

Zum Problem der Berechnung dynamischer Auftreffkräfte von Förderströmen rieselfähiger Güter

Dr.-Ing. D. RUSSEL, KDT*

1. Bedeutung der dynamischen Auftreffkraft

Sie ist in zweifacher Hinsicht interessant. Für sehr druckempfindliche Güter, wie Äpfel, Eier, Kartoffeln usw. ist diese Kraft die Ursache für Beschädigungen und daraus resultierendem Verderb. Andererseits interessiert die dynamische Auftreffkraft als Wirkung auf die Unterlage. Bei einem kontinuierlichen Wägevorgang bewirkt sie z. B. einen erheblichen Nachstromfehler. Innerhalb von Förderlinien stellt sie ebenfalls an den Übergabestellen einen Störfaktor dar, der sich als verschlechterte Übergabedingungen oder verschleißerhöhend bemerkbar macht. Daraus resultieren einige konstruktive Probleme. Eine Reihe von Autoren /1/ /2/ /3/ haben sich daher mit diesem Problem beschäftigt.

2. Theoretische Betrachtungen zur dynamischen Auftreffkraft

Im einfachsten Fall betrachtet man einen Förderstrom als Reihenfolge von einzelnen, unabhängig voneinander fallenden Körpern. LUBRICH /1/ führte diese Untersuchung für rein elastische Körper durch, wobei er von einem Modell gemäß Bild 1 ausging.

Bewegungsgleichung des fallenden Körpers:

$$\frac{G}{g} \frac{dx^2}{dt^2} + c \cdot x = G \quad (1)$$

Erweiterung mit $\frac{dx}{dt} \cdot dt$

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{dx^2}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = G \cdot dx - c \cdot x \cdot dx \quad (2)$$

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{dx^2}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} = d \left[\frac{G}{g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = dT \quad (3)$$

ist die Differentialgleichung der kinetischen Energie

$$G \cdot dx - c \cdot x \cdot dx = d \left[G \cdot dx - \frac{c \cdot x^2}{2} \right] = dA \quad (4)$$

lautet die Differentialgleichung der potentiellen Energie. Es gilt

$$\sim dT = dA \quad (5)$$

Nach Integration von $t_0 - t_1$ folgt:

$$T_1 - T_0 = A \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (6)$$

Wählt man als t_0 den Zeitpunkt der Fallauslösung und für t_1 den Zeitpunkt der größten Federauslenkung, so heben die potentiellen Energien einander auf.

$$A \Big|_{t_0}^{t_1} = G(h + x_1) - \frac{c \cdot x_1^2}{2} = 0 \quad (7)$$

Mit $\frac{G}{c} = x_0$ folgt

$$x_1^2 - 2x_0 \cdot x_1 - 2x_0 \cdot h = 0 \quad (9)$$

Hieraus läßt sich die maximale Federauslenkung eliminieren

$$x_1 = x_0 + \sqrt{x_0^2 + 2x_0 \cdot h} \quad (10)$$

Damit folgt für die dynamische Kraft als Produkt von Federsteifigkeit und Auslenkung

$$F_{\text{dyn}} = c \cdot x \quad (11)$$

mit einer Kraftspitze

$$F_{\text{dyn}} = c \cdot x_1 = G \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{h}{x_0}} \right) \quad (12)$$

In der Erkenntnis, daß es schon bei Fallhöhen über 2 m unwesentlich ist, ob die Fallhöhe aus einem kleinen Gewicht und einer großen Höhe oder umgekehrt resultiert, ermittelte LUBRICH /1/ die im Bild 2 gezeigte Abhängigkeit der maximalen dynamischen Kraft von der Federsteifigkeit der Unterlage. Diese Betrachtungsweise hat zwei Nachteile. Sie geht erstens von rein elastischen Körpern aus und unterstellt zweitens deren gegenseitige Nichtbeeinflussung.

