

Dipl.-Ing. H. HOLJEWILKEN

Schleppkurven als Übergangskurven der Gefälleregulung bei der maschinellen Dränung¹

Bei der Dränung mit modernen Dränmaschinen geschieht während der Gefälleregulung der Übergang der Grabensohle von der Ist- in die Soll-Lage auf einer Schleppkurve.² Die Form der Schleppkurve gibt also Auskunft über die Geschwindigkeit und Gleichmäßigkeit dieses Übergangs und kann daher als Qualitätskriterium herangezogen werden. Deshalb wäre es interessant, eine Beziehung zwischen den konstruktiven Größen — insbesondere den Abmessungen — der Maschine und der Form der Schleppkurve herzustellen.

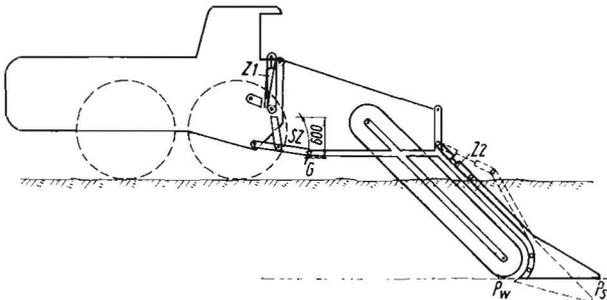


Bild 1. Prinzipische Skizze des Modells eines Anbaudränggrabensbaggers mit beweglichem Anlenkpunkt

¹ Auszug aus der bei der TU Dresden eingereichten Dissertation des Verfassers: „Analyse der Anbausysteme für den Anbau der Arbeitswerkzeuge an Dränggrabensbagger“

² s. Beitrag in H. 6/1969, S. 287

Dies soll quantitativ für die Bauform versucht werden, bei der das Arbeitswerkzeug über einen beweglichen Gelenkpunkt mit dem Maschinenrahmen verbunden ist. Zu diesem Zweck wurde ein Modell gebaut, das als Anbaugerät zum Traktor D4K-B geeignet ist (Bild 1). Dieser Typ hat als Besonderheit eine Verstellmöglichkeit des Schleifschuhs und die untere Umlenkachse des Werkzeuges. Hierdurch kann der senkrechte Abstand der Unterkante des Schleifschuhs vom Anlenkpunkt G verändert werden, wodurch man u. a. den Vorteil gewinnt, die Verstellmöglichkeit des Anlenkpunktes einzuschränken.

Mit den Abmessungen des Modells und des Traktors wurde eine Schablone hergestellt, mit deren Hilfe recht einfach die verschiedenen Einfahr-, Ausfahr- und Überlagerungsschleppkurven graphisch punktweise gezeichnet werden konnten (Bild 2, 5 und 6).

Für die mathematische Erfassung der Schleppkurven kann man davon ausgehen, daß die geometrischen Verhältnisse einer gewählten Konstruktion dieser Bauform durch ein Dreieck GP_WP_S exakt dargestellt sind. Dabei ist G der Anlenkpunkt, P_W der tiefste Punkt des Arbeitswerkzeuges und P_S der hinterste Punkt der Schleifschuhunterkante. Mit einem solchen Dreieck läßt sich die Ausfahrerschleppkurve nach einem graphischen Näherungsverfahren beliebig genau konstruieren.

Aber auch die analytische Erfassung der gesuchten Schleppkurve ist möglich. Hierzu bezeichnet man z. B. die Strecke GP_W mit l , den Winkel zwischen GP_W und der Verlängerung des Schleifschuhs $P_S P_W$ über P_W hinaus mit α und setzt

$$l \cdot \sin \alpha = a, \quad l \cdot \cos \alpha = b.$$

Das Bildungsgesetz der Schleppkurve ergibt sich daraus, daß bei geradliniger Bewegung des Punktes G die Strecke $P_W P_S$ — der Schleifschuh — die gesuchte Kurve immer tangiert (Bild 3). Bezeichnet man noch den Tangentenwinkel mit δ , so kann man setzen:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \delta = -y'$$

