials in  $\text{kg/cm}^3$ ,

$g$  =  $981 \text{ cm/sec}^2$

$v_m$  = mittlere Umfangsgeschwindigkeit

$$= \frac{2 \pi R_m \cdot n}{60} \text{ (cm/sec).}$$

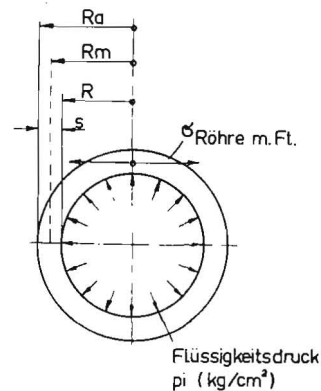


Abb. 3: Die Beanspruchung einer Röhre durch Flüssigkeitsdruck

### b) rotierende Röhre unter Flüssigkeitsdruck

Die Spannung in einer vollständig mit Flüssigkeit gefüllten, rotierenden Röhre, hervorgerufen durch den Flüssigkeitsdruck (Abb. 3)

$$\sigma_{\text{Röhre m. Fl.}} = 0,00051 \gamma_F \frac{R}{s} v^2$$

$\gamma_F$  = spezifisches Gewicht der Flüssigkeit in  $\text{kg/cm}^3$

$R$  = Innenradius der Röhre in cm

$s$  = Wanddicke der Röhre in cm

$v$  = Geschwindigkeit am Innenumfang der Röhre

$$= \frac{2 \pi R n}{60} \text{ (cm/sec).}$$

Die Axialspannung (Abb. 4)

$$\sigma_{\text{ax}} = \frac{B_F}{2 \pi R_m s}; \quad R_m = R + \frac{s}{2}$$

$B_F$  = Druckkraft der Flüssigkeit auf den Boden in kg;

$$B_F = \frac{\gamma_F}{g} \frac{\pi R^4 \omega^2}{4}; \quad \omega = \frac{\pi n}{30}; \quad n = \text{Drehzahl/Min}$$

$$\sigma_{\text{ax}} = \frac{\gamma_F}{g} \frac{\pi R^4 \omega^2}{8 \pi R_m s} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

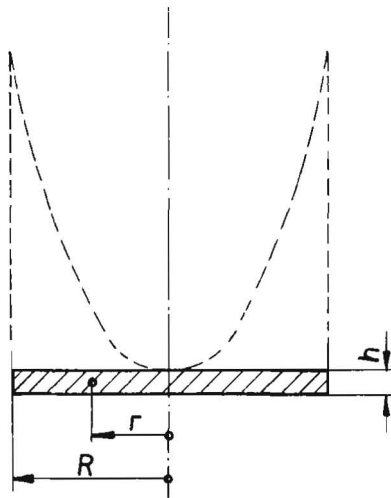


Abb. 4: Die Belastung des Trommelbodens

Alle Spannungen sind unter der Annahme berechnet, dass  $s$  im Verhältnis zu  $R$  klein ist.

Die Dehnung in tangentialer Richtung

$$\epsilon_t = \frac{1}{E} \left( \sigma_t - \frac{\sigma_{ax}}{m} \right); \quad E = 2\,200\,000 \text{ (kg/cm}^2\text{) für Stahl}$$

$$m = \frac{10}{3} \quad \text{für Stahl}$$

$$\sigma_t = \sigma_{\text{Ring}} + \sigma_{\text{Röhre m. Fl.}} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

Gesamte Verlängerung in tangentialer Richtung

$$\epsilon_t \cdot 2 \pi R_m \text{ (cm).}$$

Mittlerer Umfang nach der Dehnung

$$2 \pi R_m + 2 \pi R_m \epsilon_t \text{ (cm).}$$

Diesem Durchmesser entspricht ein Radius

$$\frac{2 \pi R_m + 2 \pi R_m \epsilon_t}{2 \pi} = R_m + R_m \epsilon_t = R_m + V_1 \text{ (cm).}$$

Gegenüber dem ungespannten Zustand hat sich also der Radius  $R_m$  um  $V_1 = R_m \epsilon_t$  vergrößert.