KARPIN /2/ stützt sich bei seinen Betrachtungen auf hydrodynamische Analogien. Er nimmt an, daß man es mit einem eindimensionalen Materialstrom zu tun hat, der parallel zu einer bestimmten Koordinatenachse verläuft, wobei Druck, Geschwindigkeit, Schüttdichte und Dichte Funktionen einer einzigen Koordinate und der Zeit sind.

Unter dieser Voraussetzung ist die Kontinuitätsgleichung für Schüttstoffe anwendbar.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

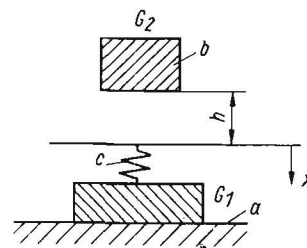
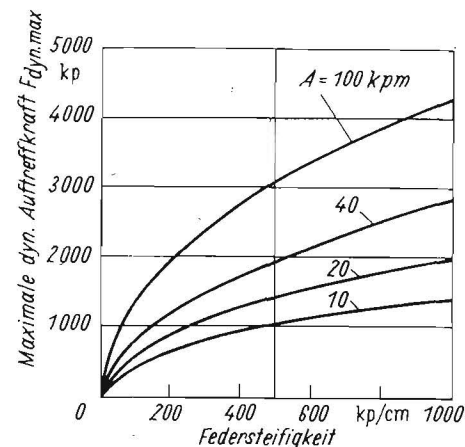


Bild 1
Modell: fallender Körper - Unterlage.
a Unterlage,
b fallender Körper

Bild 2. Abhängigkeit der maximalen dynamischen Auftreffkraft von der Federsteifigkeit.
A potentielle Energie



* Sektion Landtechnik der Universität Rostock (Direktor: Prof. Dr.-Ing. habil. C.J.R. EICHLER)

Unter obiger Annahme gilt

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

Damit lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

Die Voraussetzung, daß Druck, Dichte und Geschwindigkeit nur Funktionen der Fallhöhe und der Zeit sind, ergibt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot v_z = 0 \quad (16)$$

Nach Differentiation unter Voraussetzung $\rho = \rho(z)$ folgt

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot v_z \quad (17)$$

Aus (16) und (17) ergibt sich

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

Die Fallgeschwindigkeit des Gutstroms folgt aus der Bewegungsgleichung eines beschleunigt bewegten Körpers.

$$\frac{dv_z}{dt} = g \quad (19)$$

$$v_z = v_0 + g t \quad (20)$$

Damit wird die Falldauer des Materials

$$t_{\text{Fall}} = \frac{1}{g} (v_z - v_0) \quad (21)$$

Mit $v_z = \sqrt{2gz + v_0^2}$ folgt

$$t_{\text{Fall}} = \frac{1}{g} (\sqrt{2gz + v_0^2} - v_0) \quad (23)$$

Nach Einsetzen von v_z in die Kontinuitätsgleichung (18) ergibt sich

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{g \cdot \rho}{\sqrt{2gz + v_0^2}} = 0 \quad (24)$$

Nach Integration und der Bestimmung der Konstanten unter den Bedingungen $t = 0$ und $\rho = \rho_0$ folgt

$$\rho = \frac{v_0 \cdot \rho_0}{g t + v_0} \quad (25)$$

Mit Gleichung (20), (22) und (23) folgt

$$\rho = \frac{\rho_0 \cdot v_0}{\sqrt{2gz + v_0^2}} \quad (26)$$

Die Bewegungsgleichung für Schüttstoffe kann unter den gegebenen Bedingungen und unter Berücksichtigung der aus der Kontinuitätsgleichung hergeleiteten Beziehungen mit Hilfe der Eulerschen Bewegungsgleichung für ideale Flüssigkeit abgeleitet werden.

Damit wird auch hier angenommen, daß eine ideale Flüssigkeit vorliegt, bei der zwischen den einzelnen Teilchen keine Kohäsionskräfte wirken, so daß sich die Teilchen unabhängig voneinander bewegen können.

