

Berücksichtigung der Fließgrenze τ_0 bei der Berechnung der laminaren Rohrströmung landwirtschaftlicher Suspensionen

Dr.-Ing. M. Türk, KDT

Forschungszentrum für Mechanisierung der Landwirtschaft Schlieben/Bornim der AdL der DDR, Betriebsteil Potsdam-Bornim

Verwendete Formelzeichen

A		dimensionslose Kennzahl
$(dv/dr)_{Nw}$	1/s	Newton'sche Schergeschwindigkeit an der Rohrwand
$(dv/dr)_w$	1/s	korrigierte Schergeschwindigkeit nicht-Newton'scher Medien an der Rohrwand
d	m; mm	Rohrinnendurchmesser
k	$N \cdot s^n/m^2$	Konsistenzkoeffizient
l	m	Rohrlänge
m		Exponent des verallg. Casson-Gesetzes
n		Fließexponent
Δp	Pa	Druckverlust
$\Delta p/\Delta l$	Pa/m	spezifischer Druckverlust
r	m	Radius als laufende Koordinate
R	m	Rohrradius
r_0	m	Radius der Pfropfenströmung
Re		Reynoldszahl
Re _B		Reynoldszahl für Binghamplastische Substanzen
Re _n		verallgemeinerte Reynoldszahl
Re _{n'}		modifizierte verallg. Reynoldszahl
Re _{n0}		Reynoldszahl für nichtlinearplastische Substanzen

Tr	%	Trockensubstanzgehalt
\dot{V}	$m^3/s; m^3/h$	Volumenstrom, Durchsatz
\dot{V}_0	m^3/s	Volumenstrom des ungesicherten Pfropfens
v	m/s	mittlere Strömungsgeschwindigkeit
v_0	m/s	Geschwindigkeit des ungesicherten Pfropfens
η	$N \cdot s/m^2$	Newton'sche Viskosität
η_{pl}	$N \cdot s/m^2$	plastische Viskosität
η_s	$N \cdot s/m^2$	Scheinviskosität pseudoplastischer Substanzen
η_{s0}	$N \cdot s/m^2$	Scheinviskosität nichtlinearplastischer Substanzen
λ		Rohrreibungszahl
λ_1		Rohrreibungszahl nach Gl. (6)
λ_2		Rohrreibungszahl nach Gl. (20)
λ_3		Rohrreibungszahl nach Gl. (9)
λ_4		Rohrreibungszahl nach Gl. (19)
ρ	kg/m^3	Dichte
τ	Pa	Schubspannung
τ_0	Pa	Fließgrenze
τ_w	Pa	Wandschubspannung

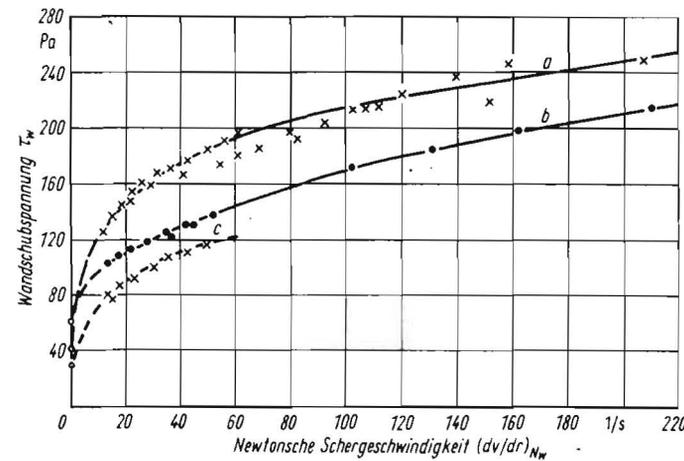


Bild 1. Fließkurven konzentrierter landwirtschaftlicher Futtermischungen bei laminarer Rohrströmung (s. Tafel 1)