Beispiel für

$$R = 18 \text{ cm}; \quad s = 2 \text{ cm};$$

$$R_m = 19 \text{ cm}; \quad n = 6000 \text{ U/min};$$

$$R_a = 20 \text{ cm};$$

$$\gamma = \frac{7,85}{1000} \text{ kg/cm}^3 \text{ (spez. Gewicht des Stahles);}$$

$$\gamma_F = \frac{1}{1000} \text{ (spez. Gewicht des Wassers).}$$

$$\sigma_{\text{Ring}} = \frac{\gamma}{g} v_m^2 = \frac{7,85}{1000} \cdot \frac{1}{981} \cdot 142\,500\,000 = 1140 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{Röhre m. Fl.}} = 0,00051 \gamma_F \frac{R}{s} v^2$$

$$= 0,00051 \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{18}{2} \cdot 127\,500\,000;$$

$$= 585 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_t = \sigma_{\text{Ring}} + \sigma_{\text{Röhre m. Fl.}} = 1140 + 585 = 1725 \text{ kg/cm}^2;$$

$$B_F = \frac{\gamma_F \pi R^3 \omega^2}{g \cdot 4} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{981} \cdot \frac{3,14 \cdot 18^4 \cdot 628^2}{4} = 33\,100 \text{ kg};$$

$$\sigma_{ax} = \frac{B_F}{2 \pi R_m s} = \frac{33\,100}{2 \cdot 3,14 \cdot 19 \cdot 2} = 138 \text{ kg/cm}^2.$$

$$V_1 = \frac{R_m}{E} \left( (\sigma_{\text{Ring}} + \sigma_{\text{Röhre m. Fl.}} - \frac{\sigma_{ax}}{m}) \right) \text{ (cm)}$$

$$V_1 = \frac{19}{2\,200\,000} (1140 + 585 - 0,3 \cdot 138) \text{ (cm)}$$

$$V_1 = 0,0145 \text{ cm.}$$

Der Einfluß der an sich schon kleinen Axialspannung auf die Dehnung ist gering.

### c) Rotierende Scheibe

Die radiale Verschiebung des Bodenrandes durch die Zentrifugalkraft der Eigenmasse des Bodens

$$V_2 = \frac{m-1}{m} \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2}{E} \frac{R^3}{4} \text{ (cm)}$$

$$V_2 = \frac{10/3-1}{10/3} \frac{0,00785}{981} \frac{628^2}{2\,200\,000} \frac{18^3}{4} = 0,00146 \text{ cm.}$$

### d) Rotierende Röhre unter Zwangskräften

Die radiale Verschiebung des Mantelrandes durch gleichmäßig auf dem Umfang verteilte Kräfte  $P_0$  (kg/cm Umfang) und Momente  $M_0$  (cmkg/cm Umfang)  $P_0$  +, wenn zur Achse gerichtet,  $M_0$  +, wenn im Uhrzeigersinn wirkend

$$V_3 = -AP_0 + BM_0 = -\frac{2 \lambda R_m^2}{E s} P_0 + \frac{2 \lambda^2 R_m^2}{E s} M_0 \text{ (cm);}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt[4]{3 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}}{\sqrt{s \cdot R_m}} = \frac{\sqrt[4]{3 \left(1 - 0,3^2\right)}}{\sqrt{2 \cdot 19}} = 0,209;$$

$$A = \frac{2 \lambda R_m^2}{E s} = \frac{2 \cdot 0,209 \cdot 19^2}{2\,200\,000 \cdot 2} = 0,0000344 \text{ (cm}^2\text{/kg);}$$

$$B = \frac{2 \lambda^2 R_m^2}{E s} = \frac{2 \cdot 0,209^2 \cdot 19^2}{2\,200\,000 \cdot 2} = 0,00000717 \text{ (cm/kg).}$$