$$l = \frac{y}{\sin(\alpha + \delta)} \quad (1)$$

$$y = l \cdot \sin \alpha \cos \delta + l \cdot \cos \alpha \sin \delta$$

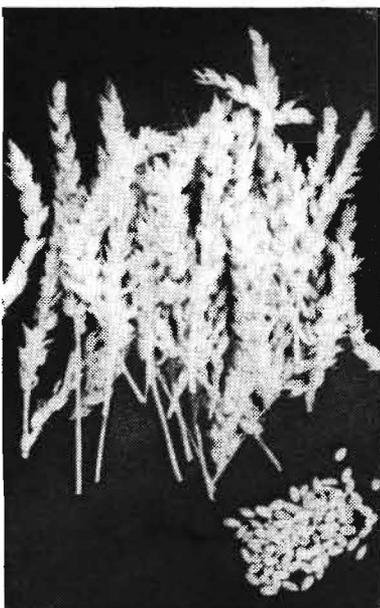
$$y = a \cos \delta + b \sin \delta$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{by'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (2)$$

Umformung und Quadrierung liefert die Differentialgleichung der Ausfahrerschleppkurve:

$$y^2 + y^2 y'^2 - b^2 y'^2 + 2aby' - a^2 = 0 \quad (3)$$

Die Integration der Differentialgleichung³



	5	12	10	3	10	1
	10	24	19	6	20	6
	20	48	38	13	30	3
	30	72	58	19	40	4
	40	96	77	26	50	5
	50	120	96	32	60	6
	60	180	144	48	80	8
	100	240	192	64	100	10
	125	300	240	80	120	12
	150	360	288	96	140	14
	175	420	336	112	160	16
	200	480	384	128	180	18
Verluste kg/ha						
Ausdrusch						
Ausfall						
Schütter- Sonder- Verlust						
umrandeter Bereich - Zul.- Verluste						
Anzahl der Körner						
Anzahl der Ähren bzw. Hülsen						

³ Die Integration der Differentialgleichung führte Dipl.-Mathematiker S. SCHOLZ, Institut für angewandte Mathematik der TU Dresden, aus.

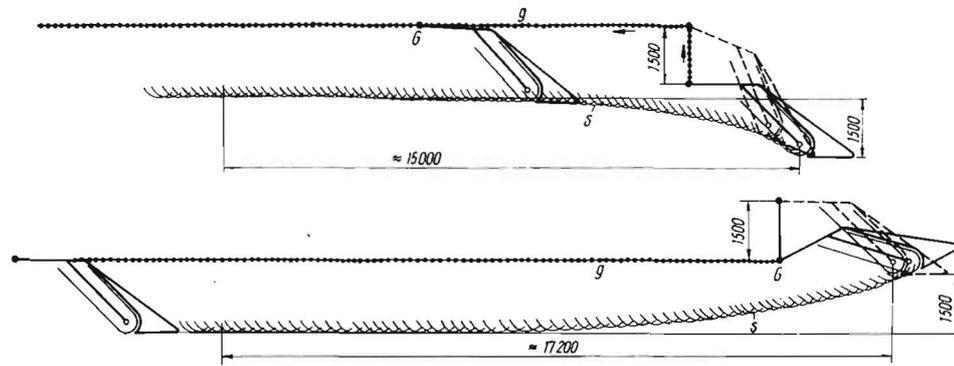


Bild 2
Ausfahr- und Einfahr-
schleppkurve (oben)
und Einfahr-
schleppkurve (unten)
eines Drängerbagger-
s nach Bild 1; g Bahn
des Anlenkpunktes G,
s Schleppkurve

liefert für die Anfangsbedingungen
 $x(y=1) = 0$ die spezielle Lösung:

$$x = b \ln \frac{(b + \sqrt{l^2 - y^2})(l - a)}{b(y - a)} - \sqrt{l^2 - y^2} \quad (4)$$

Dies ist eine modifizierte Traktrix, denn
falls $\alpha = 0 \rightarrow a = 0$; $b = l$ geht sie in
die gewöhnliche Huygens'sche Traktrix

$$x = l \ln \frac{l + \sqrt{l^2 - y^2}}{y} - \sqrt{l^2 - y^2}$$

über.

