

Die freie Wurfbewegung ist ein wichtiger Bestandteil vieler landtechnischer Prozesse. Weit verbreitet ist beispielsweise die Wurförderung für die Beladung von Hängern durch Erntemaschinen mit Stroh- oder Grünguthäcksel, Ballen, Rübenblatt u. ä. Mit Hilfe von Bandschleudern, Wurfbändern und anderen Einrichtungen werden landwirtschaftliche Produkte mit Schüttgutcharakter im Bereich der Innenwirtschaft, in Speichern oder Verarbeitungsbetrieben sehr häufig über kurze Entfernungen durch Wurf transportiert. Außerdem wären die vielfältigen Verteilungsprozesse für Düngemittel, Pflanzenschutz- und Schädlingsbekämpfungsmittel und eventuell auch für Saat- und Pflanzgut zu nennen, bei denen ebenfalls eine freie Wurfbewegung von Einzelteilen oder Teilchenkollektiven erfolgt.

Bei einigen dieser Vorgänge ist der Einfluß des Luftwiderstandes auf die Bewegungsbahn nicht zu vernachlässigen. Die exakte Berechnung der Wurfbahn mit Luftwiderstand bereitet einige mathematische Schwierigkeiten. Im vorliegenden Beitrag sollen dazu einige Näherungsverfahren zusammengestellt und ihr Gültigkeitsbereich untersucht werden.

**1. Bewegungsgleichungen für den Wurf mit Luftwiderstand**

Die Ableitung der Gleichungen erfolgt für die Bewegung des Einzelteilchens in ruhender Luft. Bei vielen der genannten Vorgänge handelt es sich jedoch nicht um die Bewegung von Einzelteilchen. Vielmehr besitzt der sogenannte Wurfstrahl meist eine sehr große Feststoffkonzentration, d. h., die Teilchen haben untereinander einen geringen Abstand. Die daraus resultierende gegenseitige Beeinflussung zwischen den Teilchen wirkt sich insgesamt stark auf die Bewegungsbahn eines solchen Wurfstrahles aus. Sie verursacht eine Verminderung des effektiven Luftwiderstandes, so daß der Wurfstrahl im Mittel eine größere Wurfweite als das Einzelteilchen erreicht. Näheres hierzu ist [1] zu entnehmen.

Für das fliegende Einzelteilchen liefert das Kräftegleichgewicht folgende Differentialgleichungen (Bild 1):

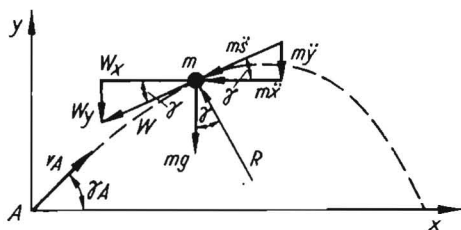
$$m \cdot \ddot{x} + W \cdot \cos \gamma = 0 \tag{1}$$

$$m \cdot \ddot{y} + m \cdot g + W \cdot \sin \gamma = 0 \tag{2}$$

Die Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, daß die Luftwiderstandskraft  $W$  die Richtung der Relativgeschwindigkeit bzw. der Bahntangente hat. Außerdem können für diese Rechnung Auftriebskräfte durch Teilchenrotation und auch der archimedische Auftrieb wegen  $\rho_T \gg \rho_L$  ( $\rho_T$  Dichte des Teilchens,  $\rho_L$  Dichte der Luft) [2] vernachlässigt werden.

\* Arbeit aus dem Institut für Landmaschinentechnik der TU Dresden (Direktor: Prof. Dr.-Ing. W. GRUNER)