### e) Rotierende Scheibe unter Zwangskräften

Die radiale Verschiebung des Bodenrandes durch gleichmäßig am Umfang verteilte Kräfte  $P_0$  (kg/cm Umfang)

$$V_4 = C P_0 = \frac{1 - \frac{1}{m}}{E h} R P_0 \text{ (cm);}$$

$$C = \frac{1 - \frac{1}{m}}{E h} R = \frac{1 - 1/10}{2\,200\,000 \cdot 2,5} \cdot 18 = 0,0000229 \text{ (cm}^2\text{/kg).}$$

### f) Rotierende Scheibe unter Flüssigkeitsdruck

Die Winkeländerung am Bodenrand durch den Druck des Flüssigkeitsspannbereichs

$$\alpha_1 = \frac{\omega^2 (m-1) R^5}{4 \cdot 981 \cdot 1000 m E h^3} \text{ im Bogenmaß;}$$

$$= \frac{628^2 (10/3-1) 18^5}{4 \cdot 981 \cdot 1000 \cdot 10/3 \cdot 2\,200\,000 \cdot 2,5^3} = 0,00387$$

im Bogenmaß.

### g) Rotierende Scheibe unter Zwangsmomenten

Die Winkeländerung am Bodenrand durch gleichmäßig auf dem Umfang verteilte Momente  $M_0$  (cmkg/cm Umfang)

$$\alpha_2 = -DM_0 = -\frac{12 R (m-1)}{m E h^3} M_0 \text{ im Bogenmaß;}$$

$$D = \frac{12 R (m-1)}{m E h^3} = \frac{12 \cdot 18 (10/3-1)}{10/3 \cdot 2\,200\,000 \cdot 2,5^3} = 0,0000437 \text{ (cm/kg).}$$

### h) Rotierende Röhre unter Zwangsmomenten

Die Winkeländerung am Mantelrand durch gleichmäßig auf dem Umfang verteilte Kräfte  $P_0$  (kg/cm Umfang)

$$\alpha_3 = -G P_0 + F M_0 = -\frac{2 \lambda^2 R_m^2}{E s} P_0 + \frac{4 \lambda^3 R_m^2}{E s} M_0$$

im Bogenmaß;

$$G = \frac{2 \lambda^2 R_m^2}{E s} = B = \frac{2 \cdot 0,209^2 \cdot 19^2}{2 \cdot 200 \cdot 000 \cdot 2} = 0,00 \ 000 \ 717;$$

$$F = \frac{4 \lambda^3 R_m^2}{E s} = 2 \lambda B = \frac{4 \cdot 0,209^3 \cdot 19^2}{2 \cdot 200 \cdot 000 \cdot 2} = 0,00 \ 000 \ 299.$$

**i) Berechnung der Zwangskräfte und -momente und ihrer Spannungen**

Die Zwangskräfte  $P_0$  und  $M_0$  zwischen Mantel und Boden

$$P_0 = \frac{V_1 - V_2 + \frac{B \alpha_1}{D+F}}{C + A - \frac{B G}{D+F}} = 567 \text{ kg/cm};$$

$$M_0 = \frac{\alpha_1 + G \frac{V_1 + [B \alpha_1 / (D+F)] - V_2}{C + A - [B G / (D+F)]}}{D+F} = \frac{\alpha_1 + G P_0}{D+F} = 1078 \text{ cmkg/cm}.$$

Die durch  $P_0$  erzeugte Spannung am Bodenrand

$$\sigma_{P_0 \text{ BR}} = \frac{P_0}{h} = \frac{567}{2,5} = 227 \text{ kg/cm}^2.$$