Im vorliegenden Fall, einer eindimensionalen Aufgabe, können die Eulerschen Bewegungsgleichungen auf nur eine Gleichung zurückgeführt werden.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial z} = v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (27)$$

Versteht man unter „hydrodynamischer“ Auftreffdruck F eines Stromes aus Schüttstoff das Gewicht einer Säule G_s von der Höhe z und der Grundfläche A_0 , so ist

$$F = \frac{G_s}{A_0} \quad (28)$$

Da $\frac{dG_s}{dt} < 0$ ist, folgt

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{1}{A_0} \cdot \frac{dG_s}{dz} \quad (30)$$

Mit Gleichung (22), (30) und $\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{g}{\sqrt{2gz + v_0^2}}$

ergibt sich aus der Eulerschen Bewegungsgleichung (27)

$$\frac{dG_s}{dz} = \rho \cdot g \cdot A_0 \quad (31)$$

Mit Gl. (26) folgt:

$$\frac{dG_s}{dz} = \frac{\rho_0 \cdot g \cdot A_0 \cdot v_0}{\sqrt{2gz + v_0^2}} \quad (32)$$

Nach Integration erhält man das Gewicht der Säule zu

$$G_s = \rho_0 \cdot v_0 \cdot A_0 (\sqrt{2gz + v_0^2} - v_0) \quad (33)$$

Die Integrationskonstanten wurden unter den Bedingungen: $z = 0$ und $G_s = 0$ bestimmt.

Da $\rho_0 \cdot v_0 \cdot A_0 = Q_0$ ist, folgt

$$G_s = Q_0 \cdot t_{\text{Fall}} \quad (34)$$

Hierbei bedeutet

Q_0 Förderstrommasse je Zeiteinheit.

Nach Gleichung (28) müßte dann

$$F_{\text{dyn}} = G_s \text{ sein.} \quad (35)$$

In Versuchen wurde diese Aussage untersucht.

3. Versuche zur Ermittlung des λ -wertes

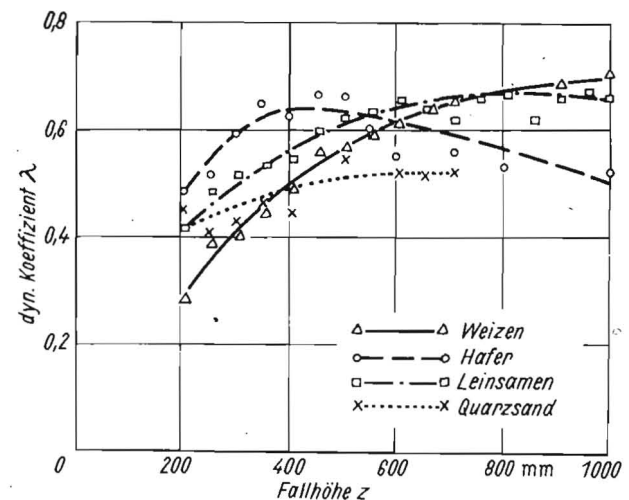
Die verschiedenen Verluste beim Fallen und Auftreffen des Gutstroms beinhaltet der Koeffizient λ .

Diese Materialkonstante wurde mit folgender Gleichung ermittelt

$$\lambda = \frac{F_{\text{dyn exp.}}}{F_{\text{dyn rechn.}}} \quad (36)$$

$F_{\text{dyn rechn.}}$ wurde mit Gl. (35) ermittelt. $F_{\text{dyn exp.}}$ ergab sich aus Versuchen, indem die Differenz zwischen Kraft- und

Bild 3. Koeffizient der dynamischen Auftreffkraft für Weizen, Hafer, Leinsamen und Quarzsand