Bild 1. Kräfte am fliegenden Teilchen



Für die Widerstandskraft  $W$  gilt

$$W = c_w \cdot \frac{\rho_L}{2} \cdot F \cdot \dot{s}^2 \tag{3}$$

Der Widerstandsbeiwert  $c_w$  ist für ein ruhendes Einzelteilchen im Parallelstrom abhängig von der Form und der Reynoldszahl, im überkritischen Bereich (turbulente Grenzschicht) zusätzlich noch von der Oberflächenrauigkeit der Teilchen sowie vom Turbulenzgrad der Strömung. Die Reynoldszahl wird gebildet aus dem Teilchendurchmesser  $d$ , der Anblasgeschwindigkeit  $\dot{s}$  und der kinematischen Zähigkeit des umgebenden Mediums  $\nu$  ( $Re = d \cdot \dot{s} / \nu$ ). Im unterkritischen Bereich kann allgemein gesetzt werden [2]

$$c_w \sim Re^{-\alpha} \quad (\alpha = 0 \dots 1). \tag{4}$$

Außer durch den für die interessierenden Teilchenarten schwer erfaßbaren  $c_w$ -Wert wird die Widerstandskraft vor allem noch von der Anströmfläche  $F$  beeinflusst, die keinesfalls leichter zu bestimmen ist.

Zur Vereinfachung werden deshalb meist alle den Widerstand beeinflussenden Teilcheneigenschaften in der Sink- oder Schwebegeschwindigkeit  $v_s$  zusammengefaßt, die sich experimentell relativ einfach ermitteln läßt.

$$v_s = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho_L \cdot c_w \cdot F}} \tag{5}$$

Für die Widerstandskraft gilt somit

$$\frac{W}{m \cdot g} = \left(\frac{\dot{s}}{v_s}\right)^2 \tag{6}$$

**1.1. Näherung 1 für  $c_w = const$**

In der ersten Näherungslösung wird  $c_w = const$  gesetzt. Diese Vereinfachung ist vor allem für Teilchen mit scharfen Kanten im Bereich mittlerer Reynoldszahlen zulässig. Sie gilt darüber hinaus aber auch für andere Teilchenformen, beispielsweise für Kugeln im Bereich  $Re \approx 10^3$  bis  $10^5$ .

Aus Bild 1 lassen sich folgende Beziehungen ableiten:

$$\dot{x} = \dot{s} \cdot \cos \gamma \tag{7} \quad m \cdot \frac{\dot{s}^2}{R} + m \cdot g \cdot \cos \gamma = 0 \tag{9}$$

$$\dot{y} = \dot{s} \cdot \sin \gamma \tag{8} \quad R = \frac{ds}{dy} \tag{10}$$

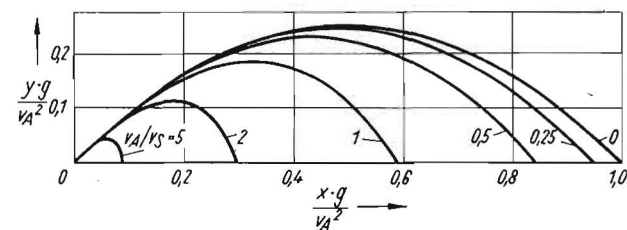
Werden die Gleichungen (6) bis (10) zur Umformung von Gl. (1) benutzt, dann ergibt sich dafür folgende Form [3]:

$$d(\dot{s} \cdot \cos \gamma) - \frac{\dot{s}^3}{v_s^2} d\gamma = 0 \tag{11}$$

Diese wird für die Integration noch mit  $1/(\dot{s} \cdot \cos \gamma)^3$  multipliziert

$$\frac{d(\dot{s} \cdot \cos \gamma)}{(\dot{s} \cdot \cos \gamma)^3} = \frac{1}{v_s^2} \cdot \frac{d\gamma}{\cos^3 \gamma} \tag{12}$$

Bild 2. Wurfbahnen für verschiedene Luftwiderstände ( $v_A/v_s$ ) bei einem Abwurfwinkel von  $45^\circ$  nach Näherung 1



Die Integration liefert dann mit den Anfangsbedingungen im Abwurfpunkt A ( $s = v_A, \gamma = \gamma_A$ ) folgende Lösung:

$$\left(\frac{s}{v_s}\right)^2 = \frac{1}{\sin \gamma + \frac{1}{2} \cos^2 \gamma \cdot \ln \frac{1 + \sin \gamma}{1 - \sin \gamma} + 2 \cdot \cos^2 \gamma \cdot C} \quad (13)$$

$$C = \frac{1}{2 \left(\frac{v_A}{v_s}\right)^2 \cos^2 \gamma_A} - \frac{\sin \gamma_A}{2 \cdot \cos^2 \gamma_A} - \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \sin \gamma_A}{1 - \sin \gamma_A} \quad (14)$$