Aus der Schleppkurve (4) kann man ihren Verlauf exakt
berechnen, doch führt das graphische Verfahren mit Scha-
blone schneller zu hinreichend genauen Ergebnissen.

Für die Einfahr-
schleppkurve ist eine solche geschlossene
Lösung noch nicht gefunden worden, denn hier kommt man
wegen der endlichen Schleifschuhlänge $P_W P_S$, die bei der
Einfahr-
schleppkurve als Sekante auftritt (Bild 4), nicht zu
einem Grenzübergang und demzufolge auch nicht zu einer
Differentialgleichung. Die geschlossene Form der Einfahr-
schleppkurve konnte nur für den praktisch nutzlosen Fall
 $P_W P_S = 0$ gewonnen werden in der Form:

$$x = l - \sqrt{l^2 - y^2} + b \ln \frac{a(b + \sqrt{l^2 - y^2})}{(y - a)(b + l)} \quad (5)$$

Die Berücksichtigung realer Schleifschuhlängen ist mit einer
graphischen Methode möglich, wenn man wieder das Dreieck
 $G P_W P_S$ benutzt, und als Bildungsgesetz voraussetzt, daß
bei gradliniger Bewegung von G die Punkte P_W und P_S
nacheinander dieselbe Kurve durchlaufen müssen (Bild 4).
Man konstruiert nacheinander kongruente Dreiecke
 $G_n P_{Wn} P_{Sn}$, bei denen die Punkte G_n auf einer Geraden
liegen und immer $P_{S k+1}$ in P_{Wk} gelegt wird. Nach diesem
Verfahren lassen sich auch exakte Punkte der Einfahr-
schleppkurve schrittweise berechnen, denn man kann fol-
gende Rekursionen aufstellen:

$$y_n = h \sqrt{1 - \frac{y_{n-1}^2 - 1}{q^2}} + m \frac{y_{n-1}}{q}$$

$$x_n = x_{n-1} + (q - m) \sqrt{1 - \frac{y_{n-1}^2 - 1}{q^2}} + h \frac{y_{n-1}}{q}$$

Wie später gezeigt wird, lassen sich die analytischen Formeln
der Schleppkurven und die Rekursionen gut für die Bestimmung
der Abmessungen der Maschine und zur Beurteilung der
quantitativen Arbeitsweise der Tiefenregelung heranziehen;
für die Gewinnung realer Schleppkurven gegebener Maschinen,
vor allem wenn sich Einfahr- und Ausfahr-
schleppkurven überlagern, ist aber das graphische Verfahren
mit Schablone vorzuziehen, bzw. das z. Z. einzig mögliche.

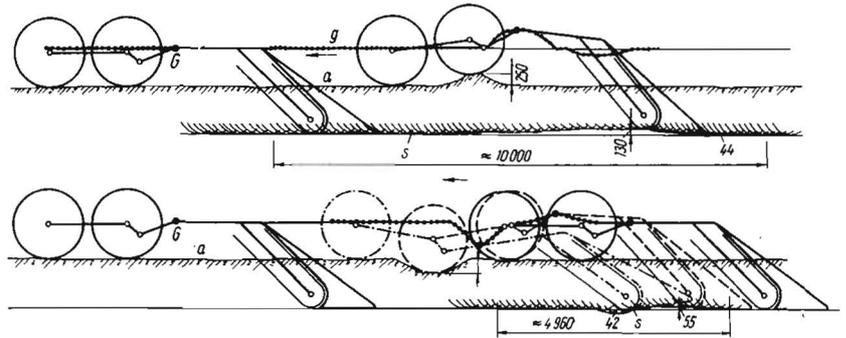


Bild 3
Ermittlung der Ausfahr-
schleppkurve; a Bodenober-
fläche, g Bahn des Anlenk-
punktes G, s Schleppkurve