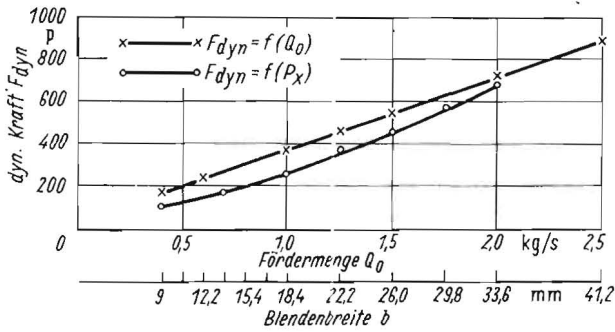


Bild 4
Dynamische Kraft als Funktion
der Fördermenge

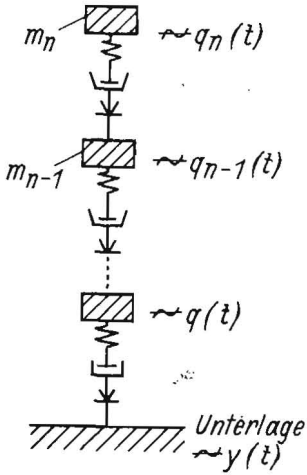


Bild 5
Ablösung und Aufprall eines
Haufwerkes auf einer
schwingenden Unterlage

Massezunahme gemessen wurde. Den Untersuchungen lag also die Gleichung

$$F_{dyn} = \lambda \cdot G_s \text{ zugrunde.} \quad (37)$$

$$F_{dyn} = \lambda \cdot \rho_0 \cdot v_0 \cdot A_0 \left(\sqrt{2gz + v_0^2} - v_0 \right) \quad (38)$$

$$F_{dyn} = \lambda \cdot Q_0 \cdot \Delta v_z \quad (39)$$

Dabei ist

Δv_z Geschwindigkeitsdifferenz zwischen der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Geschwindigkeit v_z in der Auftreffhöhe.

Für verschiedene landwirtschaftliche Güter wurden die Koeffizienten λ ermittelt. Sie sind in den Bildern 3 und 4 dargestellt. Es zeigt sich, daß der λ -Wert von der Gutart, der Auftreffgeschwindigkeit und dem Förderstromquerschnitt abhängig ist [4].

Welche Ursachen bewirken den λ -Wert?

Die Differenz zu den berechneten dynamischen Auftreffkräften wird durch folgende Faktoren beeinflusst:

- Beim Fallen und am Auftreffpunkt wird Gut herausgeschleudert und übt einen geringeren vertikalen Stoß als das übrige Gut auf das System aus ($F_{dyn} = Q_0 \cdot \Delta v_z \sin \alpha$). Es rieselt anschließend auf der Böschung herab.
- Bei einem dünnen Förderstrom ist die Bewegungsfreiheit in der Gutsäule und am Auftreffpunkt größer und damit sind auch die Verluste größer.
- Geschwindigkeitsverlust beim Austritt des Gutes aus dem Behälter (Blende) und während des freien Falls infolge der inneren Bewegung und der daraus folgenden gegenseitigen Beeinflussung.

Die Betrachtungen zeigen, daß es notwendig ist, den λ -Wert zu ermitteln, da die hydrodynamischen Analogien wie sie zum Aufstellen der Bewegungsgleichung zur Ermittlung der Auftreffkraft verwendet wurden, unvollständig sind.

Untersucht man zusätzlich die auftretenden Elementarstoßvorgänge, so ist festzustellen, daß die betrachteten Güter

sehr unterschiedliche Stoßzahlen aufweisen. Sie sind die Hauptursache der verschiedenen Verluste beim Auftreffen des Förderstroms auf das Hindernis. Die stoßenden Körper erfahren neben den elastischen auch plastische Verformungen unterschiedlicher Größenordnung. Deutlich wird dies charakterisiert durch das von BAADER [3] aufgestellte rheologische Modell eines Körnerhaufwerkes (Bild 5).

Beim Aufprall des Förderstroms treten außerdem alle möglichen Arten des Stoßvorgangs auf. Der Vorteil der Stoßbetrachtung liegt dabei darin, daß der Impulssatz frei von Einschränkungen auch für Vorgänge mit Energieverlust gültig ist.

Zusammenfassung

Ausgehend von Einzelstoßvorgängen und hydrodynamischen Analogien für kontinuierliche Stoffströme sowie von Versuchsergebnissen wurde eine Bestimmungsgleichung für die dynamische Kraft eines auftreffenden Materialstroms auf ein Hindernis aufgestellt.