$v_A/v_s$  ist die den Luftwiderstand kennzeichnende Rechengröße. Der Grenzübergang  $v_A/v_s \rightarrow 0$  liefert die entsprechenden Beziehungen für die Bewegung ohne Luftwiderstand. Die Wurfbahn erhält man durch numerische Integration der Gleichungen

$$dx = -\frac{s^2}{g} \cdot dy \quad (15)$$

$$dy = -\frac{s^2}{g} \cdot \tan \gamma \, dy \quad (16)$$

unter Verwendung von  $s = f(\gamma)$  in der Form  $x = f(\gamma), y = f(\gamma)$ . Die Integration wurde mit einer Schrittweite  $\Delta \gamma = 3^\circ$  durchgeführt. Das Ergebnis ist für einige Parameterkombinationen im Bild 2 dargestellt. Die dimensionslose Darstellung erhöht dabei die Aussagefähigkeit der Ergebnisse. So verändert sich beispielsweise für  $v_A/v_s > 50$  die Form der dimensionslosen Wurfbahn  $x \cdot g/v_A^2 = f(y \cdot g/v_A^2)$  praktisch nicht mehr, da der Summand mit  $v_A/v_s$  dann nur noch geringen Einfluß auf die Integrationskonstante C hat (14).

### 1.2. Näherung II für $c_w = \text{const}$ und $\dot{x} \gg \dot{y}$

Näherung I gestattet keine geschlossene Lösung der Bewegungsgleichungen. Numerische Verfahren erschwerten die Anwendung dieser Beziehungen. Für Näherung II wird deshalb neben  $c_w = \text{const}$  zusätzlich noch  $\dot{x} \gg \dot{y}$  gesetzt. Letzteres gilt in erster Linie für flache Wurfbahnen. Die Komponenten der Widerstandskraft sind wegen  $W \sim s^2$

$$W_x = W \cdot \cos \gamma \sim s^2 \cdot \cos \gamma \text{ bzw. } W_x \sim s \cdot \dot{x}$$

$$W_y = W \cdot \sin \gamma \sim s^2 \cdot \sin \gamma \text{ bzw. } W_y \sim s \cdot \dot{y}$$

Für  $\dot{x} \gg \dot{y}$  kann  $s \approx \dot{x}$  gesetzt werden, so daß dann gilt

$$W_x \sim \dot{x}^2 \quad (17)$$

$$W_y \sim \dot{x} \cdot \dot{y} \quad (18)$$

Die Gleichungen (1) und (2) erhalten dann die Form

$$\ddot{x} + \frac{g}{v_s^2} \cdot \dot{x}^2 = 0 \quad (19)$$

$$\ddot{y} + g + \frac{g}{v_s^2} \cdot \dot{x} \cdot \dot{y} = 0 \quad (20)$$

Dieses System gestattet eine geschlossene Lösung. Die Wurfbahn ergibt sich mit den Anfangsbedingungen im Abwurfpunkt

$$t = 0: \dot{x} = v_A \cdot \cos \gamma_A, \quad x = 0$$

$$\dot{y} = v_A \cdot \sin \gamma_A, \quad y = 0$$

in Parameterdarstellung der Form  $x = f(t), y = f(t)$ , bzw. in dimensionsloser Schreibweise

$$\frac{xg}{v_A^2} = \frac{1}{\left(\frac{v_A}{v_s}\right)^2} \ln \left[ \frac{gt}{v_A} \left(\frac{v_A}{v_s}\right)^2 \cos \gamma_A + 1 \right] \quad (21)$$

$$\frac{yg}{v_A^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{\left(\frac{v_A}{v_s}\right)^4 \cos^2 \gamma_A} + 2 \frac{\tan \gamma_A}{\left(\frac{v_A}{v_s}\right)^2} \right] \ln \left[ \frac{gt}{v_A} \left(\frac{v_A}{v_s}\right)^2 \cos \gamma_A + 1 \right] - \frac{gt}{v_A} - \frac{1}{2} \left(\frac{gt}{v_A}\right)^2 \right\} \quad (22)$$

Die Gleichung der Wurfbahn mit den Parametern  $v_A/v_s$  und  $\gamma_A$  lautet dann

$$\frac{yg}{v_A^2} = \left( \frac{1}{2 \left(\frac{v_A}{v_s}\right)^2 \cos^2 \gamma_A} + \tan \gamma_A \right) \frac{xg}{v_A^2} + \frac{1}{4 \left(\frac{v_A}{v_s}\right)^4 \cos^2 \gamma_A} \left( 1 - e^{-2 \frac{xg}{v_A^2} \left(\frac{v_A}{v_s}\right)^2} \right) \quad (23)$$

Der Grenzübergang  $v_A/v_s \rightarrow 0$  liefert die Beziehungen der Bewegung ohne Luftwiderstand.