1. Problemstellung

Landwirtschaftliche Suspensionen, z. B. fließfähige Futtermischungen, Gülle, Klär- und Bioschlamm, haben zumeist pseudoplastisches ($\tau_0 = 0$) oder nichtlinearplastisches ($\tau_0 > 0$) Fließverhalten [1] (Bild 1), das mit Hilfe von Potenzgesetzen am einfachsten beschrieben werden kann (Bild 2). Dabei werden die Ansätze von Ostwald und de Waele für

$$\tau_0 = 0: \tau = k \left(\frac{dv}{dr} \right)^n \quad (1)$$

und von Herschel/Bulkley für

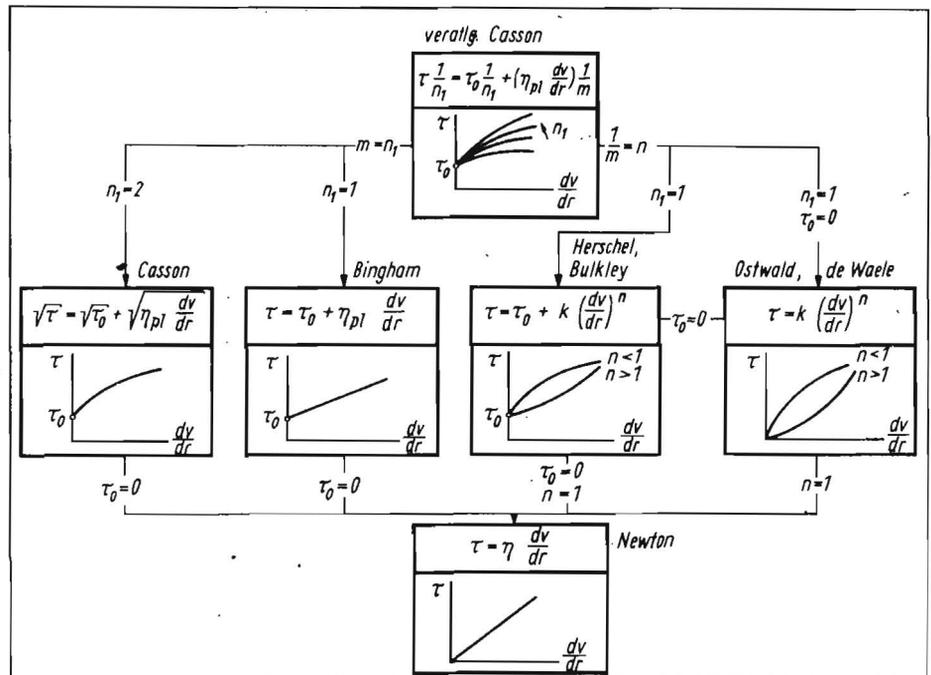
$$\tau_0 > 0: \tau = \tau_0 + k \left(\frac{dv}{dr} \right)^n \quad (2)$$

sowie das Bingham-Gesetz am häufigsten angewendet.

Das Casson-Gesetz ist für viele konzentrierte landwirtschaftliche Suspensionen nicht verwendbar [1].

Die Integration von Gl. (1) führt zu einer einfachen Druckverlust-Durchsatz-Beziehung (4) und bietet für die praktische Anwendung keine Probleme [1]. Die Anwendung von Gl. (2) für die laminare Rohrströmung wurde von Bauchhage [2] und Eckstädt [3] gezeigt, wobei die Berechnung

Bild 2. Ordnungsschema von Potenzgesetzen



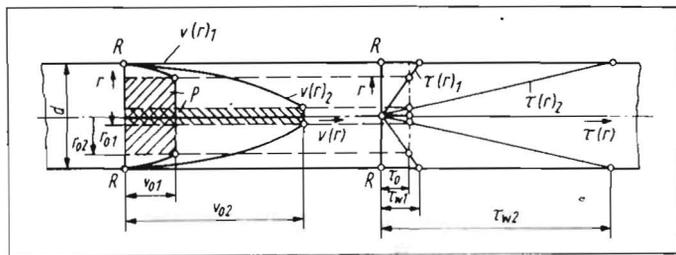


Bild 3. Laminarströmung plastischer Medien im Rohr; P Pfropfen

des Druckverlustes jedoch mit erheblichem Rechenaufwand verbunden ist.