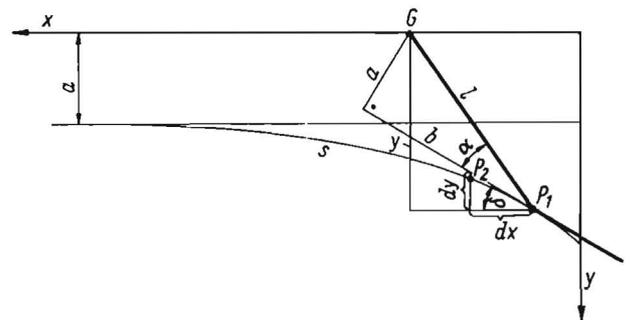


Bild 4. Ermittlung der Einfahr-
schleppkurve

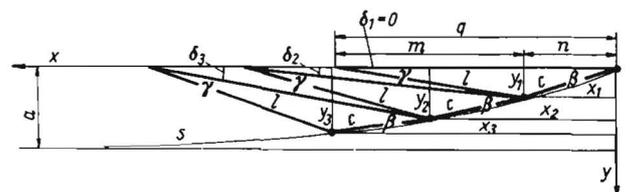


Bild 5. Schleppkurven beim Überrollen von Bodenerhebungen,
wenn keine Steuerbewegungen durchgeführt werden

An zwei Beispielen — dem Überrollen einer Bodenerhebung
und dem Durchfahren einer Bodensenke von definierten
Abmessungen — soll das quantitative Verhalten des ge-
wählten Modells analysiert werden. Zunächst werden die
Hindernisse überrollt, ohne daß mit dem Steuerzylinder
korrigierende Bewegungen veranlaßt werden, um zu unter-
suchen, wie weit das gewählte kinematische System selbst-
tätig Bodenerhebungen kompensiert (s. Bild 5).

Beim Überfahren einer kurzen Bodenerhebung mit einer
Höhe von 250 mm mit der gewählten Kombination Rad-
traktor D4K-B und Anbaudrängerbagger weicht der
Gelenk-
punkt G zunächst beim Überrollen des Hindernisses
mit den Vorderrädern bis maximal 154 mm nach unten
und dann beim Überrollen des Hindernisses mit den Hinterrädern
um 410 mm nach oben von der idealen geraden Bahn ab.

Die ungünstige Überhöhung von 250 mm auf 410 mm ist auf die Verwendung des Radtraktors D4K-B und seines Dreipunktgestänges als Gelenkpunkt zurückzuführen, und hat nichts mit dem eigentlichen Wirkungsprinzip der Dränmaschine zu tun. Bei der Konstruktion einer speziellen Dränmaschine würde man den Anlenkpunkt an eine günstige Stelle des Maschinenrahmens — etwa in die Mitte zwischen den Achsen — legen. Für die hier vorzunehmende Untersuchung treten bei diesen extremen Bedingungen aber die Ausgleichswirkungen des Systems besonders deutlich hervor.

Infolge dieser Abweichungen des Gelenkpunktes *G* weicht auch die Schleppkurve *s* der Grabensohle von der gewünschten geraden Sohle ab, und zwar um 44 mm nach unten und 130 mm nach oben. Dabei wird die auf einer Länge von 3100 mm eingetragene Störung der Bahn *g* praktisch bemerkbar auf eine Länge von etwa 10 660 mm der Kurve *s* verschleppt.