### 1.3. Näherung III für $c_w \sim 1/s$

In der Literatur findet man häufig die Anwendung der Vereinfachung  $c_w \sim 1/s$  zur Lösung der Differentialgleichungen für die Wurfbewegung [4] [5]. Exakt gilt diese Beziehung jedoch nur für Kugeln im Bereich sehr kleiner Reynoldszahlen ( $Re = 1$ ). Die genannten Bewegungsvorgänge aus dem Bereich der Landtechnik verlaufen im allgemeinen jedoch bei wesentlich größeren Reynoldszahlen, so daß sich mit dieser Vereinfachung nur eine sehr ungenügende Näherungslösung für die interessierende Wurfbahn ergibt.

Mit  $c_w \sim 1/s$  ist  $W \sim s$  und  $W_x \sim \dot{x}, W_y \sim \dot{y}$

Die Gleichungen (1) und (2) erhalten dann die Form

$$\ddot{x} + \frac{g}{v_s} \cdot \dot{x} = 0 \quad (24)$$

$$\ddot{y} + g + \frac{g}{v_s} \cdot \dot{y} = 0 \quad (25)$$

Eine geschlossene Lösung ist auch hierbei möglich. Mit den gleichen Anfangsbedingungen wie für Näherung II ergibt sich die Wurfbahn zunächst in Parameterdarstellung.

$$\frac{xg}{v_A^2} = \frac{\cos \gamma_A}{\left(\frac{v_A}{v_s}\right)} \left( 1 - e^{-\frac{gt}{v_A} \left(\frac{v_A}{v_s}\right)} \right) \quad (26)$$

$$\frac{yg}{v_A^2} = \frac{1}{\left(\frac{v_A}{v_s}\right)} \left[ \left( \frac{1}{\left(\frac{v_A}{v_s}\right)} + \sin \gamma_A \right) \left( 1 - e^{-\frac{gt}{v_A} \left(\frac{v_A}{v_s}\right)} \right) - \frac{gt}{v_A} \right] \quad (27)$$

Die Gleichung der Wurfbahn in der Form

$y \cdot g/v_A^2 = f(x \cdot g/v_A^2)$  lautet dann

$$\frac{yg}{v_A^2} = \left( \frac{1}{\left(\frac{v_A}{v_s}\right) \cos \gamma_A} + \tan \gamma_A \right) \frac{xg}{v_A^2} + \frac{1}{\left(\frac{v_A}{v_s}\right)^2} \ln \left[ 1 - \frac{xg}{v_A^2} \left(\frac{v_A}{v_s}\right) \frac{1}{\cos \gamma_A} \right] \quad (28)$$

## 2. Vergleich der Näherungslösungen

Nach dem Grad der Vereinfachungen ist mit Näherung I für die eingangs genannten Vorgänge die beste Annäherung an die tatsächlichen Verhältnisse zu erwarten. Die Ergebnisse dieser Rechnung werden für den Vergleich deshalb als