Daher wird bei praktischen Berechnungen im Betrieb und in der Projektierung oft vereinfachend $\tau_0 = 0$ angenommen, zumal die reproduzierbare Bestimmung von τ_0 , insbesondere bei konzentrierten Suspensionen, problematisch ist.

Im folgenden wird eine vereinfachte Näherungsberechnung zur Bestimmung des Druckverlustes auf der Grundlage des Herschel-Bulkley-Gesetzes gezeigt und anhand praktischer Beispiele diskutiert.

2. Rohrströmungsberechnung für $\tau_0 > 0$

2.1. Exakte Berechnung der Druckverluste

Wird Gl. (1) in die allgemeine Gleichung der laminaren Rohrströmung

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_N = \frac{4 \dot{V}}{\pi R^3} = \frac{4}{\tau_n} \int_0^R \tau^2 f(\tau) d\tau \quad (3)$$

eingesetzt, so erhält man für pseudoplastische Medien die Druckverlust-Durchsatz-Beziehung [4]:

$$\dot{V}(\Delta p) = \frac{\pi}{8} \left(\frac{\Delta p}{\Delta l k}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{3n+1}\right) d^{3n+1} \quad (4)$$

Analog ergibt sich mit Gl. (2) [2]:

$$\dot{V}(\Delta p) = \dot{V}_0 + 2\pi \int_0^R r v(r) dr$$

$$\dot{V}(\Delta p) = \frac{\pi}{8} \left(\frac{\tau_n}{k}\right)^{\frac{1}{n}} d^3 \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n + 2\frac{\tau_0}{\tau_n}(n^3 + n^2) + 2n^3 \left(\frac{\tau_0}{\tau_n}\right)^2}{(3n+1)(2n+1)(n+1)} \right] \quad (5)$$

mit \dot{V}_0 als Pfropfenströmung (Bild 3).

Gl. (5) wurde von Eckstädt [3] in anderer Form beschrieben und nach Einführung der Rohrreibungszahl

$$\lambda_1 = \frac{\Delta p}{\Delta l} \frac{2d}{\rho v^2} \quad (6)$$

sowie der verallgemeinerten Reynoldszahl

$$Re_n = \frac{v^{2-n} d^n \rho}{k} \quad (7)$$

und der dimensionslosen Kennzahl

$$A = \frac{\tau_0}{\rho v^2} \quad (8)$$

ergab sich ein Widerstandsgesetz $\lambda = f(Re_n, A, n)$, in dem die gesuchte Rohrreibungszahl mehrfach implizit enthalten ist und nur durch Probiervorgang mit Hilfe elektronischer Rechner gelöst werden kann. Für verschiedene Fließexponenten n wurden Diagramme der Funktion $\lambda = f(Re_n, A)$ errechnet, so daß mit Re_n und A die Rohrreibungszahl λ_3 aufgesucht werden kann.

Bauchhage zeigte unter Verwendung von Gl. (5) ein Widerstandsgesetz der laminaren Rohrströmung, das ebenfalls nur iterativ gelöst werden kann [2]:

$$\lambda_3 = \frac{8}{Re_n'} \left[1 - \frac{\tau_0}{\tau_n} \right]^{n+1} \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n + 2\frac{\tau_0}{\tau_n}(n^3 + n^2) + 2n^3 \left(\frac{\tau_0}{\tau_n}\right)^2}{2(3n+1)(2n+1)(n+1)} \right]^n \quad (9)$$