Beim Durchfahren einer kurzen Bodensenke mit einer Tiefe von 300 mm weicht der Gelenkpunkt *G* zunächst beim Durchfahren der Senke mit den Vorderrädern bis maximal 175 mm nach oben und dann beim Durchfahren der Senke mit den Hinterrädern bis maximal 490 mm nach unten von der idealen geraden Bahn ab. Die zugehörige Schleppkurve *s* der Grabensohle weicht um 55 mm nach oben und um 42 mm nach unten von der gewünschten geraden Sohle ab. Die auf 3100 mm Länge eingetragene Störung wirkt sich praktisch auf eine Länge von etwa 4960 mm aus.

Vergleicht man die Ergebnisse beider Versuche, so fällt zunächst auf, daß die Abweichung der Gelenkpunktbahn *g* tatsächlich nur reduziert auf die Grabensohle *s* übertragen wird. Das Übertragungsverhältnis unterscheidet sich aber in beiden Fällen erheblich. Diese Differenz ist in dem Unterschied zwischen der Einfahr- und der Ausfahrerschleppkurve und dem umgekehrten Übergang von der einen in die andere begründet. Die Einfahrerschleppkurve verläuft flacher als die Ausfahrerschleppkurve (s. Bild 2); vor allem in der jeweils ersten Bewegungsphase, in der ja bei kurz hintereinander folgenden entgegengerichteten Steuerbewegungen ausschließlich gefahren wird, ist die Ausfahrerschleppkurve erheblich steiler als die Einfahrerschleppkurve — Steigungswinkel am Anfang 39° bzw. 24° in Bild 2 —. Eine Abweichung des Anlenkpunktes nach oben wird also schneller in eine Abweichung der Grabensohle umgesetzt als eine Abweichung nach unten.

Würde man den Anlenkpunkt in regelmäßigen kleinen Abständen um gleiche Beträge fortlaufend nach oben und unten abweichen lassen, so müßte auf Grund der vorher geschilderten Verschiedenheiten eine im Durchschnitt immer größer werdende Abweichung der Schleppkurve von der idealisierten geraden Grabensohle nach oben auftreten. Dies ist auch der Fall. Aus dieser Tatsache kann man wichtige Schlußfolgerungen für den praktischen Einsatz einer nach diesem System arbeitenden Dränmaschine und für die Automatisierung der Gefällesteuerung ziehen. Die erste Folgerung ist, daß man den Drängaben immer im Gefälle aufwärts ziehen soll, da hierbei die Gefahr der Entstehung schädlicher Wassersäcke

bei schlechter Regelung der Lage des Anlenkpunktes viel geringer ist als bei entgegengesetzter Arbeitsrichtung. Benutzt man eine automatische Gefälleregelung mit einem Winkelmeßgeber im Regelkreis — dieses System hat eine Reihe von Vorteilen bei der praktischen Anwendung — so ist bei der Arbeit gefälleaufwärts auch hier die Gefahr der Entstehung von Wassersäcken sehr gering, andererseits muß man aber damit rechnen, daß insgesamt eine zunehmende Abweichung der Grabensohle nach oben auftritt, die jedoch nicht schädlich sein muß.

Die graphischen Untersuchungen der Sohlenlage beim Überfahren von Hindernissen zeigen, daß sehr wohl mit dem gewählten Anbausystem ein teilweise selbsttätiger Ausgleich von Bodenunebenheiten erreicht wird. Sie beweisen aber auch, daß kein einfacher linearer Zusammenhang zwischen der Höhe der Bodenunebenheit und der maximalen Größe der Abweichung der Sohlage von der gewünschten idealen Lage herzustellen ist, sondern daß die Randbedingungen — Länge der Bodenunebenheit, Abstand zwischen den Bodenunebenheiten und Reihenfolge der Bodenunebenheiten vielfältige Überlagerungen hervorbringen.

Es kann aber allgemein festgestellt werden, daß nicht ausgereifte oder nicht aussteuerbare kurze Abweichungen des Anlenkpunktes *G* von seiner theoretischen Bahn in der Größenordnung bis zu 100 mm infolge des selbsttätigen Ausgleichs mit großer Wahrscheinlichkeit keine schädliche Abweichung der Drängabensohle hervorrufen.