Sie lautet

$$F_{dyn} = \lambda \cdot Q_0 \cdot \Delta v_z$$

Literatur

- [1] LUBRICH, W.: Die Wirkung dynamischer Kräfte beim Aufprall des Fördergutes auf das Förderband. Braunkohle, Wärme, Energie (1959) H. 9, S. 344
- [2] KARPIN, E. B.: Wägemaschinen, Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1960
- [3] BAADER, W.: Das Verhalten eines Schüttgutes auf schwingendem Siebrost. Grundlagen der Landtechnik. 18. Konstrukteurheft, 2. Teil, S. 13 bis 20. Düsseldorf 1960
- [4] RÜSSEL, D.: Systematische und zufällige Fehler von Massendosieranlagen beim Einsatz in der Landwirtschaft. Diss. Universität Rostock 1969 A 8324

Neuerscheinungen

- Autorenkollektiv: Kleines polytechnisches Wörterbuch — Deutsch — Russisch. 1. Aufl., 10,3 × 16,5 cm, 632 Seiten, Kunstleder, 10,— M
- BECKERT, M. / A. NEUMANN: Grundlagen der Schweißtechnik — Schweißverfahren. 5. Aufl. 14,7 × 21,5 cm, 224 Seiten, 161 Bilder, 41 Tafeln, Halbleinen, 16,80 M — Sonderpreis für die DDR 13,— M
- CLAUSSNITZER, H.: Einführung in die Elektrotechnik. Hochschullehrbuch für Elektrotechnik im Nebenfach. 4., überarbeitete und ergänzte Aufl., 16,7 × 24,0 cm, 416 Seiten, zahlr. Bilder und Tafeln, Kunstleder, 28,— M
- SCHOLZ, CH.: Magnetbandspeichertechnik — Magnetkopf · Magnetband · Schaltungen. 2., durchgesehene Aufl., 14,7 × 21,5 cm, 284 Seiten, 2 Beilagen, zahlr. Bilder und Tafeln, Kunstleder, 22,50 M
- SEIDLER, J.: Optimierung informationsübertragender Systeme. Band 1: Grundlagen der statistischen Optimierung. 2. Aufl., 14,7 × 21,5 cm, 228 Seiten, zahlr. Bilder, kartoniert, 14,— M
- SEIDLER, J.: Optimierung informationsübertragender Systeme. Band 2: Optimierung adaptiver Systeme. 2. Aufl., 14,7 × 21,5 cm, 316 Seiten, zahlr. Bilder, kartoniert, 22,— M — Sonderpreis für die DDR 19,50 M
- Techn. Überwachung Zentralinspektion: 1. Ergänzungslieferung (1/70) zur 6. Auflage der Werkstoff- und Bauvorschriften für Anlagen der Dampf- und Drucktechnik. 88 Seiten, 16,7 × 24,0 cm, kartoniert, 6,— M
- KAUTSCH, R.: Automatisierungstechnik Band 13: Elektrische Meßverfahren für nichtelektrische Größen. 3., bearbeitete Aufl., 14,7 × 21,5 cm, 86 Seiten, 70 Bilder, kartoniert, 6,40 M — Sonderpreis für die DDR 4,80 M
- BÄR, D.: Automatisierungstechnik Band 40: Kleines Lexikon der Steuerungs- und Regelungstechnik. 2., ergänzte und erweiterte Aufl., 14,7 × 21,5 cm, 108 Seiten, kartoniert, 6,40 M — Sonderpreis für die DDR 4,80 M
- SYDOW, A.: Automatisierungstechnik Band 6: Elektronisches Analogrechnen. 3., neuverfaßte Aufl., 14,7 × 21,5 cm, 76 Seiten, 64 Bilder, kartoniert, 6,40 M — Sonderpreis für die DDR 4,80 M
- PESCHEL, M.: Moderne Anwendungen algebraischer Methoden. 2., überarbeitete Aufl., 14,7 × 21,5 cm, 422 Seiten, 31 Bilder, kartoniert, 24,— M — Sonderpreis für die DDR 16,— M A 8421