2.2. Vereinfachte Näherungsberechnung

Auf der Grundlage der Definition einer äquivalenten, prozeßbestimmenden Scheinviskosität η_S wird im folgenden das für Newtonsche Flüssigkeiten gewonnene Widerstandsgesetz

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (10)$$

auch für nicht-Newtonsche Medien verwendet, indem die Änderungen gegenüber dem Newtonschen Verhalten in einer Modifikation der Reynoldszahl berücksichtigt werden. Das wurde für pseudoplastische Medien bereits bestätigt [1] [5]:

$$Re_n' = \frac{vd\rho}{\eta_S}$$

$$Re_n' = \frac{v^{2-n} d^n 8\rho}{k \left(\frac{6n+2}{n}\right)^n} = \frac{8}{\left(\frac{6n+2}{n}\right)^n} Re_n \quad (11)$$

Die Scheinviskosität η_S ist das mit der Dynamik des Systems veränderliche, nur für einen betrachteten Punkt der Fließkurve gültige Verhältnis zwischen Schubspannung und Schergeschwindigkeit [5]. Bei der Definition von η_S ist vor allem die richtige Wahl des Geschwindigkeitsgradienten an den prozeßbestimmenden Stellen entscheidend. Für den Druckverlust im Rohr ist die Scheinviskosität an der Rohrwand prozeßbestimmend, und an dieser Stelle liegt der niedrigste Viskositätswert vor. Da das Fließgesetz und damit auch die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr oftmals unbekannt sind, wird η_S mit Hilfe der Newtonschen Schergeschwindigkeit $(dv/dr)_{Nw}$ berechnet [2] [5]:

$$\eta_S = \frac{\tau_n}{\left(\frac{dv}{dr}\right)_{Nw}} = \frac{\tau_n d}{8v} \quad (12)$$

Auf Grundlage von Gl. (1) ergibt sich damit die Beziehung

$$\eta_S = k \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n \left(\frac{8v}{d}\right)^{n-1} \quad (13)$$

die zur Berechnung von Re_n' nach Gl. (11) verwendet wird.

Für nichtlinearplastische Medien nach Gl. (2) wird in Analogie zur Rabinowitsch-Korrektur des Potenzgesetzes (1) [1] näherungsweise angenommen:

$$\tau_w - \tau_0 = k \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n \left(\frac{8v}{d}\right)^n \quad (14)$$

Dabei wird vereinfacht mit der korrigierten Schergeschwindigkeit an der Rohrwand

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_{w4} = \left(\frac{dv}{dr}\right)_{Nw} \left(\frac{3n+1}{4n}\right) \quad (15)$$

gerechnet, wobei sich der exakte Ausdruck aus Gl. (5) ableitet:

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_{w3} = \left(\frac{dv}{dr}\right)_{Nw} \frac{1}{4 \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_w}\right) \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n + 2\frac{\tau_0}{\tau_w}(n^3 + n^2) + 2n^3 \left(\frac{\tau_0}{\tau_w}\right)^2}{(3n+1)(2n+1)(n+1)} \right]^{\frac{1}{n}}}, \quad (16)$$

der für $n = 1$ und $\tau_0/\tau_w = 0$ mit Gl. (15) identisch ist.

Durch die näherungsweise Berechnung des Schergradienten $(dv/dr)_{w4}$ ergeben sich im Bild 4 gezeigten Abweichungen, die vom Schubspan-

Tafel 1. Fließkennwerte und Rohrreibungszahlen einiger landwirtschaftlicher Fördermedien