Dies zeigt sich auch, wenn man beim Überfahren der bekannten Bodenunebenheiten mit unserem Modell mit einer Geschwindigkeit von 1000 m/h versucht, die auftretenden Abweichungen der Gelenkpunktbahn *g* auszusteuern (Bild 6). Die mit der Hydraulikanlage des Traktors D4K-B erzielbare Hubgeschwindigkeit reicht bei dieser hohen Fahrgeschwindigkeit nicht zu einer vollständigen Aussteuerung aus. Es verbleiben Restabweichungen von 110 bzw. 120 mm, die Abweichungen der Sohle von 28 bzw. 36 mm nach sich ziehen. Bei horizontaler Lage des Stranges wären also unzulässige Wassersäcke (zulässig für kleinste Nennweite 25 mm) entstanden, jedoch bei dem zulässigen Mindestgefälle von 0,3‰ tritt kein bzw. ein Wassersack < 15 mm auf.

Bestimmung der Abmessungen des Anbausystems auf Grund der Analysen

Die quantitativen Analysen wurden mit einem Modell durchgeführt, dessen Abmessungen nach Erfahrung und Gefühl festgelegt wurden. Es ist aber wünschenswert, die Abmessungen nach günstigen Verhältnissen der Schleppkurven festzulegen. Hierzu kann man, wie schon erwähnt, die Formeln (4) und (5) und die Rekursionen heranziehen. Eine Kenngröße einer Schleppkurve ist z. B. der Weg *x*, der zurückgelegt werden muß, bis sich die Schleppkurve der Asymptote bis auf einen bestimmten kleinen Betrag *c* genähert hat. Um dieses *x* einfach berechnen zu können, wandelt man zweckmäßigerweise Gleichung (4) in eine Näherungsgleichung um, indem man setzt:

$$y = a + c; \quad c \ll a; \quad a^2 + b^2 = c^2$$

es ist dann:

$$x \approx b \ln \frac{(b + \sqrt{t^2 - a^2})(t - a)}{b \cdot c} - \sqrt{t^2 - a^2}$$

$$x \approx b \ln \frac{2}{c} (t - \sqrt{t^2 - b^2}) - b \quad (6)$$

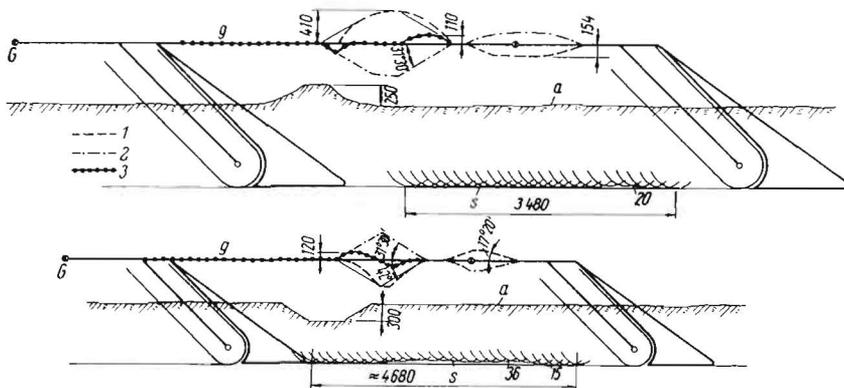


Bild 6
Schleppkurven beim Überrollen von Bodenunebenheiten mit maximal möglicher Aussteuerung; *a* Bodenoberfläche, *g* Bahn des Anlenkpunktes, 1 Bahn des Anlenkpunktes ohne Steuerung, 2 maximal mögliche Gegensteuerung, 3 Bahn des Anlenkpunktes bei bestmöglicher Gegensteuerung