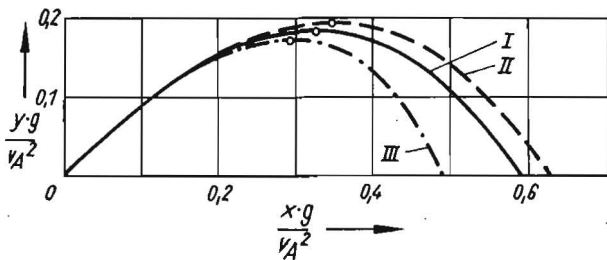
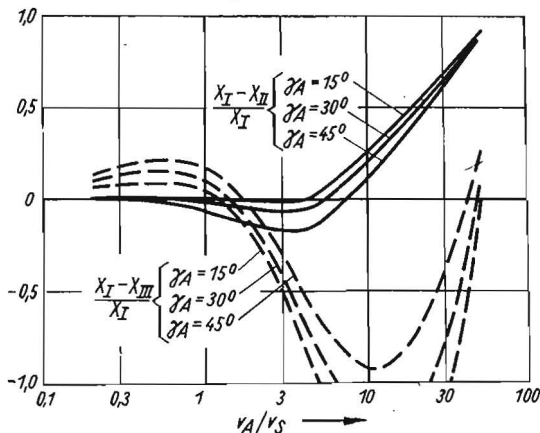


Bild 3. Wurfbahnen mit einem Abwurfwinkel von 45° und  $v_A/v_S = 1$  für die 3 Näherungslösungen

Bild 4. Unterschiede zwischen den 3 Näherungslösungen für die Wurfweite im Mündungshorizont



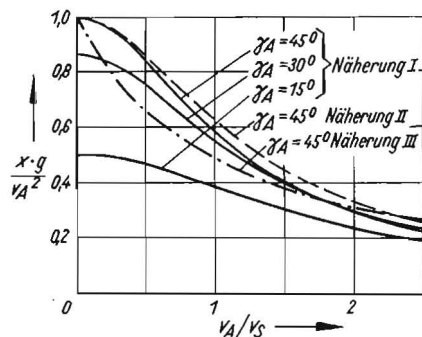
Bezugsgrößen benutzt. Für die Darstellungen wird die am meisten interessierende Größe, die Wurfweite in einer horizontalen Ebene, die den Abwurfpunkt enthält, herangezogen (Bild 3). Diese Ebene wird in der Ballistik als Mündungshorizont bezeichnet. Die Abweichungen von den Ergebnissen nach Näherung I sind durch

$$\frac{X_I - X_{II}}{X_I} \text{ und } \frac{X_I - X_{III}}{X_I}$$

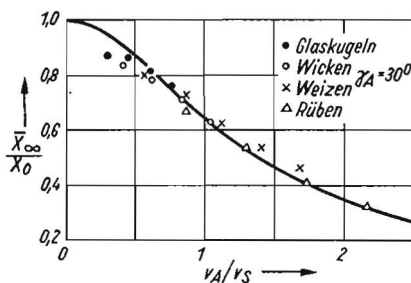
nach Größe und Vorzeichen bestimmt (Bild 4).

Der Vergleich wurde durchgeführt bis  $v_A/v_S = 50$ . Aus Bild 4 ist ersichtlich, daß besonders im Bereich kleiner Abwurfwinkel und kleiner Luftwiderstände eine gute Übereinstimmung zwischen den Näherungen I und II besteht. Die Voraussetzung  $x \gg y$  ist für kleine Abwurfwinkel am besten erfüllt.

Mit zunehmendem Luftwiderstand verringert sich der Abwurfwinkel, mit dem eine maximale Wurfweite im Mündungshorizont erreicht wird. Bild 5 ist zu entnehmen, daß für  $v_A/v_S > 1,8$  mit  $\gamma_A = 30^\circ$  eine größere Weite erreicht wird als mit  $\gamma_A = 45^\circ$  (Näherung I). Im Gegensatz zu I und III weist Näherung II diese für die Bewegung mit Luftwiderstand typische Tendenz nicht auf. Für diese Näherung ist der optimale Abwurfwinkel unabhängig vom Luftwiderstand 45°.



5



6

Bild 5 Wurfweite im Mündungshorizont in Abhängigkeit vom Luftwiderstand für verschiedene Abwurfwinkel (Näherung I) und verschiedene Näherungslösungen ( $\gamma_A = 45^\circ$ )

Bild 6 Versuchsergebnisse mit Einzelteilchen für die Wurfweite in Abhängigkeit von  $v_A/v_S$ ; die verwendeten Teilchenarten hatten im Mittel folgende Sinkgeschwindigkeiten: Glaskugeln 16,4 m/s, Wicken 12,0 m/s, Weizen 8,9 m/s, Rübensamen 5,8 m/s

Dieser Effekt tritt jedoch bei kleinen Verhältnissen  $v_A/v_S$ , wie sie bei den meisten Vorgängen in der Landtechnik auftreten, nicht sehr stark in Erscheinung, so daß die Näherung II hierfür eine brauchbare Lösung darstellt, die zur Berechnung der interessierenden Werte keine mathematischen Schwierigkeiten bereitet.