Kurzzeichen im Bild 1	Medium, Zusammensetzung	Tr %	V̇ m³/h	d mm	Fließkennwerte				τ₀ Pa	Rohrreibungszahlen			
					τ₀ = 0		τ₀ > 0			λ₁ nach Gl. (6) (Messung)	λ₂ nach Gl. (20) (τ₀ = 0)	λ₃ nach [3] u. Gl. (9)	λ₄ nach Gl. (19)
					k N · sⁿ/m²	n	k N · sⁿ/m²	n					
a	Futtermischung aus chem. konservierten Zuckerrüben (21,28 % ZR; 21,28 % TMF; 57,44 % Wasser)	23,34	4,80 12,26 18,71	99,979	44,6936	0,2434	9,3215	0,5000	60	26,934 5,013 2,367	25,624 4,932 2,348	33,053 5,929 2,815	25,997 4,915 2,362
b	Futtermischung aus getr. Kartoffeln (5,55 % Schrot; 5,55 % Flocken; 22,22 % TMF; 66,68 % Wasser)	29,8	7,65 15,00 21,30 7,05 14,18 19,50	99,979	50,0209	0,2905	26,8582	0,3871	40	14,866 4,594 2,525 1,806 0,574 0,342	14,595 4,616 2,535 2,030 0,615 0,357	14,996 4,918 2,692 2,268 0,686 0,384	14,612 4,610 2,541 2,083 0,650 0,383
c	gedämpfte, chem. kons. Kartoffeln	19,57	5,62 19,25	124,763	42,8390	0,2766	22,8483	0,3884	29,43	39,890 4,932	41,157 4,932	47,801 5,328	41,238 4,945
	Klärschlamm [8]	6,7 bis 5,4	5 10 20	100	—	—	0,1952	0,5430	0,3923	—	—	0,355 0,117 0,037	0,330 0,109 0,037
	Schweinegülle [8]	14,43	5 10 20 50	100	—	—	0,5900	0,7200	0,8350	—	—	1,296 0,507 0,197 0,059	1,263 0,487 0,192 0,057

nungsverhältnis τ₀/τ_w und vom Fließexponenten n abhängig sind. Für das bei praktischen Förderproblemen zumeist auftretende Verhältnis τ₀/τ_w ≤ 0,3 wird vereinfachend die Gültigkeit von Gl. (14) angenommen und der Einfluß von τ₀/τ_w vernachlässigt.

Es wird eine Scheinviskosität für nichtlinearplastische Medien definiert:

$$\eta_{st} = \frac{\tau_0 d}{8 v} + k \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n \left(\frac{8v}{d} \right)^{n-1} \quad (17)$$

Mit η_{st} erfolgt entsprechend Gl. (11) eine Modifikation der verallgemeinerten Reynoldszahl bei Anwendung der Herschel-Bulkley-Beziehung:

$$Re_{st} = \frac{v d \rho}{\eta_{st}}$$

$$Re_{st} = \frac{v d \rho}{\frac{\tau_0 d}{8 v} + k \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n \left(\frac{8v}{d} \right)^{n-1}}$$

$$Re_{st} = \frac{1}{\frac{\tau_0}{8 v^2 \rho} + \frac{k}{v^{2-n} d^n 8 \rho}}$$

$$Re_{st} = \frac{1}{\frac{\tau_0}{8 v^2 \rho} + \frac{1}{Re'_n}}$$

Das Widerstandsgesetz der laminaren Rohrströmung nichtlinearplastischer Medien kann mit Re_{st} demnach wie folgt formuliert werden:

$$\lambda_4 = \frac{64}{Re_{st}} = \frac{64}{v d \rho} \left[\frac{\tau_0 d}{8 v} + k \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n \left(\frac{8v}{d} \right)^{n-1} \right] \quad (19)$$

Damit ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung für die praktische Berechnung von Druckverlusten unter Berücksichtigung der Fließgrenze τ₀. Aus den Gln. (18) und (19) folgen für