Die durch  $M_0$  erzeugte Maximal-Spannung am Bodenrand (Stirnfläche)

$$\sigma_{M_0 \text{ BR}} = \frac{6 M_0}{h^2} = \frac{6 \cdot 1078}{2,5^2} = 1035 \text{ kg/cm}^2.$$

Die durch  $M_0$  erzeugte Maximal-Spannung am Mantelrand (Mantelfläche)

$$\sigma_{M_0 \text{ MR}} = \frac{6 M'_0}{s^2} = \frac{6 \cdot 1078}{2^2} = 1615 \text{ kg/cm}^2.$$

Berechnet man die maximalen Biegespannungen am Bodenrand unter der Annahme, daß der Boden am Umfang fest eingespannt ist, so erhält man

$$\sigma_{M'_0 \text{ BR}} = \frac{1,274 R^4 \omega^2}{10^7 h^2} = \frac{1,274 \cdot 18^4 \cdot 628^2}{10^7 \cdot 2,5^2} = 845 \text{ kg/cm}^2.$$

Es ist aber auch

$$\sigma_{M'_0 \text{ BR}} = \frac{6 M'_0}{h^2}; \text{ also}$$

$$M'_0 = \frac{h^2 \sigma_{M'_0 \text{ BR}}}{6} = \frac{2,5^2 \cdot 845}{6} = 880 \text{ cmkg}.$$

Dieses Moment erzeugt im Mantelrand eine Spannung

$$\sigma_{M'_0 \text{ MR}} = \frac{6 M'_0}{s^2} = \frac{6 \cdot 880}{2^2} = 1320 \text{ kg/cm}^2.$$

Es sei hier nur nebenbei vermerkt, daß man durch Schwächen oder Verstärken in gewissen zulässigen Grenzen und durch besondere Formgebung (besonders große Rundungen) des Überganges zwischen Mantel und Boden  $P_0$  und  $M_0$  verändern kann.

Spannungen in einer rotierenden Scheibe konstanter Dicke. Radialspannungen:

$$\sigma_{r \text{ rot. Sch.}} = \frac{3 + \frac{1}{m}}{8} \frac{\gamma}{g} v^2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Tangentialspannungen:

$$\sigma_{t \text{ rot. Sch.}} = \frac{3 + \frac{1}{m}}{8} \frac{\gamma}{g} v^2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \frac{1 + \frac{3}{m}}{3 + \frac{1}{m}} \right).$$

| 0, ... R | cm   | $\sigma_{r \text{ rot. Sch.}}$ kg/cm <sup>2</sup> | $\sigma_{t \text{ rot. Sch.}}$ kg/cm <sup>2</sup> |
|----------|------|---|---|
| 0        | 0    | 0,4125 $\gamma/g v^2 = 420$                       | 0,4125 $\gamma/g v^2 = 420$                       |
| 0,1 R    | 1,8  | 0,408 $\gamma/g v^2 = 416$                        | 0,410 $\gamma/g v^2 = 418$                        |
| 0,2 R    | 3,6  | 0,396 $\gamma/g v^2 = 404$                        | 0,402 $\gamma/g v^2 = 410$                        |
| 0,3 R    | 5,4  | 0,375 $\gamma/g v^2 = 382$                        | 0,388 $\gamma/g v^2 = 396$                        |
| 0,4 R    | 7,2  | 0,346 $\gamma/g v^2 = 352$                        | 0,374 $\gamma/g v^2 = 382$                        |
| 0,5 R    | 9,0  | 0,309 $\gamma/g v^2 = 315$                        | 0,353 $\gamma/g v^2 = 360$                        |
| 0,6 R    | 10,8 | 0,264 $\gamma/g v^2 = 269$                        | 0,327 $\gamma/g v^2 = 334$                        |
| 0,7 R    | 12,6 | 0,210 $\gamma/g v^2 = 214$                        | 0,296 $\gamma/g v^2 = 302$                        |
| 0,8 R    | 14,4 | 0,148 $\gamma/g v^2 = 151$                        | 0,261 $\gamma/g v^2 = 266$                        |
| 0,9 R    | 16,2 | 0,078 $\gamma/g v^2 = 79,5$                       | 0,220 $\gamma/g v^2 = 224$                        |
| R        | 18   | 0   | 0,175 $\gamma/g v^2 = 178,5$                      |