Neben den geringen Abweichungen zwischen den Näherungen I und II (Bild 4) zeigt auch der Kurvenverlauf  $x \cdot g/v_A^2 = f(v_A/v_S)$  für beide Näherungen die gleiche Tendenz (Bild 5). Eine völlig andere Tendenz ergibt sich für diese Funktion nach Näherung III. Durch den Gültigkeitsbereich der zugrundegelegten Vereinfachungen liefert diese Näherungslösung für die meisten Vorgänge aus dem Bereich der Landtechnik keine brauchbaren Ergebnisse.

### 3. Einige Ergebnisse experimenteller Untersuchungen

Zur prinzipiellen Bestätigung der angegebenen Beziehungen sollen in diesem Rahmen noch einige Ergebnisse experimenteller Untersuchungen dargestellt werden. Im Bild 6 sind der Kurvenverlauf  $X_\infty/X_0 = f(v_A/v_S)$  nach Näherung I und einige Meßpunkte eingezeichnet.  $X_\infty$  bedeutet die Wurfweite der Einzelteilchenbewegung, also ohne gegenseitige Beeinflussung.  $X_0$  ist die Wurfweite ohne Luftwiderstand.

$X_\infty$  ist dabei der Mittelwert aus einer größeren Zahl von Versuchen, bei denen die Teilchen mit einer Bandschleuder abgeworfen und auf einer mit Raupenleim bestrichenen Rasterfläche aufgefangen wurden. Es ist ersichtlich, daß sich die Meßpunkte relativ gut auf der theoretischen Kurve anordnen. Die Abweichungen resultieren hauptsächlich aus den der Rechnung zugrundegelegten Vereinfachungen, der fehlerbehafteten Bestimmung der Sinkgeschwindigkeit, den Meßfehlern für die Anfangsbedingungen der Wurfbewegung und denen für die Wurfweite selbst. Die Voraussetzungen der Rechnung werden am besten von den Rüben und am schlechtesten vom Weizen erfüllt. Beim Weizen ist das vor allem durch die Eigenbewegungen während des Fluges, also das Pendeln um einen Mittelwert des Luftwiderstandes bedingt.

Der theoretische Kurvenverlauf wird jedoch nur erfüllt, wenn für  $v_A/v_S \rightarrow 0$   $v_A$  einen endlichen Wert hat und  $v_S \rightarrow \infty$  gilt, d. h., daß der Widerstand der Teilchen gegen Null geht. Die eingetragenen Meßpunkte ergaben sich für die verschiedenen Teilchenarten jedoch aus  $v_S = \text{const}$  und  $v_A \rightarrow 0$ . In diesem Fall geht mit  $v_A/v_S \rightarrow 0$  auch  $X_\infty/X_0 \rightarrow 0$ . Dadurch ergibt sich die starke Abweichung der Meßpunkte von der theoretischen Kurve im Bereich kleiner Werte  $v_A/v_S$ . Hinzu kommt die Zunahme des  $c_w$ -Wertes der kugelförmigen Teilchen Wicken und Glas mit sinkender Reynoldszahl

#### Literatur

- [1] KROMBHOLZ, K.: Beitrag zur Untersuchung der gegenseitigen Beeinflussung der Teilchen beim kontinuierlichen Wurf von Schüttgut. Diss. Dresden 1967
- [2] ALBRING, W.: Angewandte Strömungslehre. Verlag Theodor Steinkopf Dresden, Leipzig 1962
- [3] KUTTERER, R. E.: Ballistik. Braunschweig 1959 (3. Aufl.)
- [4] ADAM, O.: Untersuchungen über die Vorgänge in feststoffbeladenen Gasströmen. Diss. Aachen 1960
- [5] VOLLHEIM, R.: Elementarvorgänge und Energieaufwand bei der Förderung von Festkörper-Luft-Gemischen in senkrechten Röhren. Diss. Dresden 1963

A 7248