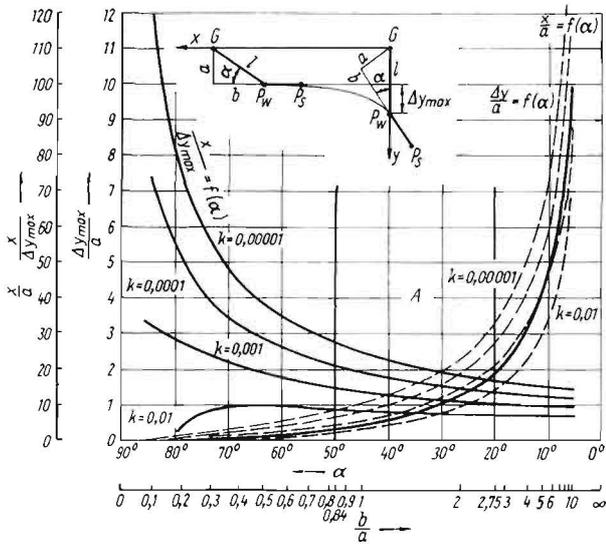


Bild 7. Ausfahrwege in Abhängigkeit von den geometrischen Abmessungen der Maschine; A brauchbarer Bereich

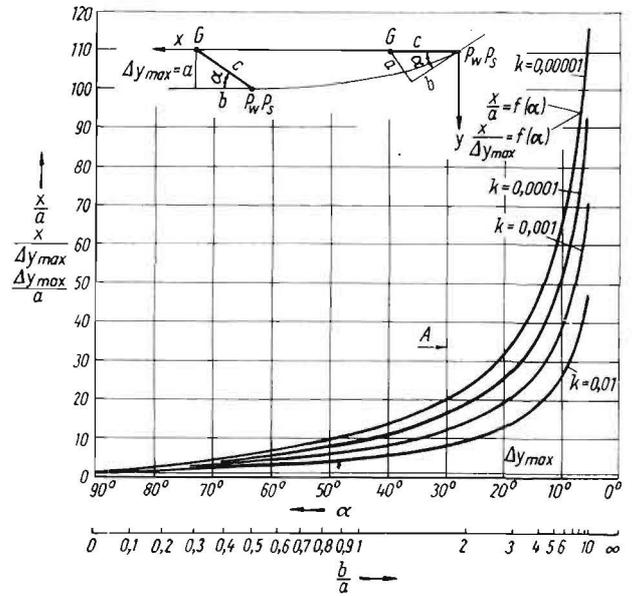


Bild 8. Einfahrwege in Abhängigkeit von den geometrischen Abmessungen der Maschine; A brauchbarer Bereich

Um die Gleichung dimensionslos zu machen, bezieht man sie auf eine Länge, die man als Einheit wählt. Hierzu bietet sich die Größe a an, da man diesen Wert, gegeben durch die gewünschte Arbeitstiefe und Bodenfreiheit, als konstruktive Größe vorgeben bekommt. Aus (6) wird dann mit

$$a = l; 0 < b < \infty; c = k \cdot a$$

$$\frac{x}{a} \approx \frac{b}{a} \ln \frac{2}{k} \left(\sqrt{1 + \frac{l^2}{a^2}} - 1 \right) - \frac{b}{a} \quad (7)$$

Betrachtet man hierin b als unabhängige — also wählbare — Veränderliche (mit b ändern sich gleichzeitig l und α), so kann man ein Diagramm aufstellen, in dem der erforderliche Ausfahrweg in Abhängigkeit von b bzw. α dargestellt ist (Bild 7). Aber nicht eigentlich der Ausfahrweg, sondern das Verhältnis des Ausfahrweges zur maximalen Höhendifferenz Δy_{\max} , die bei den Ausfahrerschleppkurven mit größerem Winkel α zunimmt, ist ein Kriterium für die Reaktionsgeschwindigkeit des Anbausystems. Je kleiner dieses Verhältnis ist, um so schneller reagiert das Anbausystem. Für die praktische Ausnutzung kommt daher nur der flach verlaufende Teil der Kurven $\frac{x}{\Delta y_{\max}} = f(\alpha)$ etwa ab $\alpha \leq 50^\circ$