— pseudoplastische Flüssigkeiten (τ₀ = 0) die verallgemeinerte Reynoldszahl Re'_n nach Gl. (11) und

$$\lambda_2 = \frac{64}{Re'_n} \quad (20)$$

— Bingham-plastische Substanzen (n = 1; k = η_{pl}) die Reynoldszahl für plastische Medien, die von vielen sowjetischen Autoren beschrieben wird [6]:

$$Re_B = \frac{1}{\frac{\tau_0}{6 v^2 \rho} + \frac{\eta_{pl}}{v d \rho}}$$

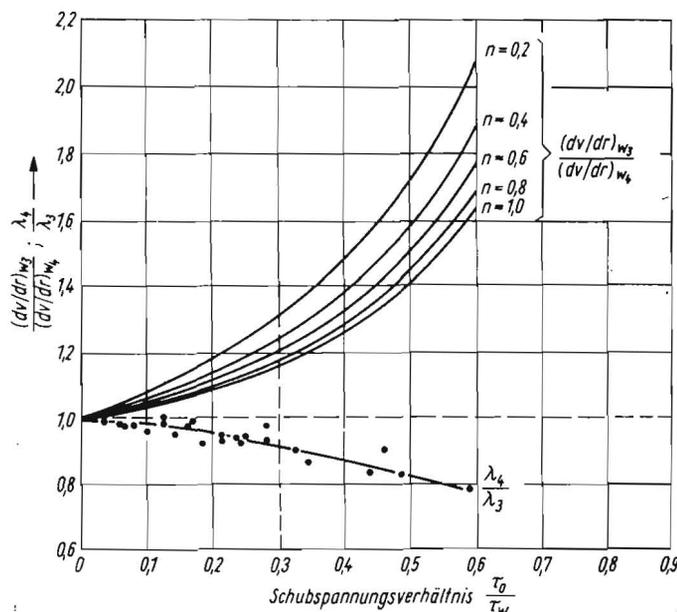
$$\lambda = \frac{64}{Re_B}$$

— reinviskose Newtonsche Flüssigkeiten (n = 1; k = η; τ₀ = 0) die Reynoldszahl

$$Re = \frac{v d \rho}{\eta} \quad \text{und } \lambda \text{ nach Gl. (10).}$$

Mit den Gln. (19), (18) und (6) kann weiterhin eine näherungsweise Berechnung der Druckverlust-Durchsatz-Beziehung erfolgen:

Bild 4. Fehlerverlauf bei näherungsweise Berechnung der Schergeschwindigkeit (dv/dr)_{w4} nach Gl. (15) und der Rohrreibungszahl λ₄ nach Gl. (19)



$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{4\tau_0}{d} + \frac{4k}{d} \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n \left(\frac{32\dot{V}}{\pi d^3} \right)^n \quad (21)$$

bzw.

$$\dot{V}(\Delta p) = \frac{\pi d^3}{8} \frac{n}{3n+1} \left(\frac{\Delta p d}{4k} - \frac{\tau_0}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (22)$$

3. Anwendung

Bei allen Berechnungsverfahren steht weiterhin das Problem der reproduzierbaren Fließkennwertbestimmung im Vordergrund. Entscheidend für die Auswahl eines Viskosimeters ist für diese Medien die Sicherung der Übertragbarkeit der Fließkennwerte und deren praktischer Anwendungsbereich. So ist zur Rohrströmungsberechnung konzentrierter landwirtschaftlicher Suspensionen, die oft grobdisperse Komponenten beinhalten, die Anwendung eines Rohrviskosimeters notwendig, so daß mit den integralen Meßgrößen \dot{V} und $\Delta p/\Delta l$ eine reproduzierbare Fließkurve ermittelt werden kann [1].

Ist der praktische Anwendungsbereich der Schergeschwindigkeit bekannt, kann z. T. auch bei $\tau_0 > 0$ der Ansatz nach Ostwald und de Waele (1) zugrunde gelegt und mit Gl. (4) der gesuchte Druckverlust bei bestimmtem Gültigkeitsbereich für verschiedene \dot{V} und d errechnet werden, wenn k und n mit Rohrviskosimeter bestimmt wurden. Eine Gegenüberstellung der Rohrreibungszahlen λ für verschiedene landwirtschaftliche Suspensionen (Tafel 1) zeigt, daß die gemessenen λ_1 - und nach Gl. (20) errechneten λ_2 -Werte gut übereinstimmen.