Wenn eine sehr kleine Bohrung in der Mitte der Scheibe ist, verdoppelt sich die Tangentialspannung in der Mitte, die Radialspannung wird 0. Am Außenrand wird die Spannung durch die kleine Bohrung praktisch nicht verändert. Siehe die Spannungen in einer rotierenden Röhre.

Spannungen in einer Kreisscheibe gleicher Dicke, die am Umfang gleichmäßig durch  $P_0$  (kg/cm Umfang) auf Zug beansprucht wird:

Die Radial- und Tangentialspannungen sind bei dieser Belastungsart gleich und haben auch an allen Punkten der Scheibe den gleichen Wert:

$$\tau_{P_0 \text{ BR}} = \frac{P_0}{h} = \frac{567}{2,5} = 227 \text{ kg/cm}^2.$$

Spannungen in einer Kreisscheibe gleicher Dicke, die am Umfang gleichmäßig durch Momente  $M_0$  (cmkg/cm Umfang) belastet ist: Die maximalen Radial- und Tangentialspannungen an den Oberflächen haben überall den gleichen Wert

$$\sigma_{M_0 \text{ BR}} = \frac{6 M_0}{h^2} = \frac{6 \cdot 1078}{2,5^2} = 1035 \text{ kg/cm}^2.$$

Lose am Rande aufliegende Kreisscheibe mit Belastung durch ein bis zur Mitte reichendes Flüssigkeitsparaboloid:

Tangentialspannungen

$$\sigma_{t \text{ FL-Par.}} = \frac{m E}{m^2 - 1} \frac{h N}{48} [R^4 (1 + 5m - r^4 (5 + m))],$$

Radialspannungen

$$\sigma_{r \text{ FL-Par.}} = \frac{m E}{m^2 - 1} \frac{h N}{48} (5m + 1) (R^4 - r^4).$$

In diesen Formeln ist  $N = \frac{\omega^2 (m^2 - 1) 3}{2 \cdot 981 \cdot 1000 m^2 E h^3}$

| 0, ... R | cm   | $\sigma_{r \text{ FL-Par.}}$ kg/cm <sup>2</sup> | $\sigma_{t \text{ FL-Par.}}$ kg/cm <sup>2</sup> |
|----------|------|---|---|
| 0        |      | 1118  | 1118  |
| 0,1 R    | 1,8  | 1117  | 1118  |
| 0,2 R    | 3,6  | 1115  | 1118  |
| 0,3 R    | 5,4  | 1110  | 1115  |
| 0,4 R    | 7,2  | 1088  | 1105  |
| 0,5 R    | 9,0  | 1045  | 1090  |
| 0,6 R    | 10,8 | 970   | 1050  |
| 0,7 R    | 12,6 | 852   | 995   |
| 0,8 R    | 14,4 | 660   | 907   |
| 0,9 R    | 16,2 | 386   | 715   |
| R        | 18   | 0   | 593   |

Tangentialspannungen im Mantelrand infolge gleichmäßiger Belastung des Mantelrandes durch radial nach innen gerichtete Kräfte  $P_0$  (kg/cm Umfang)

$$\sigma_t P_0 \text{ Mantel} = \frac{E V_3}{R_{III}} = \frac{-2\,200\,000 \cdot 0,0118}{19} = -1360 \text{ kg/cm}^2.$$

$$V_3 := -A P_0 + B M_0 = -0,0000344 \cdot 567 + 0,00000717 \cdot 1078;$$

$$V_3 := -0,0118 \text{ cm.}$$

Am Mantelrand verbleibt also durch die Einwirkung des Bodens nur eine Tangentialspannung

$$\sigma_t - \sigma_t P_0 \text{ Mantel} = 1725 - 1360 = 365 \text{ kg/cm}^2.$$

### k) Genauere Berechnungen der Spannungen

Bei unseren bisherigen Berechnungen haben wir angenommen, daß in einer Röhre, die durch Zentrifugalkräfte der eigenen Masse und durch Flüssigkeitsdruck belastet ist, die Tangentialspannungen über den ganzen Querschnitt konstant sind.