in Frage (Bild 7). Mit α unter 20° zu gehen empfiehlt sich nicht, da einerseits kaum mehr eine Verringerung von $\frac{x}{\Delta y_{\max}}$ eintritt, andererseits aber die Länge l sehr schnell wächst, was die Abmessungen der Maschine unerwünscht vergrößert. In ähnlicher Weise wie bei der Ausfahrerschleppkurve läßt sich auch aus der Einfahrerschleppkurve (5) eine Näherungslösung zur Aufstellung eines Nomogramms entwickeln, wenn man setzt:

$$a = l; 0 < b < \infty; c = -k \cdot a; y = a - c; |c| \ll |a|;$$

man erhält:

$$\frac{x}{a} \approx \frac{b}{a} \cdot \ln \left| \frac{2}{k} \cdot \frac{b}{a + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} \right| + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - \frac{b}{a} \quad (8)$$

Hieraus wurde das Diagramm in Bild 8 gewonnen. Hierin ist aber nur die praktisch illusorische Schleifschuhlänge $c = 0$ berücksichtigt. Mit Hilfe der Rekursionsformeln, die ja c als Parameter implizit enthalten, konnten mit Hilfe des Rechners ZRA 1 auch diskrete Schleifschuhlängen c berücksich-

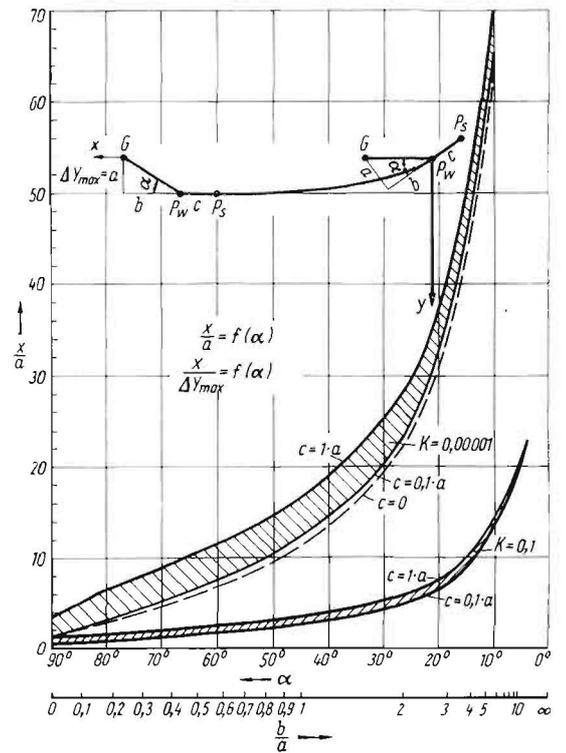


Bild 9. Einfahrwege in Abhängigkeit von den geometrischen Abmessungen der Maschine einschließlich Schleifschuhlänge

tigt werden. Die Ergebnisse sind in Bild 9 dargestellt. Bei der Einfahrerschleppkurve ist die maximale Höhendifferenz Δy_{\max} über den Winkel α konstant und gleich a , so daß hier die Funktion $x = f(\alpha)$ das Kriterium der Reaktionsgeschwindigkeit darstellt. Nach diesem Diagramm würde man den brauchbaren Bereich nur bis $d \geq 30^\circ$ ausdehnen. Es kann weiterhin abgelesen werden, daß mit größerer Schleifschuhlänge größere Einfahrwege — also geringere Reaktionsgeschwindigkeiten — auftreten, weshalb man den Schleifschuh nicht länger machen sollte, als aus anderen Gründen, z. B. zulässige Bodenpressung zur Abstützung des Werkzeug- und Schleifschuhgewichtes auf die Grabensohle, erforderlich ist.