Zur Bestimmung der Fließgrenze τ_0 ist die Extrapolation der Fließkurve am einfachsten (Bild 1), so daß k und n durch lineare Regression der Form

$$\lg(\tau_w - \tau_0) = \lg k + n \lg(dv/dr)_w \quad (23)$$

ermittelt werden können. Die Schergeschwindigkeit $(dv/dr)_w$ ergibt sich aus Gl. (16) oder als Näherung nach Gl. (15). Dabei errechnen sich natürlich andere k - und n -Werte als bei der Annahme pseudoplastischen Fließverhaltens nach Gl. (1).

Beim Einsatz eines Rotationsviskosimeters für homogene Suspensionen ist durch Zusatzeinrichtungen eine direkte τ_0 -Messung möglich [7].

Sind τ_0 , k und n bekannt, kann für den Bereich $\tau_0/\tau_w \leq 0,3$ (Bild 4) mit Gl. (19) oder Gl. (21) der Druckverlust für bestimmte v und d mit hinreichender Genauigkeit berechnet werden (Bild 5). Damit ist es möglich, die meisten praktischen Förderungsprobleme zu behandeln, wie es die Gegenüberstellung der λ_3 - und λ_4 -Werte in Tafel 1 zeigt.

So ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung der Berechnung der Druckverluste, und es besteht bei $\tau_0/\tau_w > 0,3$ die Möglichkeit der Überprüfung und Korrektur der Rohrreibungszahl λ_3 mit Hilfe von Gl. (9).

4. Zusammenfassung

Der oftmals in der Praxis anzutreffenden Unsicherheit bei der Anwendung der Herschel-Bulkley-Beziehung (2) auf die Druckverlustberechnung laminarer Rohrströmung wurde von Bauckhage [2] und Eckstädt [3] Rechnung getragen, die Widerstandsgesetze ableiteten, die den τ_0 -Einfluß voll erfassen. Diese Berechnungsvorschläge sind jedoch kompliziert und für ingenieurmäßige Rechnungen in der Praxis kaum durchführbar.

Mit Hilfe einer definierten äquivalenten Viskosität η_{SO} für nichtlinearplastisches Fließverhalten nach Gl. (2) wurde eine Modifikation der verallgemeinerten Reynoldszahl (18) vorgenommen und die Anwendung des Widerstandsgesetzes nach Gl. (19) vorgeschlagen.

Damit ist zur Berechnung von Druckverlusten die Kenntnis der Stoffkennwerte k , n , τ_0 und ρ sowie der technischen Vorgabewerte v und