Genauer errechnen sich die Radial- und Tangentialspannungen in einer rotierenden Röhre durch die Zentrifugalkräfte der eigenen Masse zu

$$\sigma_r \text{ Ring} = \frac{\gamma'}{g} v^2 \frac{3 + \frac{1}{m}}{8} \left[ 1 - \frac{r^2}{R_a^2} + \frac{R^2}{R_a^2} - \frac{R^2}{r^2} \right];$$

$$\sigma_t \text{ Ring} = \frac{\gamma'}{g} v^2 \frac{3 + \frac{1}{m}}{8} \left[ 1 - \frac{r^2}{R_a^2} + \frac{1 + \frac{3}{m}}{3 + \frac{1}{m}} + \frac{R^2}{R_a^2} + \frac{R^2}{r^2} \right].$$

| r (cm) | $\sigma_r$ Ring kg/cm <sup>2</sup> | $\sigma_t$ Ring kg/cm <sup>2</sup> |
|--------|------------------------------------|------------------------------------|
| 18     | 0                                  | 1215                               |
| 18,5   | 3,9                                | 1170                               |
| 19     | 5,2                                | 1125                               |
| 19,5   | 3,9                                | 1098                               |
| 20     | 0                                  | 1060                               |

$\sigma_r$  Ring war in unserer vereinfachten Rechnung nicht erwähnt. Für  $\sigma_t$  Ring war  $\sigma_{\text{Ring}} = 1140 \text{ kg/cm}^2$  gefunden. Der Vergleich dieses Wertes mit der genaueren Rechnung zeigt, daß die vereinfachte Rechnung genügt.

Bezeichnet  $p_i$  (kg/cm<sup>2</sup>) den Flüssigkeitsdruck in der Röhre, so ergeben sich bei einer genaueren Rechnung für die Radial- und Tangentialspannungen folgende Formeln

$$\sigma_r \text{ Röhre m. Fl.} = \frac{p_i R^2}{R_a^2 - R^2} \left[ 1 - \frac{R_a^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_t \text{ Röhre m. Fl.} = \frac{p_i R^2}{R_a^2 - R^2} \left[ 1 + \frac{R_a^2}{r^2} \right]$$

$\sigma_t$  Röhre m. Fl. war zu  $\sigma$  Röhre m. Fl. = 585 kg/cm<sup>2</sup> errechnet.

Auch hier sieht man, daß die praktische Rechnung genügt.

| r (cm) | $\sigma_r$ Röhre m. Fl. kg/cm <sup>2</sup> | $\sigma_t$ Röhre m. Fl. kg/cm <sup>2</sup> |
|--------|--|--|
| 18     | -65  | 618  |
| 18,5   | -47  | 600  |
| 19     | -30,5                                      | 585  |
| 19,5   | -14,4                                      | 568  |
| 20     | 0  | 554  |