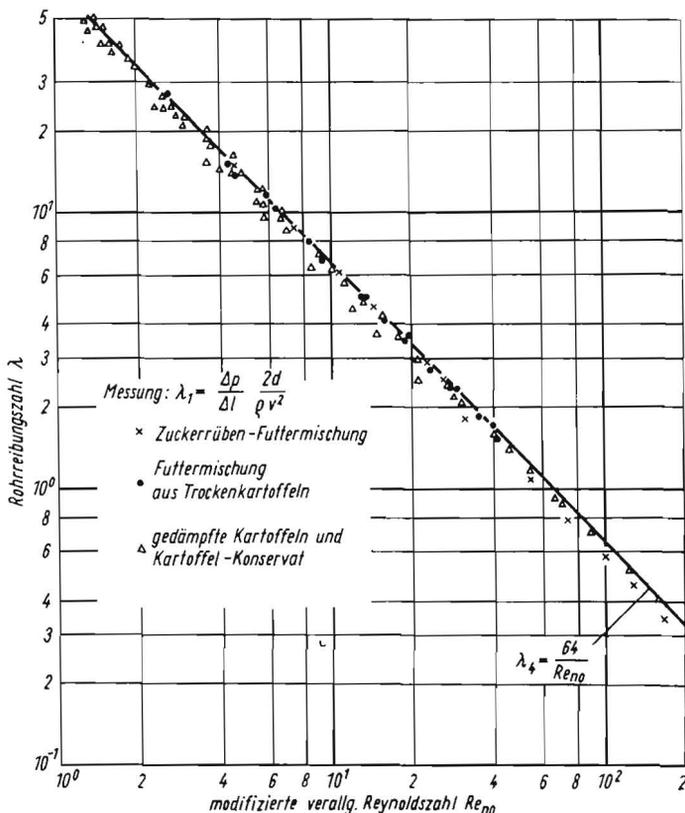


Bild 5. Rohrreibungszahl in Abhängigkeit von der modifizierten verallgemeinerten Reynoldszahl; Vergleich von berechneten und gemessenen λ -Werten

d erforderlich. Die Anwendbarkeit von Gl. (19) sowie die Anwendungsgrenzen der vorgeschlagenen Berechnungsmethode werden anhand praktischer Beispiele (Tafel 1) gezeigt.

Literatur

- [1] Türk, M.: Beitrag zum Berechnen horizontaler Rohrleitungssysteme für konzentrierte fließfähige Hackfruchtfuttermischungen unter besonderer Berücksichtigung des Zuckerrübenansatzes. Universität Rostock, Sektion Landtechnik, Dissertation 1975.
- [2] Bauckhage, K.: Die Viskosität von Suspensionen. Teil II: Anwendungsbeispiele für nicht-Newtonsche Reibungsansätze. Chemie-Ingenieur-Technik, Weinheim 45 (1973) H. 17, S. 1087—1092.
- [3] Eckstädt, H.: Druckverluste bei laminarer Rohrströmung quasiplastischer Flüssigkeiten. Wasserwirtschaft-Wassertechnik, Berlin 25 (1976) H. 6, S. 194—195.
- [4] Reher, E.-O.; Pfannschmidt, P.: Mechanische Verfahrenstechnik. Lehrbriefe für das Hochschulfernstudium Nr. F 63/1—3.
- [5] Haroske, D.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Rohrleitungstransport hochkonzentrierter Suspensionen mit feindispersen Feststoff. TH für Chemie Leuna-Merseburg, Dissertation 1970.
- [6] Lichačev, F. S.: Pneumatische Förderung fließfähiger Futtermischungen in der Schweinemast. Moskva: Izdat. Mašinstroenie 1967.
- [7] Schemel, H.; Hörnig, G.: Zur Fließgrenze von Gülle und ihrer Bestimmung. agrartechnik 26 (1976) H. 7, S. 327—330.
- [8] Hörnig, G.: Beitrag zur Bemessung von Berechnungsrohrleitungen beim Klärschlamm- und Gülletransport. TU Dresden, Dissertation 1969. A 1471

Messeausgabe „die Technik“

Wir weisen unsere Leser darauf hin, daß — wie in jedem Jahr — das Heft 3 der technisch-wissenschaftlichen Zeitschrift für Grundsatz- und Querschnittsfragen „die Technik“ als Sonderheft zur Leipziger Frühjahrsmesse 1978 erscheint.

Die Vorstellung der Neu- und Weiterentwicklungen der einzelnen Industriezweige erfolgt z. T. in ausführlicher Form als Fachartikel, der sowohl die technischen Details als auch die verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten des Exponats enthält, aber auch als technische Kurzinformation.

Wie in den vergangenen Jahren erhalten Sie die Messeausgabe „die Technik“ im Freiverkauf in Leipzig an allen Zeitungskiosken und Souvenirverkaufsstellen auf dem Gelände der Technischen Messe zum Preis von 3,00 Mark. Da die Auflage erfahrungsgemäß sehr schnell vergriffen ist, raten wir unseren Lesern, sich das Heft rechtzeitig vor, spätestens bei Messebeginn zu besorgen.