#### Schrifttum:

- [1] Marquerre, K.: Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs. Abschnitt III, Flügge, W.: Die Festigkeit von Schalen. Berlin: Springer 1950
- [2] Timoshenko, S.: Theorie of plates and shells. Kap. XI, General theory of cylindrical shells. New York: McGraw-Hill Book Comp, Inc. 1940
- [3] Kantorowitsch, S. B.: Die Festigkeit der Apparate und Maschinen für die chemische Industrie. Berlin: VEB Verlag Technik 1955
- [4] Schmitz, C.: Zerlegung und Reinigung von Flüssigkeiten durch Schleuderkraft. Z. VDI Bd. 70, Nr. 23, S. 757, 1926
- [5] Wilsmann, W.: Die Festigkeit der Schleudertrommel. Chemische Apparatur. 27. Jahrg., Heft 15, S. 225, Springer, Berlin
- [6] Wilsmann, W.: Die Beanspruchung der Stirnbegrenzung (Boden und Deckel) von Zentrifugentrommeln durch axialen Flüssigkeitsdruck. Fette, Seifen, Anstrichmittel (1957) Nr. 8, S. 663, Industrieverlag von Hernhausen KG., Hamburg

## Résumé:

Dr.-Ing. W. Wilsmann: „Zur Festigkeit der Schleudertrommel.“

Will man den tatsächlichen Spannungsverhältnissen in einer Zentrifugentrommel durch Berechnung möglichst nahe kommen, so genügt es nicht, sie als unendliche Röhre zu betrachten. Man muß vielmehr die Spannungen und Dehnungen durch die Stirnböden berücksichtigen, die ihrerseits wiederum nicht einfach als außen starr eingespannt anzusehen sind. Der Verfasser bestimmt zunächst die Deformationskräfte und -momente des Mantels und Bodens und führt mit diesen Werten sämtliche Einzelrechnungen aus, deren Ergebnisse sich an jeder Stelle zu einem Endergebnis zusammenfassen lassen. An Beispielen wird ferner noch gezeigt, daß eine noch genauere Rechnung in den meisten Fällen überflüssig ist.

Dr. Ing. W. Wilsmann: "On the Resistance to Stresses of Centrifugal Drums."

When attempting to calculate as accurately as possible the actual stresses set up in centrifugal drums it is not sufficient to regard the drum as an endless tube. It is most important that stresses and deformations occurring in the end covers of the drum be also taken into consideration. These, in turn, cannot be treated as being under constant internal pressure. The author first determined the various deforming and distorting forces and moments in the walls and covers of the drum. Further calculations were then made by the aid of the values thus obtained, the results of which can at all stages of the calculations be combined to obtain a final result. Some examples have been included in the paper, from which it can be seen that more accurate calculations are, in most cases, superfluous.

Dr.-Ing. W. Wilsmann: «A propos de la résistance du bol centrifugeur.»

Quand on veut déterminer, par calculs, aussi exactement que possible, les tensions effectives développées dans un bol de centrifugeur, il ne suffit pas de le considérer comme un cylindre indéfini. Il faut plutôt tenir compte des tensions et dilatations provenant des parois frontales, qui de leur part, ne doivent pas être considérées comme simplement intercalées, d'une façon rigide, de l'extérieur. L'auteur détermine d'abord les efforts et couples de déformation du cylindre et du fond et effectue à l'aide de ces grandeurs tous les calculs isolés dont les résultats permettent d'en déduire à tout moment un résultat final. L'auteur montre en outre par des exemples qu'il est dans la plupart des cas inutile d'effectuer des calculs encore plus précis.

Ing. Dr. W. Wilsmann: «La resistencia de un tambor centrifugo.»

Para acercarse por cálculo lo más cerca que sea posible a las tensiones efectivas que se producen en un tambor centrifugo, no basta considerarlo como tubo de longitud infinita, sino que han de tenerse en cuenta también las tensiones y las dilataciones que se producen en los dos fondos, los que a su vez no deben considerarse sencillamente como extendidos de forma rígida por la circunferencia. El autor empieza por definir los esfuerzos y los momentos de deformación de la envoltura y de los fondos, ejecutando con estos valores todos los cálculos individuales que en cada punto pueden resumirse en un resultado final. Se demuestra además en algunos ejemplos que en la mayoría de los casos huelga establecer un cálculo más exacto todavía.